Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, С. П. Царев, Фаддеевские собственные функции двумерных операторов Шредингера, полученные с помощью преобразования Мутара, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 3, 408–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:50:59

© 2013 г.

И. А. Тайманов*, С. П. Царев†

ФАДДЕЕВСКИЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МУТАРА

Описано действие преобразования Мутара двумерных операторов Шредингера на фаддеевские собственные функции на нулевом уровне энергии. Приведены явные примеры таких собственных функций для операторов с нетривиальным ядром и гладким быстроубывающим потенциалом, а также для нестационарных потенциалов, задающих распадающиеся решения уравнения Веселова–Новикова.

Ключевые слова: оператор Шредингера, фаддеевские собственные функции, преобразование Мутара, данные рассеяния.

DOI: 1010.4231/tmf8529

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы применили преобразование Мутара для построения примеров двумерных операторов Шредингера с быстроубывающими гладкими потенциалами и нетривиальными ядрами, а также примеров распадающихся решений уравнения Веселова–Новикова. В настоящей работе мы показываем, как преобразование Мутара действует на фаддеевские собственные функции на нулевом уровне энергии. В частности, мы строим явные примеры, которые соответствуют операторам, найденным в работе [1]. Оказывается, что такие фаддеевские собственные функции очень интересны как с точки зрения своих аналитических свойств, так и с точки зрения динамики под действием потока Веселова–Новикова. Представленная процедура также позволяет расширить принципиально новым способом список двумерных операторов Шредингера, для которых фаддеевские собственные функции явно вычисляются по крайней мере для одного уровня энергии.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.
E-mail: taimanov@math.nsc.ru

†Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия. E-mail: sptsarev@mail.ru

Для многомерного оператора Шредингера $L = -\Delta + u$ фаддеевские собственные функции $\psi(x, k)$, $k \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, являются формальными решениями уравнения

$$L\psi = E\psi, \quad E = \langle k, k \rangle,$$

удовлетворяющими условию

$$\psi = e^{i\langle k, x \rangle} (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Здесь $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Эти функции были определены в статье [2], они играют важную роль в многомерной обратной задаче рассеяния [3], [4].

В дальнейшем мы рассматриваем двумерные операторы Шредингера

$$L = -\Delta + u = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + u = -4\partial\bar{\partial} + u,$$

где

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и $(x_1, x_2) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. В этом случае, как и для более высоких размерностей, известно мало примеров, в которых эти собственные функции вычислены в явном виде. Фактически такие примеры исчерпываются следующими:

1) фаддеевские собственные функции для многоточечных потенциалов

$$u(x) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(x - x_k)$$

вычислены для всех уровней энергии в работах [5], [6];

2) для потенциалов Гриневича–Захарова [7] (эти потенциалы являются безотражательными на данном уровне энергии E и убывают, как $|x|^{-2}$) явные формулы для фаддеевских собственных функций на уровне энергии E могут быть извлечены из вычислений в статье [7].

В работе [8] показано, что для отрицательных уровней энергии E функции

$$\chi(x, k) = e^{-i\langle k, x \rangle} \psi(x, k) = \exp\left(-\frac{i}{2} \sqrt{-E} \left(\lambda z - \frac{\bar{z}}{\lambda}\right)\right) \psi(x, k),$$

где

$$k_1 = \frac{i\sqrt{-E}}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \quad k_2 = -\frac{\sqrt{-E}}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right),$$

удовлетворяют обобщенному уравнению Коши–Римана

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\lambda}} = T \bar{\chi},$$

т. е. они являются обобщенными аналитическими функциями, и для несингулярных функций T этот уровень лежит ниже основного состояния. Кроме того, в последнем случае обратная задача восстановления потенциалов (без предположений о малости

этих потенциалов) может быть решена с помощью теории обобщенных аналитических функций [9].

В настоящей статье мы рассматриваем фаддеевские собственные функции на нулевом уровне энергии $E = 0$. Они отвечают следующему условию:

$$\psi(z, \bar{z}, \lambda) = e^{\lambda z} \left(1 + \frac{A(\lambda, \bar{\lambda})}{z} + e^{\bar{\lambda} \bar{z} - \lambda z} \frac{B(\lambda, \bar{\lambda})}{\bar{z}} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \right) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

На самом деле здесь приведена одна из ветвей этих функций; другая ветвь дается решением уравнения $(-\Delta + u)\psi = 0$ с асимптотикой $e^{\mu \bar{z}}(1 + o(1))$ при $|z| \rightarrow \infty$. Для ненулевых уровней энергии аналогичные асимптотические разложения выписаны в работе [10], на нулевом уровне энергии они получаются таким же образом из аналитических свойств функции Грина–Фаддеева оператора Лапласа (подробный анализ см., в частности, в работе [11]).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРА

2.1. Преобразование Мутара и его двукратная итерация. Пусть ω удовлетворяет уравнению

$$L\omega = (-\Delta + u)\omega = 0.$$

Тогда преобразование Мутара оператора L определяется как

$$L \rightarrow \tilde{L} = -\Delta + u - 2\Delta \ln \omega = -\Delta - u + 2 \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega^2}.$$

Легко проверить следующее свойство этого преобразования.

СВОЙСТВО 1. Если φ удовлетворяет уравнению $L\varphi = 0$, то функция θ , определенная с точностью до слагаемого C/ω , где $C = \text{const}$, являющаяся решением системы уравнений

$$(\omega\theta)_x = -\omega^2 \left(\frac{\varphi}{\omega} \right)_y, \quad (\omega\theta)_y = \omega^2 \left(\frac{\varphi}{\omega} \right)_x, \quad (3)$$

удовлетворяет преобразованному уравнению $\tilde{L}\theta = 0$.

Если потенциал u зависит только от x , то специальная редукция преобразования Мутара дает известное преобразование Дарбу одномерного оператора Шредингера:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u = \left(\frac{d}{dx} + v \right) \left(-\frac{d}{dx} + v \right) \rightarrow \tilde{L} = \left(-\frac{d}{dx} + v \right) \left(\frac{d}{dx} + v \right).$$

Это соответствует случаю

$$\omega = f(x)e^{\sqrt{E}y}, \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u \right) f = Ef.$$

В работе [1] мы использовали двукратную итерацию преобразования Мутара, стартуя с оператора Лапласа $L_0 = -\Delta$. Если даны две гармонические функции ω_1

Рис. 1. Ромбическая формула суперпозиции.

и ω_2 , $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0$, построим пару преобразований Мутара, соответствующих функциям ω_1 и ω_2 :

$$L_1 = -\Delta + u_1 \xleftarrow{\omega_1} L_0 = -\Delta \xrightarrow{\omega_2} L_2 = -\Delta + u_2.$$

Оба потенциала $u_1 = -2\Delta \ln \omega_1$ и $u_2 = -2\Delta \ln \omega_2$ имеют особенности в нулях функций ω_1 и ω_2 соответственно, и мы должны выполнить итерацию преобразования Мутара, чтобы получить, если это возможно, гладкий (т.е. ограниченный и дифференцируемый) потенциал.

Обозначим через θ_1 и θ_2 преобразования ω_2 и ω_1 , полученные с помощью системы (3) при $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ соответственно. Такие преобразования определяются с точностью до C/ω . Для фиксированного θ_1 положим $\theta_2 = -(\omega_1/\omega_2)\theta_1$ (см. рис. 1). Известно, что функции θ_1 и θ_2 определяют преобразования Мутара операторов L_2 и L_1 соответственно, которые приводят к одному и тому же оператору:

$$L_1 = -\Delta + u_1 \xrightarrow{\theta_1} L = L_{12} = -\Delta + u_{12} \xleftarrow{\theta_2} L_2 = -\Delta + u_2.$$

Кроме того, функции $\varphi_1 = 1/\theta_1$ и $\varphi_2 = 1/\theta_2$ удовлетворяют уравнению $L\psi = 0$.

Потенциал $u = u_{12}$ имеет вид

$$u = -2\Delta \ln i \left((p_1 \bar{p}_2 - p_2 \bar{p}_1) + \int ((p'_1 p_2 - p_1 p'_2) dz + (\bar{p}_1 \bar{p}'_2 - \bar{p}'_1 \bar{p}_2) d\bar{z}) \right), \quad (4)$$

где $\omega_1 = p_1(z) + \overline{p_1(\bar{z})}$ и $\omega_2 = p_2(z) + \overline{p_2(\bar{z})}$, а $p_1(z)$ и $p_2(z)$ – голоморфные функции переменной z ; свободный скалярный параметр, о котором мы упоминали выше, появляется как постоянная интегрирования в (4).

2.2. Преобразования Мутара фаддеевских собственных функций. Для оператора $L_0 = -\Delta$ фаддеевские собственные функции (2) имеют вид $\psi_0(z, \lambda) = e^{\lambda z}$. С помощью уравнений (3) они преобразуются в функции ψ_1 и ψ_2 :

$$\psi_1 \xleftarrow{\omega_1} \psi_0 = e^{\lambda z} \xrightarrow{\omega_2} \psi_2.$$

Как мы уже упоминали выше, эти преобразования не определены однозначно. Однако, по крайней мере для функций ω_1 и ω_2 , которые являются полиномами от z и $\bar{z}$, можно выбрать ветви ψ_1 и ψ_2 так, что они будут удовлетворять условию (1). Тогда “кубическая формула суперпозиции” (см. работу [1] и рис. 2) гарантирует, что функция

$$\psi(z, \bar{z}, \lambda) = e^{\lambda z} + \frac{\omega_2}{\theta_1} (\psi_2 - \psi_1)$$

Рис. 2. Кубическая формула суперпозиции.

удовлетворяет уравнению $L\psi = 0$. Представляется естественным, что для гладких быстроубывающих потенциалов $u = u_{12}$ функция ψ является фаддеевской собственной функцией на нулевом уровне энергии. Мы не формулируем это здесь как строгий математический результат, однако для потенциалов, найденных в работе [1], это в самом деле справедливо.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$p_1(z) = \left(1 - \frac{i}{4}\right)z^2 + \frac{z}{2}, \quad p_2(z) = \frac{1}{4}(3 - 5i)z^2 + \frac{1 - i}{2}z.$$

Для некоторой подходящей постоянной C в θ_1 получаем

$$u = -\frac{5120|(4 - i)z + 1|^2}{(160 + |z|^2|(4 - i)z + 2|^2)^2}.$$

Умножая φ_1 и φ_2 на некоторые константы, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2(z + \bar{z}) + (4 - i)z^2 + (4 + i)\bar{z}^2}{160 + |z|^2|(4 - i)z + 2|^2}, \\ \varphi_2 &= \frac{2(1 - i)z + 2(1 + i)\bar{z} + (3 - 5i)z^2 + (3 + 5i)\bar{z}^2}{160 + |z|^2|(4 - i)z + 2|^2}. \end{aligned}$$

Фаддеевские собственные функции (2) для $L = -\Delta + u$ имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(z, \bar{z}, \lambda) &= e^{\lambda z} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \frac{(8i - 32)z\bar{z} - 8\bar{z} - (16 + 4i)\bar{z}^2 - 68z\bar{z}^2}{160 + |z|^2|(4 - i)z + 2|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda^2} \frac{(32 - 8i)\bar{z} + 68\bar{z}^2}{160 + |z|^2|(4 - i)z + 2|^2} \right), \\ \psi(z, \bar{z}, \lambda) &= e^{\lambda z} \left(1 - \frac{4}{\lambda z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \right) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Функции u , φ_1 и φ_2 гладкие и вещественные, ψ — также гладкая функция от $z, \bar{z}$. Потенциал u убывает при $|z| \rightarrow \infty$, как $1/|z|^6$, а φ_1 и φ_2 убывают, как $1/|z|^2$. Следовательно, функции φ_1 и φ_2 порождают двумерное подпространство в ядре L ,

а, поскольку функция $u \leq 0$ и убывает достаточно быстро, оператор L имеет также отрицательные собственные значения.

Таким образом, “данные рассеяния” принимают очень простой вид:

$$A(\lambda, \bar{\lambda}) = -\frac{4}{\lambda}, \quad B(\lambda, \bar{\lambda}) = 0.$$

Аналогичные формулы для фаддеевских собственных функций можно легко получить для другого гладкого быстроубывающего потенциала с нетривиальным ядром из работы [1]; он соответствует

$$p_1(z) = (i-1)z^3 + \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{20}i\right)z^2 + \frac{z}{2}, \quad p_2(z) = 2iz^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{20}\right)z^2 + \frac{1-i}{2}z.$$

В этом случае “данными рассеяния” будут $A(\lambda, \bar{\lambda}) = -6/\lambda$ и $B(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$.

3. РАСШИРЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРА И УРАВНЕНИЕ ВЕСЕЛОВА–НОВИКОВА.

3.1. Расширенное преобразование Мутара. Следуя традиционным обозначениям в теории уравнения Веселова–Новикова, перенормируем оператор Шредингера следующим образом:

$$H = \partial\bar{\partial} + U = \frac{1}{4}\Delta - \frac{u}{4}.$$

Преобразование Мутара принимает вид

$$U \rightarrow U + 2\partial\bar{\partial} \ln \omega, \\ \left(\bar{\partial} + \frac{\omega_{\bar{z}}}{\omega}\right)\theta = i\left(\bar{\partial} - \frac{\omega_{\bar{z}}}{\omega}\right)\varphi, \quad \left(\partial + \frac{\omega_z}{\omega}\right)\theta = -i\left(\partial - \frac{\omega_z}{\omega}\right)\varphi.$$

Предположим, что φ зависит также от временной переменной t и удовлетворяет уравнениям

$$H\varphi = 0, \quad \partial_t\varphi = (\partial^3 + \bar{\partial}^3 + 3V\partial + 3\bar{V}\bar{\partial})\varphi, \quad \bar{\partial}V = \partial U, \quad (5)$$

где $U = \bar{U}$. Легко проверить прямыми вычислениями, что если даны вещественные функции ω и U , то система уравнений (5) инвариантна относительно расширенного преобразования Мутара [1], [12]

$$\varphi \rightarrow \theta = \frac{i}{\omega} \int (\varphi \partial \omega - \omega \partial \varphi) dz - (\varphi \bar{\partial} \omega - \omega \bar{\partial} \varphi) d\bar{z} + \\ + (\varphi \partial^3 \omega - \omega \partial^3 \varphi + \omega \bar{\partial}^3 \varphi - \varphi \bar{\partial}^3 \omega + 2(\partial^2 \varphi \partial \omega - \partial \varphi \partial^2 \omega) - \\ - 2(\bar{\partial}^2 \varphi \bar{\partial} \omega - \bar{\partial} \varphi \bar{\partial}^2 \omega) + 3V(\varphi \partial \omega - \omega \partial \varphi) + 3\bar{V}(\omega \bar{\partial} \varphi - \varphi \bar{\partial} \omega)) dt, \quad (6) \\ U \rightarrow U + 2\partial\bar{\partial} \ln \omega, \\ V \rightarrow V + 2\partial^2 \ln \omega.$$

Условием совместности системы (5) является известное уравнение Веселова–Новикова [13]

$$U_t = \partial^3 U + \bar{\partial}^3 U + 3\partial(VU) + 3\bar{\partial}(\bar{V}U) = 0, \quad \bar{\partial}V = \partial U, \quad (7)$$

являющееся двумерным обобщением уравнения Кортевега–де Фриза, к которому оно сводится в случае $U = U(x)$, $U = V$.

Мы можем получить аналоги всех конструкций из раздела 2, заменив преобразование Мутара его расширенной версией (6), и построить тем самым нетривиальные вещественные решения уравнения Веселова–Новикова (7) (см. работу [1]). Аналог формулы (4) принимает вид

$$U(z, \bar{z}, t) = 2\partial\bar{\partial}\ln i \left((p_1\bar{p}_2 - p_2\bar{p}_1) + \int ((p'_1p_2 - p_1p'_2) dz + (\bar{p}_1\bar{p}'_2 - \bar{p}'_1\bar{p}_2) d\bar{z}) + \right. \\ \left. + \int (p'''_1p_2 - p_1p'''_2 + 2(p'_1p''_2 - p''_1p'_2) + \bar{p}_1\bar{p}'''_2 - \bar{p}'''_1\bar{p}_2 + 2(\bar{p}''_1\bar{p}'_2 - \bar{p}'_1\bar{p}''_2)) dt \right), \quad (8)$$

и, если голоморфные по z функции $p_1(z, t)$ и $p_2(z, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^3 p}{\partial^3 z},$$

функция $U(z, \bar{z}, t)$ удовлетворяет уравнению Веселова–Новикова (7).

3.2. Пример эволюции фаддеевских собственных функций под действием уравнения Веселова–Новикова. Пусть $p_1(z) = iz^2$ и $p_2 = (1 + i)z + z^2$. Хотя эти функции не зависят от t , формула (8) дает нестационарные решения уравнения Веселова–Новикова. Фаддеевские собственные функции получаются применением итераций преобразования (6) к $\psi_0(z, \bar{z}, t) = e^{\lambda z + \lambda^3 t}$. Эти исходные данные приводят к следующим функциям:

$$U(z, \bar{z}, t) = \frac{F_U(z, \bar{z}, t)}{Q^2(z, \bar{z}, t)}, \quad V(z, \bar{z}, t) = \frac{F_V(z, \bar{z}, t)}{Q^2(z, \bar{z}, t)},$$

где

$$F_U(z, \bar{z}, T) = 6i(24t(i\bar{z} - iz + z + \bar{z}) + 2iz^4\bar{z} + 4iz^3\bar{z} - 2iz\bar{z}^4 - 4iz\bar{z}^3 + \\ + 60iz - 60i\bar{z} + 96tz\bar{z} + 2z^4\bar{z} + z^4 + 6z^2\bar{z}^2 + 2z\bar{z}^4 - 240z\bar{z} - 60z + \bar{z}^4 - 60\bar{z}), \\ F_V(z, \bar{z}, t) = 6i(24t(iz - i\bar{z} + z + \bar{z}) + iz^4 + 4iz^3\bar{z}^2 - 12iz^2\bar{z}^3 - 6iz^2\bar{z}^2 + \\ + 6iz\bar{z}^4 - 60iz + 2i\bar{z}^5 + 5i\bar{z}^4 + 60i\bar{z} + 48t\bar{z}^2 + 4z^3\bar{z}^2 + 4z^3\bar{z} + 12z^2\bar{z}^4 + 12z^2\bar{z}^3 + \\ + 6z\bar{z}^4 + 4z\bar{z}^3 - 60z - 2\bar{z}^5 - 120\bar{z}^2 - 60\bar{z})$$

и

$$Q(z, \bar{z}, t) = (12 - 12i)t - z^3 - (3 - 3i)z^2\bar{z}^2 + 3iz^2\bar{z} - 3z\bar{z}^2 + i\bar{z}^3 - (30 - 30i) = \\ = \frac{1}{1+i}(24t - [6(x^2 + y^2)^2 + 8(x^3 + y^3) + 60]).$$

Фаддеевские собственные функции для потенциалов $U(z, \bar{z}, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\psi(z, \bar{z}, t, \lambda) &= e^{\lambda z} \left(1 + \frac{\mu_1(z, \bar{z}, t)}{\lambda} + \frac{\mu_2(z, \bar{z}, t)}{\lambda^2} \right) = \\ &= e^{\lambda z} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \frac{6(-2iz\bar{z}^2 - 2iz\bar{z} + z^2 + 2z\bar{z}^2 + \bar{z}^2)}{Q(z, \bar{z}, t)} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{12(i\bar{z}^2 + i\bar{z} - z - \bar{z}^2)}{Q(z, \bar{z}, t)} \right).\end{aligned}$$

Из последней формулы легко вывести “данные рассеяния” для потенциалов $U(z, \bar{z}, t)$:

$$\psi(z, \bar{z}, t, \lambda) = e^{\lambda z} \left(1 - \frac{4}{\lambda z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \right) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty,$$

и мы получаем

$$A(\lambda, \bar{\lambda}, t) = -\frac{4}{\lambda}, \quad B(\lambda, \bar{\lambda}, t) = 0.$$

Функция $U(z, \bar{z}, t)$ является решением уравнения Веселова–Новикова с гладкими и быстроубывающими (как $1/|z|^3$ при $|z| \rightarrow \infty$ начальными данными $U(z, \bar{z}, 0)$ при $t = 0$, которая имеет сингулярность при конечном времени $t = T_* > 0$ [1]. Это происходит, когда $Q(z, \bar{z}, t)$ обращается в ноль в некоторой точке.

Отметим, что:

- 1) “данные рассеяния” $A(\lambda, \bar{\lambda}, t)$ и $B(\lambda, \bar{\lambda}, t)$ стационарны;
- 2) вещественная и мнимая части функции $\mu_2(z, \bar{z}, t)$ дают собственные функции оператора H на нулевом уровне энергии; в силу формулы для $\mu_2(z, \bar{z}, t)$ они остаются несингулярными и квадратично-интегрируемыми вплоть до критического момента времени $t = T_*$, когда они приобретают ту же особенность, что и U .

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы полагаем, что приведенные примеры являются полезными для понимания преобразования рассеяния двумерного уравнения Шредингера на нулевом уровне энергии и регулярности задачи Коши для уравнения Веселова–Новикова. При этом необходимо упомянуть некоторые результаты, полученные совсем недавно в данном направлении.

Схема обратной задачи рассеяния для уравнения Веселова–Новикова была реализована для начальных данных типа проводимости в работе [14]. Напомним, что потенциал типа проводимости есть потенциал вида $u = \Delta\psi/\psi$ с $\psi > 0$ всюду и $\psi = 1$ в окрестности бесконечности, и что операторы с потенциалами типа проводимости не имеют собственных функций в пространстве L_2 .

В работе [8] был найден первый пример потенциала с нетривиальным исключительным множеством, т. е. множеством, состоящим из значений $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых фаддеевская собственная функция (2) не определена однозначно. Это было установлено для точечного потенциала $u(x) = \varepsilon\delta(x)$. Недавно эти исследования были продолжены в работе [15], где были найдены первые примеры подобных гладких потенциалов и высказана гипотеза дихотомии для регулярности задачи Коши для уравнения Веселова–Новикова.

Благодарности. Авторы благодарят П. Г. Гриневича и Р. Г. Новикова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке междисциплинарного проекта “Геометрические и алгебраические методы нахождения явных решений уравнений математической физики и механики сплошных сред” СО РАН и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-544.2012.1).

Список литературы

- [1] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 188–207.
- [2] Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **165**:3 (1965), 514–517.
- [3] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния. II”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **3**, ВИНТИ, М., 1974, 93–180.
- [4] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, *УМН*, **42**:3(255) (1987), 93–152.
- [5] P. G. Grinevich, R. G. Novikov, *Phys. Lett. A*, **376**:12–13 (2012), 1102–1106, [arXiv: 1110.3157](#).
- [6] P. G. Grinevich, R. G. Novikov, *Faddeev eigenfunctions for multipoint potentials*, [arXiv: 1211.0292](#).
- [7] П. Г. Гриневич, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 307–310.
- [8] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33.
- [9] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Наука, М., 1959.
- [10] R. G. Novikov, *J. Funct. Anal.*, **103**:2 (1992), 409–463.
- [11] M. Boiti, J. J. P. Leon, M. Manna, F. Pempinelli, *Inverse Problems*, **3**:1 (1987), 25–36.
- [12] H.-C. Hu, S.-Y. Lou, Q.-P. Liu, *Chinese Phys. Lett.*, **20**:9 (2003), 1413–1415.
- [13] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24.
- [14] P. A. Perry, *Miura maps and inverse scattering for the Novikov–Veselov equation*, [arXiv: 1201.2385](#).
- [15] M. Music, P. A. Perry, S. Siltanen, *Exceptional circles of radial potentials*, [arXiv: 1211.3520](#).

Поступила в редакцию 11.03.2013