Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Сарданашвили, Фоновая геометрия в калибровочной теории гравитации,
ТМФ, 1998, том 114, номер 3, 470–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:56:13

© 1998 г.

Г. А. Сарданашвили*

ФОНОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ В КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Показано, что описание спонтанного нарушения симметрий в калибровочной теории гравитации приводит в одном из вариантов к РТГ Логунова, обобщаемой на случай динамических связностей и фермионных полей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Факт существования дираковских фермионных полей предполагает жесткие условия, накладываемые на топологию мирового многообразия X . Чтобы выполнялся принцип причинности, допустим, что X некомпактно. Тогда оно должно быть параллелизуемым, т.е. таким, что его касательное расслоение TX тривиально и главное расслоение LX ориентированных реперов в TX имеет глобальное сечение [1].

Дираковские спиноры определяются следующим образом [2, 3]. Пусть M —пространство Минковского с метрикой, имеющей вид

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

в фиксированном базисе $\{e^a\}$. Пусть $\mathbf{C}_{1,3}$ — комплексная алгебра Клиффорда, порождаемая элементами M . Она изоморфна вещественной алгебре Клиффорда $\mathbf{R}_{2,3}$ с производящим пространством $\mathbf{R}^5$. Ее подалгеброй, порождаемой элементами $M \subset \mathbf{R}^5$, является вещественная алгебра Клиффорда $\mathbf{R}_{1,3}$. Пространство дираковских спиноров V_s представляет собой минимальный левый идеал алгебры $\mathbf{C}_{1,3}$, на который эта алгебра действует левыми умножениями. Имеет место представление

$$\gamma: M \otimes V_s \rightarrow V_s, \quad \hat{e}^a = \gamma(e^a) = \gamma^a \quad (1)$$

элементов пространства Минковского $M \subset \mathbf{C}_{1,3}$ матрицами Дирака на V_s . Явный вид этого представления зависит от выбора идеала V_s . Различные такие идеалы порождают эквивалентные представления (1). Пространство V_s наделено спинорной метрикой

$$a(v, v') = \frac{1}{2}(v^+ \gamma^0 v' + v'^+ \gamma^0 v). \quad (2)$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия

Рассмотрим преобразования, сохраняющие представление (1). По определению группа Клиффорда $G_{1,3}$ состоит из обратимых элементов l_s вещественной алгебры Клиффорда $\mathbf{R}_{1,3}$ таких, что внутренние автоморфизмы

$$l_s e l_s^{-1} = l(e), \quad e \in M, \quad (3)$$

сохраняют пространство Минковского $M \subset \mathbf{R}_{1,3}$. Так как действие (3) группы $G_{1,3}$ на M не является эффективным, ограничимся ее подгруппой $L_s = \text{Spin}^0(1, 3) \simeq \text{SL}(2, \mathbf{C})$. Это универсальное двулистное накрытие $z_L: L_s \rightarrow L$ связной группы Лоренца $L = \text{SO}^0(1, 3)$. Действие (3) группы L на M дается генераторами

$$L_{ab}{}^c{}_d = \eta_{ad} \delta_b^c - \eta_{bd} \delta_a^c. \quad (4)$$

Спиновая группа L_s действует на спинорное пространство V_s генераторами

$$L_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b] \quad (5)$$

и, т.к. $L_{ab}^+ \gamma^0 = -\gamma^0 L_{ab}$, сохраняет спинорную метрику (2). Действия (4) и (5) коммутируют с представлением (1), т.е.

$$\gamma(lM \otimes l_s V_s) = l_s \gamma(M \times V_s).$$

Дираковская спинорная структура на мировом многообразии X определяется как пара (P_s, z_s) главного L_s -расслоения $P_s \rightarrow X$ и его морфизма над X в реперное расслоение LX со структурной группой $GL_4 = GL^+(4, \mathbf{R})$ [2, 4, 5]. В силу эпиморфизма групп z_L всякий такой морфизм z_s факторизуется посредством эпиморфизма P_s на некоторое подрасслоение $L^h X \subset LX$ со структурной группой Лоренца L . Такое подрасслоение $L^h X$ называется лоренцевой структурой [6, 7], и его выделение составляет факт спонтанного нарушения симметрий в теории гравитации. Оно существует, поскольку X параллелизуемо.

В силу известной теоремы из [8] имеется взаимно однозначное соответствие между лоренцевскими подрасслоениями реперного расслоения LX и глобальными сечениями h фактор-расслоения

$$\Sigma = LX/L \rightarrow X. \quad (6)$$

Последнее является двулистным накрытием расслоения псевдоримановых метрик в TX , а его сечения описывают тетрадные поля [9]. Таким образом, наличие тетрадного поля h и соответствующей псевдоримановой метрики g на X является необходимым условием существования дираковских фермионных полей на мировом многообразии. Пусть

P^h обозначает соответствующее главное L_s -расслоение, являющееся универсальным двулистным накрытием $L^h X$, а

$$S^h = (P^h \times V_s)/L_s \quad (7)$$

– ассоциированное с ним спинорное расслоение. Его сечения s_h описывают дираковские фермионные поля в присутствии тетрадного поля h .

Действительно, всякое поле h задает на кокасательном расслоении T^*X структуру ассоциированного с $L^h X$ расслоения на пространства Минковского

$$T^*X = (L^h X \times M)/L$$

и определяет представление

$$\begin{aligned} \gamma_h: T^*X \otimes S^h &= (P^h \times (M \otimes V_s))/L_s \rightarrow (P^h \times \gamma(M \otimes V_s))/L_s = S^h, \\ \gamma_h: T^*X \ni t^* &= \dot{x}_\lambda dx^\lambda \mapsto \dot{x}_\lambda \hat{d}x^\lambda = \dot{x}_\lambda h_a^\lambda(x) \gamma^a \end{aligned} \quad (8)$$

кокасательных векторов к X посредством матриц Дирака, действующих на элементах расслоения S^h . Хиггсовский характер тетрадных полей h проявляется в том, что для разных h представления (8) неэквивалентны [10, 11]. Поэтому всякое дираковское фермионное поле может рассматриваться только в паре с определенным тетрадным полем.

Таким образом, в калибровочной теории гравитации мы приходим к известной проблеме описания фермионных полей в присутствии разных гравитационных полей и под действием общих ковариантных преобразований. Общими ковариантными преобразованиями называются автоморфизмы реперного расслоения LX , являющиеся каноническим поднятием диффеоморфизмов мирового многообразия X . Они не сохраняют лоренцевские подрасслоения LX . Здесь возможны два решения.

Первое состоит в том, чтобы описать полную систему фермионных и тетрадных полей, представив разные спинорные расслоения S^h как подрасслоения некоторого расслоения $S \rightarrow X$ [12–14]. Для этого рассмотрим универсальное двулистное накрытие $\widetilde{GL}_4$ группы GL_4 и соответствующее двулистное накрытие $\widetilde{LX}$ реперного расслоения LX [2, 15, 16]. Группа $\widetilde{GL}_4$ допускает только бесконечномерные спинорные представления [17]. Чтобы остаться в рамках стандартной фермионной модели, заметим, что $\widetilde{LX}$ имеет структуру главного L_s -расслоения $\widetilde{LX} \rightarrow \Sigma$ [14]. Рассмотрим ассоциированное с ним спинорное расслоение $S \rightarrow \Sigma$ и соответствующее композиционное расслоение

$$S \rightarrow \Sigma \rightarrow X. \quad (9)$$

На нем определено представление

$$\begin{aligned} \gamma_\Sigma: \left(\Sigma \times_X T^*X \right) \otimes_\Sigma S &\rightarrow S, \\ \gamma_\Sigma: dx^\lambda &\mapsto \sigma_a^\lambda \gamma^a \end{aligned} \quad (10)$$

кокасательных векторов к X посредством матриц Дирака. Можно показать, что для всякого тетрадного поля h ограничение $S \rightarrow \Sigma$ на $h(X) \subset \Sigma$ является подрасслоением расслоения $S \rightarrow X$, которое изоморфно спинорному расслоению S^h , а представление γ_Σ , определенное в (10), при ограничении на $h(X)$ сводится к представлению γ_h , заданному формулами (8). Расслоение $\widetilde{LX}$ наследует общие ковариантные преобразования реперного расслоения LX [15], которые, в свою очередь, индуцируют общие ковариантные преобразования расслоения S , переводящие подрасслоения $S^h \subset S$ друг в друга и сохраняющие представление (10). В этой модели тетрадное поле является динамическим и отождествляется с гравитационным полем.

В данной работе рассматривается другое решение. На мировом многообразии X фиксируются фоновое тетрадное поле h и соответствующая фоновая спиновая структура S^h , а гравитационные поля связываются с девиациями h , которые описываются сечениями ассоциированного с LX группового расслоения. Такие девиации можно трактовать как эффективное тетрадное поле. Они сохраняют спиновую структуру S^h . Рассматриваются калибровочные преобразования, которые сохраняют фоновые структуры, а на эффективные поля действуют как общие ковариантные преобразования. Получаемая модель является аффинно-метрическим обобщением релятивистской теории гравитации (РТГ) Логунова в присутствии фермионных полей [18].

2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В голономном базисе $\{\partial_\mu\}$ реперное расслоение LX наделяется координатами (x^λ, p^λ_a) . В этих координатах общее ковариантное преобразование LX – каноническое поднятие диффеоморфизма f многообразия X – имеет вид

$$\tilde{f}: (x^\lambda, p^\lambda_a) \mapsto (f^\lambda(x), \partial_\mu f^\lambda(x) p^\mu_a).$$

Оно индуцирует общее ковариантное преобразование

$$\tilde{f}: (p, v) \cdot GL_4 \mapsto (\tilde{f}(p), v) \cdot GL_4$$

всякого ассоциированного с LX расслоения

$$Y = (LX \times V)/GL_4,$$

где, напомним, взятие фактора означает отождествление элементов (p, v) и $(pg, g^{-1}v)$ для всех $g \in GL_4$.

Любое общее ковариантное преобразование расслоения LX можно представить как суперпозицию $\tilde{f} = \Phi \circ \tilde{f}_h$ его автоморфизма $\tilde{f}_h$ над f , сохраняющего подрасслоение $L^h X$, и некоторого вертикального автоморфизма

$$\Phi: p \mapsto p\phi(p), \quad p \in LX, \quad (11)$$

где ϕ — GL_4 -значная функция на LX такая, что

$$\phi(pg) = g^{-1}\phi(p)g, \quad g \in GL_4.$$

Поскольку X параллелизуемо, такой автоморфизм $\tilde{f}_h$ существует. Будучи ограниченным на $L^h X$, он индуцирует автоморфизм главного спинорного расслоения P^h и соответствующий автоморфизм $\tilde{f}_s$ спинорного расслоения S^h , который сохраняет представление (8).

Обратимся поэтому к вертикальному автоморфизму Φ . Рассмотрим ассоциированное с LX групповое расслоение $Q \rightarrow X$ с послойными координатами $(x^\lambda, q^\lambda_\mu)$. Его типичным слоем является группа GL_4 , действующая на себя присоединенным представлением. Имеют место левое и правое канонические действия Q на всякое LX -ассоциированное расслоение Y :

$$\begin{aligned} \rho_{l,r}: Q \times_X Y &\rightarrow Y, \\ \rho_l: ((p, g) \cdot GL_4, (p, v) \cdot GL_4) &\mapsto (p, gv) \cdot GL_4, \\ \rho_r: ((p, g) \cdot GL_4, (p, v) \cdot GL_4) &\mapsto (p, g^{-1}v) \cdot GL_4. \end{aligned}$$

Пусть Φ — вертикальный автоморфизм LX (11). Соответствующие вертикальные автоморфизмы ассоциированного расслоения Y и группового расслоения Q имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi: (p, v) \cdot GL_4 &\mapsto (p, \phi(p)v) \cdot GL_4, \\ \Phi: (p, g) \cdot GL_4 &\mapsto (p, \phi(p)g\phi^{-1}(p)) \cdot GL_4. \end{aligned}$$

Для любого Φ вида (11) задан послойный морфизм

$$\overline{\Phi}: (p, q) \cdot GL_4 \mapsto (p, \phi(p)q) \cdot GL_4$$

расслоения Q на себя такой, что

$$\rho_l(\overline{\Phi}(Q) \times Y) = \Phi(\rho_l(Q \times Y)), \quad (12)$$

$$\rho_r(\overline{\Phi}(Q) \times \Phi(Y)) = \rho_r(Q \times Y). \quad (13)$$

Пусть $Y = T^*X$. Тогда выражение (12) принимает простой координатный вид

$$\begin{aligned} \rho_l: (x^\lambda, q^\lambda_\mu, \dot{x}_\mu) &\mapsto (x^\lambda, \dot{x}_\lambda q^\lambda_\mu), \\ \overline{\Phi}: (x^\lambda, q^\lambda_\mu) &\mapsto (x^\lambda, S^\lambda_\nu q^\nu_\mu), \\ \rho_r(x^\lambda, S^\lambda_\nu q^\nu_\mu, \dot{x}_\alpha (S^{-1})^\alpha_\lambda) &= (x^\lambda, \dot{x}_\lambda q^\lambda_\mu). \end{aligned}$$

В результате определено представление

$$\begin{aligned} \gamma_Q: (Q \times T^*X) \otimes_Q (Q \times S^h) &\rightarrow (Q \times S^h), \\ \gamma_Q = \gamma_h \circ \rho_r: (q, t^*) &\mapsto \dot{x}_\lambda q^\lambda{}_\mu \hat{d}x^\mu = \dot{x}_\lambda q^\lambda{}_\mu h_a^\mu \gamma^a \end{aligned} \quad (14)$$

на элементах спинорного расслоения S^h . Пусть q_0 — каноническое глобальное сечение расслоения $Q \rightarrow X$, которое принимает значения в единичных элементах слоев расслоения Q . При ограничении на q_0 представление γ_Q сводится к представлению γ_h , определенному в (8).

Сечение $q(x)$ ассоциированного с LX группового расслоения Q является динамической переменной в данной модели и может трактоваться как вариант тензорного гравитационного поля РТГ. Действительно, имеет место каноническое отображение

$$\begin{aligned} \rho_l: Q \times_X \Sigma &\rightarrow \Sigma, \\ \rho_l: ((p, g) \cdot GL_4, (p, \sigma) \cdot GL_4) &\mapsto (p, g\sigma) \cdot GL_4, \quad p \in LX, \\ \rho_l: (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu, \sigma_a^\mu) &\mapsto (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu \sigma_a^\mu). \end{aligned}$$

При ограничении на $h(X) \subset \Sigma$ оно принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_h: Q &\rightarrow \Sigma, \\ \rho_h: ((p, g) \cdot L, (p, \sigma_0) \cdot L) &\rightarrow (p, g\sigma_0) \cdot L, \quad p \in L^h X, \\ \rho_h: (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu) &\mapsto (x^\lambda, q^\lambda{}_\mu h_a^\mu), \end{aligned} \quad (15)$$

где σ_0 — центр фактор-пространства GL_4/L .

Пусть Σ_h обозначает фактор расслоения Q по ядру $\text{Ker}_h \rho_h$ морфизма (15) относительно сечения h . Это расслоение с координатами $\tilde{\sigma}_a^\mu$ изоморфно расслоению Σ , наделенному лоренцевой структурой ассоциированного с $L^h X$ расслоения. Отсюда представление (14), постоянное на $\text{Ker}_h \rho_h$, сводится к представлению

$$\begin{aligned} (\Sigma_h \times T^*X) \otimes_{\Sigma_h} (\Sigma_h \times S^h) &\rightarrow (\Sigma_h \times S^h), \\ (\tilde{\sigma}, t^*) &\mapsto \dot{x}_\lambda \tilde{\sigma}_a^\lambda \gamma^a. \end{aligned} \quad (16)$$

Поэтому сечение $\tilde{h} \neq h$ расслоения Σ_h можно трактовать как эффективное тетрадное поле, а $\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{h}_a^\mu \tilde{h}_b^\nu \eta_{ab}$ — как эффективную метрику. Однако сечение $\tilde{h}$ не является вторым тетрадным полем, а $\tilde{g}$ — второй метрикой, поскольку ковекторы $\tilde{h}^a = \tilde{h}_\mu^a dx^\mu$ реализуются γ -матрицами в том же представлении, что и ковекторы $h^a = h_\mu^a dx^\mu$, а греческие индексы поднимаются и опускаются фоновой метрикой $g^{\mu\nu} = h_a^\mu h_b^\nu \eta_{ab}$.

Для всякого общего ковариантного преобразования $\tilde{f} = \Phi \circ \tilde{f}_h$ над f реперного расслоения LX рассмотрим преобразование

$$\tilde{f}_Q: Q \rightarrow \overline{\Phi} \circ \tilde{f}_h(Q), \quad S^h \rightarrow \tilde{f}_s(S^h), \quad T^*X \rightarrow \tilde{f}(T^*X). \quad (17)$$

Оно сохраняет представление (14), т.е. $\gamma_Q \circ \tilde{f}_Q = \tilde{f}_s \circ \gamma_Q$, и индуцирует общее ковариантное преобразование $\tilde{\sigma}_a^\lambda \mapsto \partial_\mu f^\lambda \tilde{\sigma}_a^\mu$ расслоения Σ_h .

Таким образом, мы приходим к РТГ [19, 20] в случае фонового тетрадного поля h и динамического гравитационного поля q .

3. КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ РТГ

Мы следуем геометрической формулировке теории поля, когда конфигурационным пространством полей – сечений расслоения $Y \rightarrow X$ – служит конечномерное многообразие струй J^1Y этого расслоения с координатами $(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i)$ [14, 21, 22]. Элементами J^1Y являются классы эквивалентности сечений s расслоения $Y \rightarrow X$, отождествляемых по своим значениям и значениям своих первых производных в точках $x \in X$:

$$y^i \circ s = s^i(x), \quad y_\lambda^i \circ s = \partial_\lambda s^i(x).$$

Лагранжиан на J^1Y определяется как горизонтальная плотность

$$L = \mathcal{L}(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i) \omega, \quad \omega = dx^1 \dots dx^n, \quad n = \dim X.$$

Используем обозначение $\pi_i^\lambda = \partial_i^\lambda \mathcal{L}$.

Связность на расслоении $Y \rightarrow X$ определяется как сечение расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$ и задается тангенциальнозначной формой

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i \partial_i).$$

Например, линейная связность K на касательном расслоении TX к многообразию X имеет вид

$$K = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + K_\lambda^\alpha{}_\nu \dot{x}^\nu \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} \right).$$

Всякая такая связность определяет спинорную связность

$$K_h = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + \frac{1}{4} (\eta^{kb} h_\mu^a - \eta^{ka} h_\mu^b) (\partial_\lambda h_k^\mu - h_k^\nu K_\lambda^\mu{}_\nu) L_{ab}{}^A{}_B y^B \partial_A \right] \quad (18)$$

на спинорном расслоении S^h с координатами (x^λ, y^A) , где L_{ab} – генераторы (5) [13, 14, 23].

Используя связность K_h и представление γ_Q , определенное в (14), можно построить оператор Дирака на расслоении $Q \times S^h$:

$$\mathcal{D}_Q = q^\lambda{}_\mu h^\mu_a \gamma^a D_\lambda, \quad (19)$$

где $D_\lambda = y^A_\lambda - K^A_\lambda$ — ковариантные производные относительно связности (18). При ограничении на q_0 оператор Дирака (19) сводится к известному оператору Дирака на S^h для фермионных полей в присутствии фонового тетрадного поля h и мировой связности K .

Таким образом, мы получаем аффинно-метрическое расширение РТГ, где динамическими переменными являются тензорное гравитационное поле q , общие линейные связности K и дираковские фермионные поля в присутствии фонового тетрадного поля h . Конфигурационным пространством такой модели является многообразие струй J^1Y расслоения

$$Y = Q \times_X C_K \times_X S^h, \quad (20)$$

где $C_K = J^1LX/GL_4$ — расслоение связностей, сечениями которого являются мировые связности K . Расслоение (20) параметризуется координатами $(x^\mu, q^\mu{}_\nu, k^\mu{}_\nu, y^A)$. Следуя идеологии РТГ, полный лагранжиан на этом конфигурационном пространстве можно выбрать в виде суммы

$$L = L_{AM} + L_q(q, g) + L_D, \quad (21)$$

где L_{AM} — лагранжиан аффинно-метрической гравитации, выраженный через компоненты тензора кривизны

$$R_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta = k_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta - k_{\mu\lambda}{}^\alpha{}_\beta + k_\mu{}^\alpha{}_\varepsilon k_\lambda{}^\varepsilon{}_\beta - k_\lambda{}^\alpha{}_\varepsilon k_\mu{}^\varepsilon{}_\beta,$$

сворачиваемые посредством эффективной метрики $\tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \tilde{\sigma}^\mu_a \tilde{\sigma}^\nu_b \eta^{ab}$, L_q — лагранжиан тензорного гравитационного поля q , в котором свертка осуществляется с помощью фоновой метрики g , и L_D — лагранжиан фермионных полей в аффинно-метрической теории гравитации [13, 14], в котором тетрадные поля заменены эффективными полями $\tilde{\sigma}$. Функция Лагранжа последнего имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = & \left\{ \frac{i}{2} \tilde{\sigma}^\lambda_q \left[y^+_A (\gamma^0 \gamma^q)^A{}_B \left(y^B_\lambda - \right. \right. \right. \\ & - \frac{1}{4} (\eta^{kb} \tilde{\sigma}^{-1a}{}_\mu - \eta^{ka} \tilde{\sigma}^{-1b}{}_\mu) (\tilde{\sigma}^\mu_{\lambda k} - \tilde{\sigma}^\nu_k k_\lambda{}^\mu{}_\nu) L_{ab}{}^B{}_C y^C \Big) - \\ & - \left. \left(y^+_{\lambda A} - \frac{1}{4} (\eta^{kb} \tilde{\sigma}^{-1a}{}_\mu - \eta^{ka} \tilde{\sigma}^{-1b}{}_\mu) (\tilde{\sigma}^\mu_{\lambda k} - \tilde{\sigma}^\nu_k k_\lambda{}^\mu{}_\nu) y^+_C L^{+C}{}_{ab} (\gamma^0 \gamma^q)^A{}_B y^B \right) \right] - \\ & - m y^+_A (\gamma^0)^A{}_B y^B \Big\} |\tilde{\sigma}|^{-1/2}, \quad \tilde{\sigma} = \det(\tilde{\sigma}^{\mu\nu}). \end{aligned}$$

В частности, положив

$$\mathcal{L}_{AM} = (-\lambda_1 R + \lambda_2) |\tilde{\sigma}|^{-1/2}, \quad \mathcal{L}_q = \lambda_3 g_{\mu\nu} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} |\sigma|^{-1/2}, \quad \mathcal{L}_D = 0, \quad (22)$$

где $R = \tilde{\sigma}^{\mu\nu} R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$, мы воспроизводим обычный лагранжиан РТГ [20].

4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Будем следовать стандартной процедуре построения лагранжевых законов сохранения, основанной на первой вариационной формуле [14, 22, 24]. Эта формула дает каноническое разложение производной Ли лагранжиана L вдоль векторного поля u на расслоении $Y \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (d_\lambda u^i - y_\mu^i \partial_\lambda u^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} = \\ = (u^i - y_\mu^i u^\mu) (\partial_i - d_\lambda \partial_i^\lambda) \mathcal{L} - d_\lambda [\pi_i^\lambda (u^\mu y_\mu^i - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (23)$$

На динамической поверхности

$$(\partial_i - d_\lambda \partial_i^\lambda) \mathcal{L} = 0, \quad d_\lambda = \partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i + y_{\lambda\mu}^i \partial_i^\mu,$$

где принимают значения решения уравнений Эйлера–Лагранжа, это тождество превращается в слабое равенство

$$\begin{aligned} \partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (d_\lambda u^i - y_\mu^i \partial_\lambda u^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} \approx \\ \approx -d_\lambda [\pi_i^\lambda (u^\mu y_\mu^i - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Если производная Ли лагранжиана L вдоль векторного поля u обращается в нуль (т.е. L инвариантен относительно локальной 1-параметрической группы калибровочных преобразований, генератором которых является u), мы получаем слабый закон сохранения

$$0 \approx -d_\lambda [\pi_i^\lambda (u^\mu y_\mu^i - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}].$$

Для удобства вычислений заменим в произведении (20) расслоение Q на Σ_h и обозначим

$$Y' = \Sigma_h \times_X C_K \times_X S^h.$$

Существует каноническое поднятие на Y' всякого векторного поля τ на X :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} = \tau^\mu \partial_\mu + (\partial_\nu \tau^\alpha k_\mu^\nu{}_\beta - \partial_\beta \tau^\nu k_\mu^\alpha{}_\nu - \partial_\mu \tau^\nu k_\nu^\alpha{}_\beta + \partial_{\mu\beta} \tau^\alpha) \frac{\partial}{\partial k_\mu^\alpha{}_\beta} + \partial_\nu \tau^\mu \tilde{\sigma}^\nu{}_a \frac{\partial}{\partial \tilde{\sigma}^\mu{}_a} + \\ + \frac{1}{4} (\eta^{kb} h_\mu^a - \eta^{ka} h_\mu^b) (\tau^\lambda \partial_\lambda h_k^\mu - h_k^\nu \partial_\nu \tau^\mu) \left(L_{ab}{}^A{}_B y^B \partial_A - L_{ab}{}^c{}_d \tilde{\sigma}_d^\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{\sigma}_c^\nu} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где $L_{ab}{}^c{}_d$ – генераторы (4). Это генератор калибровочных преобразований расслоения Y' , порождаемых преобразованиями $\tilde{f}_Q$ вида (17). Его составляющая, действующая на греческие индексы, является стандартным генератором общих ковариантных преобразований, а та, что действует на латинские индексы, – локальным генератором вертикальных лоренцевских калибровочных преобразований.

Рассмотрим слабое равенство (24) для лагранжиана РТГ (21) вдоль векторного поля (25). В отличие от L_q лагранжианы L_{AM} и L_D по построению инвариантны относительно указанных выше калибровочных преобразований. Используя результаты, полученные в [13, 14], мы можем поэтому привести равенство (24) к виду

$$\begin{aligned} \partial_\lambda(\tau^\lambda \mathcal{L}_q) + (\partial_\alpha \tau^\mu \tilde{g}^{\alpha\nu} + \partial_\alpha \tau^\nu \tilde{g}^{\alpha\mu}) \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} &\approx \\ &\approx d_\lambda \left(2\tau^\mu \tilde{g}^{\lambda\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \tilde{g}^{\alpha\mu}} + \tau^\lambda \mathcal{L}_q - d_\mu U^{\mu\lambda} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$U = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{AM}}{\partial R_{\mu\lambda}{}^{\alpha}{}_{\nu}} (\partial_\nu \tau^\alpha - k_\sigma{}^\alpha{}_\nu \tau^\sigma)$$

– обобщенный суперпотенциал Комара энергии-импульса аффинно-метрической гравитации [13, 14, 25].

Из выражения (26) следует, что если лагранжиан L из (21) содержит хиггсовский член L_q , поток энергии-импульса не сводится к суперпотенциалу, а имеет место обычный ковариантный закон сохранения

$$\tilde{\nabla}_\alpha t^\alpha_\lambda \approx 0, \quad t^\alpha_\lambda = 2\tilde{g}^{\alpha\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}, \quad (27)$$

где $\tilde{\nabla}_\alpha$ – ковариантные производные относительно связности Леви-Чивита эффективной метрики $\tilde{g}$. В случае стандартного лагранжиана РТГ L_q из (22) равенство (27) сводится к известному условию

$$\nabla_\alpha (\tilde{g}^{\alpha\mu} \sqrt{|\tilde{g}|}) \approx 0,$$

где ∇_α – ковариантные производные относительно связности Леви-Чивита фоновой метрики g . Тогда на решениях, удовлетворяющих этому условию, поток энергии-импульса в РТГ, как и в других основных моделях гравитации – общей теории относительности [26], формализме Палатини [27, 28], аффинно-метрической и калибровочной моделях гравитации [13, 14, 25], – сводится к обобщенному суперпотенциалу Комара.

Автор благодарит акад. А. А. Логунова и проф. М. А. Мествиришвили за плодотворное обсуждение работы.

Список литературы

- [1] *R. Geroch*. J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1739.
- [2] *H. Lawson, M.-L. Michelson*. Spin Geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.
- [3] *J. Crawford*. J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 576.
- [4] *S. Avis, C. Isham*. Commun. Math. Phys. 1980. V. 72. P. 103.
- [5] *I. Benn, R. Tucker*. An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics. Bristol: Adam Hilger, 1987.
- [6] *Р. Зуланке, П. Винтген*. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.
- [7] *F. Gordejuela, J. Masqu*. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 497.
- [8] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
- [9] *Д. Д. Иваненко, П. И. Пронин, Г. А. Сарданашвили*. Калибровочная теория гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [10] *G. Sardanashvily*. Int. J. Theor. Phys. 1991. V. 30. P. 721.
- [11] *G. Sardanashvily, O. Zakharov*. Gauge gravitation theory. Singapore: World Scientific, 1992.
- [12] *G. Sardanashvily*. J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 1546.
- [13] *G. Sardanashvily*. Class. Quantum. Gravit. 1997. V. 14. P. 1371.
- [14] *G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily*. New Hamiltonian and Lagrangian Methods in Field Theory. Singapore: World Scientific, 1997.
- [15] *L. Dabrowski, R. Percacci*. Commun. Math. Phys. 1986. V. 106. P. 691.
- [16] *S. Switt*. J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 3825.
- [17] *F. Hehl, J. McCrea, E. Mielke, Y. Ne'eman*. Phys. Rep. 1995. V. 258. P. 1.
- [18] *G. Sardanashvily*. Relativistic theory of gravity: Gauge approach. In: Proceedings of the XIX Workshop on High Energy Physics and Field Theory, Protvino, 1996. Protvino: IHEP Press, 1997. P. 184.
- [19] *А. А. Лозунов, М. А. Мествришвили*. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [20] *А. А. Лозунов*. Релятивистская теория гравитации и принцип Маха. Протвино: Изд. ИФВЭ, 1996.
- [21] *G. Sardanashvily*. Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Constraint Systems. Singapore: World Scientific, 1995.
- [22] *Г. А. Сарданашвили*. Математические методы теории поля. I. Геометрия и классические поля. М.: УРСС, 1996.
- [23] *A. Aringazin, A. Mikhailov*. Class. Quantum. Gravit. 1991. V. 8. P. 1685.
- [24] *G. Sardanashvily*. J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 847.
- [25] *G. Giachetta, G. Sardanashvily*. Class. Quantum. Gravit. 1996. V. 13. P. L67.
- [26] *J. Novotný*. On the conservation laws in General Relativity. In: Geometrical Methods in Physics, Proceeding of the Conference on Differential Geometry and its Applications (Czechoslovakia, 1983). Ed. D. Krupka. Brno: University of J.E. Purkyn, 1984. P. 207.
- [27] *J. Novotný*. Int. J. Theor. Phys. 1993. V. 32. P. 1033.
- [28] *A. Borowiec, M. Ferraris, M. Francaviglia, I. Volovich*. Gen. Rel. Grav. 1994. V. 26. P. 637.

Поступила в редакцию 1.X.1997 г.