Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Рахматуллаев, Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2013, том 176, номер 3, 477–493

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:34:02

© 2013 г.

М. М. Рахматуллаев*

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА И ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли описано множество слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли. Также изучены некоторые слабо периодические меры Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Поттса, слабо периодические основные состояния.

DOI: 10.1010.4231/tmf8530

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что фазовая диаграмма мер Гиббса для данного гамильтониана близка к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах периодическому основному состоянию соответствует периодическая мера Гиббса [1], [2]. В результате возникает задача описания периодических и слабо периодических основных состояний.

Слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями описаны в работах [3], [4]. Слабо периодические меры Гиббса изучены в работах [3], [5]. Периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями рассмотрены в работе [6].

Дерево Кэли τ^k порядка $k \geq 1$ – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер.

Пусть $\tau^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин графа τ^k , L – множество его ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y мы называем *ближайшими соседями* и обозначаем как $l = \langle x, y \rangle$. Определим расстояние $d(x, y)$ между вершинами $x, y \in V$ на дереве Кэли как минимальное число d такое, что найдутся

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

$x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V$, которые последовательно являются ближайшими соседями: $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$. Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначения

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V: d(x, x^0) = n\}, \\ V_n &= \{x \in V: d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n &= \{l = \langle x, y \rangle \in L: x, y \in V_n\}. \end{aligned}$$

Для $x \in W_n$ назовем множеством прямых потомков множество

$$S(x) = \{y \in W_{n+1}: d(x, y) = 1\}.$$

Мы рассматриваем модели, в которых спин принимает значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$. Конфигурация σ на множестве вершин V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Известно, что дерево Кэли τ^k можно представить как свободное произведение G_k $k+1$ циклических групп второго порядка (см., например, работы [3]–[9]). Обозначим через $S_1(x)$ множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т. е.

$$S_1(x) = \{y \in G_k: \langle x, y \rangle\}.$$

Пусть $x_\perp = S_1(x) \setminus S(x)$.

Определим G_k^* -периодическую конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $G_k^* \subset G_k$ конечного индекса, т. е. $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k$, $y \in G_k^*$. Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется периодом конфигурации. Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ – факторгруппа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$. Конфигурацию $\{\sigma(x), x \in V\}$ назовем G_k^* -слабо периодической, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_\perp \in H_i$, $x \in H_j$ для любого $x \in G_k$, другими словами, значение конфигурации зависит не от x , а от номеров классов принадлежности вершин x и $x_\perp$.

Гамильтониан модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{x, y \in V, \\ \langle x, y \rangle}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x, y \in V: \\ d(x, y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

где $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$, δ_{uv} – символ Кронекера.

В настоящей работе рассматривается модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями. Цель работы – описать слабо периодические основные состояния для этой модели и слабо периодические меры Гиббса для обычной модели Поттса ($J_2 = 0$). В разделе 2 сформулированы результаты о слабо периодических основных состояниях. В разделе 3 приведены результаты о слабо периодических мерах Гиббса. Доказательства всех результатов даны в разделе 4.

2. ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Для пары конфигураций σ и φ , совпадающих почти всюду, т. е. всюду, за исключением конечного числа точек, мы рассматриваем относительный гамильтониан $H(\sigma, \varphi)$, определяющий различие между энергиями конфигураций σ и φ :

$$H(\sigma, \varphi) = J_1 \sum_{\substack{x, y \in V, \\ \langle x, y \rangle}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) + J_2 \sum_{\substack{x, y \in V, \\ d(x, y)=2}} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}), \quad (1)$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ – произвольный фиксированный параметр.

Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V . Назовем *ограниченной конфигурацией* σ_b сужение конфигурации σ на шар $b \in M$. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{J_1}{2} \sum_{\substack{x, y \in b, \\ \langle x, y \rangle}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x, y \in b, \\ d(x, y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

где $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

Известна следующая лемма [3], [6].

ЛЕММА 1. *Относительный гамильтониан (1) имеет вид*

$$H(\sigma, \varphi) = \sum_{b \in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)).$$

В этом разделе мы рассмотрим случай $q = 3$, т. е. $|\Phi| = 3$. Пусть e – единичный элемент из группы G_k . Обозначим через c_b центр единичного шара b , положим $B_t = \{x \in S_1(e) : \varphi_b(x) = t\}$ для любого $t \in \Phi$. Пусть $\varphi_b(c_b) = d$, $|B_d| = i$, $|B_f| = n$, тогда $|B_g| = k + 1 - i - n$, где $d \neq f$, $d \neq g$, $f \neq g$, $d, f, g \in \Phi$. Легко доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Для каждой конфигурации φ_b имеет место следующее включение:*

$$U(\varphi_b) \in \left\{ U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor \right\},$$

где

$$U_{i,n} = \frac{J_1}{2} i + \frac{J_2}{2} (i(i-1) + (k-n-i)(k-n-i+1) + n(n-1)) \quad (2)$$

и $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конфигурация φ называется *основным состоянием* относительного гамильтониана H , если

$$U(\varphi_b) = \min \left\{ U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor \right\}$$

для любого $b \in M$.

Положим $C_{i,n} = \{\varphi_b : U(\varphi_b) = U_{i,n}\}$ и

$$A_{\xi, \eta} = \left\{ J \in \mathbb{R}^2 : U_{\xi, \eta} = \min \left\{ U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{k+1-i}{2} \right\rfloor \right\} \right\}. \quad (3)$$

2.1. Случай $k = 2$. Легко видеть, что в этом случае для любой конфигурации σ_b

$$U(\sigma_b) \in \{U_{0,0}, U_{0,1}, U_{1,0}, U_{1,1}, U_{2,0}, U_{3,0}\},$$

где

$$\begin{aligned} U_{0,0} &= 3J_2, & U_{0,1} &= J_2, & U_{1,0} &= \frac{1}{2}J_1 + J_2, \\ U_{1,1} &= \frac{1}{2}J_1, & U_{2,0} &= J_1 + J_2, & U_{3,0} &= \frac{3}{2}J_1 + 3J_2. \end{aligned}$$

Используя определение (3), имеем

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}, \\ A_{0,1} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}, \\ A_{1,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}, \\ A_{1,1} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, -2J_2 \leq J_1 \leq 2J_2\}, \\ A_{2,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, -4J_2 \leq J_1 \leq -2J_2\}, \\ A_{3,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \leq 0\} \end{aligned}$$

и $\bigcup_{i,n} A_{i,n} = \mathbb{R}^2$.

Пусть $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$. Положим

$$H_A = \left\{ x \in G_k: \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четное число} \right\}, \quad (4)$$

где $w_j(x)$ – количество символов a_j в слове x . Множество H_A является нормальным делителем индекса 2.

Рассмотрим факторгруппу $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$. Для простоты введем обозначения $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$. H_A -слабо периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{00}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ a_{01}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ a_{10}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ a_{11}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases} \quad (5)$$

где $a_{ij} \in \Phi$, $i, j \in \{0, 1\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $J_1 \neq 0$, $J_2 \neq 0$, $|A| = 1$. При $k = 2$, $q = 3$ все H_A -слабо периодические основные состояния являются периодическими или трансляционно-инвариантными.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $|A| = 2$. При $k = 2$, $q = 3$ верны следующие утверждения.

1. На множестве $A_{0,1}$ существуют шесть H_A -слабо периодических основных состояний, не являющихся периодическими или трансляционно-инвариантными; они имеют вид

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ t, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ n, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ l, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases} \quad (6)$$

где $l, t, n \in \Phi$ и $l \neq t$, $l \neq n$, $t \neq n$.

2. Любые H_A -слабо периодические основные состояния, кроме $\varphi^*(x)$, являются трансляционно-инвариантными.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что периодические и трансляционно-инвариантные основные состояния являются также слабо периодическими, но обратное неверно. Поэтому найденные основные состояния являются новыми.

2.2. Случай $k = 3$. При $k = 3$ из леммы 2 для любого σ_b получим

$$U(\sigma_b) \in \{U_{0,0}, U_{0,1}, U_{0,2}, U_{1,0}, U_{1,1}, U_{2,0}, U_{2,1}, U_{3,0}, U_{4,0}\},$$

где

$$\begin{aligned} U_{0,0} &= 6J_2, & U_{0,1} &= 3J_2, & U_{0,2} &= 2J_2, & U_{1,0} &= \frac{1}{2}J_1 + 3J_2, \\ U_{1,1} &= \frac{1}{2}J_1 + J_2, & U_{2,0} &= J_1 + 2J_2, & U_{2,1} &= J_1 + J_2, & U_{3,0} &= \frac{3}{2}J_1 + 3J_2, \\ U_{4,0} &= 2J_1 + 6J_2. \end{aligned}$$

Воспользуемся определением (3). Нетрудный, но достаточно громоздкий анализ показывает, что

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_2 \leq 0\}, \\ A_{0,1} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_2 = 0\}, \\ A_{0,2} &= \{J \in \mathbb{R}^2: 0 \leq J_2 \leq J_1/2\}, \\ A_{1,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}, \\ A_{1,1} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_1 - 2J_2 \leq 0\}, \\ A_{2,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}, \\ A_{2,1} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \geq 0\}, \\ A_{3,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \leq 0, -J_1/6 \leq J_2 \leq -J_1/4\}, \\ A_{4,0} &= \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0\} \end{aligned}$$

и $\bigcup_{i,n} A_{i,n} = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию (5).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $J_1 \neq 0, J_2 \neq 0$ и $|A| = 1, 2$. Тогда при $k = 3$ и $q = 3$ любое H_A -слабо периодическое основное состояние является периодическим или трансляционно-инвариантным.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $|A| = 3$. Тогда при $k = 3, q = 3$ справедливы следующие утверждения.

1. На множестве $A_{0,1}$ существуют шесть H_A -слабо периодических основных состояний, не являющихся периодическими или трансляционно-инвариантными; они имеют вид (6).
2. Любые H_A -слабо периодические основные состояния, кроме $\varphi^*(x)$, являются трансляционно-инвариантными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [4] доказано, что обычная модель Изинга не имеет слабо периодических (не периодических) основных состояний. Из теоремы 2 и теоремы 4 следует, что обычная модель Поттса (т.е. модель с $J_2 = 0$) имеет слабо периодические основные состояния.

2.3. Случай $k \geq 4$. В этом пункте мы покажем, что при любом $k \geq 4$ существуют слабо периодические (не периодические) основные состояния.

С помощью определения (2) в некоторых случаях мы можем вычислить $U_{i,n}$:

$$\begin{aligned} U_{0,0} &= \frac{J_2}{2} k(k+1), & U_{0,1} &= \frac{J_2}{2} k(k-1), \\ U_{0,2} &= \frac{J_2}{2} ((k-2)(k-1) + 2), & U_{0,3} &= \frac{J_2}{2} ((k-3)(k-2) + 6). \end{aligned}$$

Используя равенство (3), вычислим $A_{0,1}, A_{0,2}$. Сначала найдем $A_{0,1}$. Для этого заметим, что из неравенства $U_{0,1} \leq U_{0,0}$ следует, что $J_2 \geq 0$, а из неравенства $U_{0,1} \leq U_{0,2}$ следует, что $J_2 \leq 0$, откуда $J_2 = 0$. Далее, при $i > 0$ из неравенства $U_{0,1} \leq U_{i,n}$ следует, что $J_1 \geq 0$. Таким образом, получаем

$$A_{0,1} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_2 = 0\}.$$

Аналогичным образом можно вычислить $A_{0,2}$, в результате получаем

$$A_{0,2} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_2 = 0\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *При $k \geq 4$ и $|A| = k$ слабо периодическая конфигурация (6) на множестве $\{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ является слабо периодическим основным состоянием.*

3. СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Гамильтониан обычной модели Поттса с внешним полем α определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V} \delta_{1\sigma(x)}, \quad (7)$$

где $J, \alpha \in \mathbb{R}$.

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n :

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x} \right\}, \quad (8)$$

где $\beta = 1/T$, T – температура, $T > 0$, Z_n^{-1} – нормировочный множитель,

$$\{h_x = (h_{1,x}, h_{2,x}, \dots, h_{q,x}) \in \mathbb{R}^q, \quad x \in V\}$$

– совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V_n} \delta_{1\sigma(x)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (8) согласованное, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}).$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Эта мера называется расщепленной мерой Гиббса, соответствующей гамильтониану (7) и векторнозначной функции h_x , $x \in V$.

Следующее утверждение [7] описывает условие на h_x , обеспечивающее согласованность мер $\mu_n(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 6. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, заданное в (8), является согласованной мерой тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее равенство:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta, \alpha), \quad (9)$$

где $S(x)$ – множество прямых потомков точки x и функция

$$F: h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow F(h, \theta, \alpha) = (F_1, F_2, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$$

определяется как

$$F_i = \alpha \beta \delta_{1i} + \ln \frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}, \quad \theta = e^{J\beta}.$$

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ – факторгруппа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^* -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для всех $x \in G_k$, $y \in G_k^*$. При этом G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^* -слабо периодической, если $h_x = h_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$ для любого $x \in G_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мера μ называется G_k^* -периодической (слабо периодической), если она соответствует G_k^* -периодической (слабо периодической) совокупности векторов h .

Цель этого раздела – описать слабо периодические меры Гиббса.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. Пусть q – произвольное натуральное число, т. е. $\sigma: V \rightarrow \Phi = \{1, 2, \dots, q\}$. Для $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ рассмотрим множество (4), пусть $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ – факторгруппа. Вновь для простоты положим $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$.

H_A -слабо периодические совокупности векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1}, x \in G_k\}$ имеют следующий вид:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если } x_\downarrow \in H_0, x \in H_0, \\ h_2, & \text{если } x_\downarrow \in H_0, x \in H_1, \\ h_3, & \text{если } x_\downarrow \in H_1, x \in H_0, \\ h_4, & \text{если } x_\downarrow \in H_1, x \in H_1. \end{cases}$$

Здесь $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{i,q-1})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда в силу равенства (9) имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= (k - |A|)F(h_1, \theta) + |A|F(h_2, \theta), \\ h_2 &= (|A| - 1)F(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_4, \theta), \\ h_3 &= (|A| - 1)F(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_1, \theta), \\ h_4 &= (k - |A|)F(h_4, \theta) + |A|F(h_3, \theta). \end{aligned}$$

При $k = |A|$ эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} h_1 &= kF(h_2, \theta), & h_2 &= (k - 1)F(h_3, \theta) + F(h_4, \theta), \\ h_3 &= (k - 1)F(h_2, \theta) + F(h_1, \theta), & h_4 &= kF(h_3, \theta). \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения: $z_{ij} = e^{h_{ij}}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, q - 1$. Тогда последнюю систему уравнений можно переписать как

$$\begin{aligned} z_{1j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^k, \\ z_{2j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{k-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right), \\ z_{3j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{k-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right), \\ z_{4j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^k; \end{aligned} \quad (10)$$

здесь $j = 1, 2, \dots, q - 1$.

Рассмотрим отображение $W: \mathbb{R}^{4q-4} \rightarrow \mathbb{R}^{4q-4}$, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} z'_{1j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^k, \\ z'_{2j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{k-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right), \\ z'_{3j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{k-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right), \\ z'_{4j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^k; \end{aligned}$$

здесь $j = 1, 2, \dots, q - 1$. Система (10) эквивалентна уравнению $z = W(z)$.

Отображение W имеет следующие инвариантные множества: множество I_1 элементов $z \in \mathbb{R}^{4q-4}$ задается условиями

$$z_{11} = \dots = z_{1,q-1} = z_{21} = \dots = z_{2,q-1} = z_{31} = \dots = z_{3,q-1} = z_{41} = \dots = z_{4,q-1},$$

а множество I_2 — условиями

$$z_{11} = \dots = z_{1,q-1} = z_{41} = \dots = z_{4,q-1}, \quad z_{21} = \dots = z_{2,q-1} = z_{31} = \dots = z_{3,q-1}.$$

ТЕОРЕМА 7. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Для модели Поттса все H_A -слабо периодические меры Гиббса на I_1 являются трансляционно-инвариантными.*

2. *При $k = 2$ и $|A| = 1, 2$ существует критическое значение $\theta_{\text{cr}} = 1 + 2\sqrt{q-1}$ такое, что при $\theta > \theta_{\text{cr}}$ существуют по меньшей мере три H_A -слабо периодические меры Гиббса; при $\theta = \theta_{\text{cr}}$ существуют по меньшей мере две H_A -слабо периодические меры Гиббса; при $\theta < \theta_{\text{cr}}$ существует по меньшей мере одна H_A -слабо периодическая мера Гиббса.*

Теперь рассмотрим случай произвольного k . Легко проверить, что при любом k на инвариантном множестве I_2 система уравнений (10) принимает вид

$$\begin{aligned} z_{11} &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_{21} + 1}{(q - 1)z_{21} + \theta} \right)^k, \\ z_{21} &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_{21} + 1}{(q - 1)z_{21} + \theta} \right)^{k-1} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_{11} + 1}{(q - 1)z_{11} + \theta} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем следующее обозначение:

$$f(z) = \frac{(\theta + q - 2)z + 1}{(q - 1)z + \theta}. \quad (12)$$

Тогда систему уравнений (11) можно переписать как

$$z_{11}^{1/k} = f(z_{11}^{(k-1)/k} f(z_{11})), \quad z_{21} = (f(z_{21}))^{k-1} f(z_{11}).$$

Положим $z = z_{11}^{1/k}$. Тогда первое уравнение этой системы уравнений принимает следующий вид:

$$f(z^{k-1} f(z^k)) = z. \quad (13)$$

ЛЕММА 3. *Все положительные решения уравнения (13) являются положительными решениями уравнения $f(z^k) = z$.*

ТЕОРЕМА 8. *При $k = |A|$ для модели Поттса на инвариантном множестве I_2 существует критическое значение $\theta_{\text{cr}} > 1$, такое, что при $\theta = \theta_{\text{cr}}$ существуют по меньшей мере две H_A -слабо периодические меры Гиббса; если $\theta > \theta_{\text{cr}}$, то существуют по меньшей мере три H_A -слабо периодические меры Гиббса.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Полученные в теоремах 7, 8 слабо периодические меры являются также трансляционно-инвариантными. Действительно, из системы уравнений (11) с учетом обозначения (12) получим следующее уравнение:

$$z_{11} f(z_{11}) = z_{21} f(z_{21}). \quad (14)$$

Рассмотрим производную функции $\phi(z) = z f(z)$:

$$\phi'(z) = \frac{(q-1)(\theta+q-2)z^2 + 2\theta(\theta+q-2)z + \theta}{((q-1)z + \theta)^2} > 0,$$

т. е. функция $\phi(z)$ строго возрастает. Отсюда соотношение (14) верно тогда и только тогда, когда $z_{11} = z_{21}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

4.1. Доказательство теоремы 1. Если $a_{ij} = p \in \Phi$ для любых $i, j \in \{0, 1\}$, то очевидно, что соответствующие конфигурации являются трансляционно-инвариантными.

Рассмотрим случай, когда a_{ij} принимает два разных значения из множества Φ .

1. Пусть $a_{00} = a_{01} = a_{10} = l$, $a_{11} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_b \in C_{1,0}$; но, поскольку мы имеем $A_{3,0} \cap A_{2,0} \cap A_{1,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$, можно утверждать, что соответствующая конфигурация не является основным состоянием.

2. Пусть $a_{00} = a_{01} = a_{11} = l$, $a_{10} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,0}$; но, поскольку $A_{3,0} \cap A_{2,0} \cap A_{0,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$, соответствующая конфигурация не является основным состоянием.

3. Пусть $a_{00} = a_{10} = a_{11} = l$, $a_{01} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,0}$; но, поскольку мы имеем $A_{2,0} \cap A_{3,0} \cap A_{0,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$, соответствующая конфигурация не является основным состоянием.

4. Пусть $a_{00} = m$, $a_{01} = a_{10} = a_{11} = l$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{1,0}$; но $A_{1,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

5. Пусть $a_{00} = a_{01} = l$, $a_{10} = a_{11} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{1,0}$; но, поскольку $A_{3,0} \cap A_{2,0} \cap A_{1,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$, соответствующая конфигурация не является основным состоянием.

6. Пусть $a_{00} = a_{11} = l$, $a_{01} = a_{10} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_b \in C_{1,0}$; но $A_{2,0} \cap A_{1,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$, откуда получим, что соответствующая конфигурация не является основным состоянием.

7. Пусть $a_{00} = a_{10} = l$, $a_{01} = a_{11} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$. Тогда соответствующие слабо периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} l, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ m, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ l, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ m, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1 \end{cases} = \begin{cases} l, & \text{если } x \in H_0, \\ m, & \text{если } x \in H_1. \end{cases} \quad (15)$$

Отсюда получаем, что слабо периодическая конфигурация (15) является периодической. В работе [6] доказано, что периодическая конфигурация вида $\varphi(x)$ является основным состоянием, следовательно, она также является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим случай, когда a_{ij} принимает три разных значения из множества Φ .

Пусть $a_{00} = a_{01} = l$, $a_{10} = m$, $a_{11} = n$, где $l, m, n \in \Phi$, $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,1}$; но при этом $A_{3,0} \cap A_{2,0} \cap A_{0,1} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$, откуда следует, что соответствующая конфигурация не является основным состоянием.

Аналогичным образом анализируя все возможные случаи, можно убедиться, что соответствующие конфигурации не являются основными состояниями. Теорема 1 доказана.

4.2. Доказательство теоремы 2. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Рассмотрим конфигурацию $\varphi^*(x)$, заданную в (6).

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b^*(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 2$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 2$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 2$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b^*(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 2$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

Отсюда следует, что на множестве $A_{0,1} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}$ данная слабо периодическая конфигурация $\varphi^*(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Доказательство второго утверждения аналогично доказательству теоремы 1. Теорема 2 доказана.

4.3. Доказательство теоремы 3. Пусть $|A| = 1$. Если $a_{ij} = p \in \Phi$ для любых $i, j \in \{0, 1\}$, то очевидно, что соответствующие конфигурации являются трансляционно-инвариантными.

Рассмотрим случай, когда a_{ij} принимает два разных значения из множества Φ .

1. Пусть $a_{00} = a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 4$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{4,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 3$, следовательно, $\varphi_b \in C_{1,0}$; но при этом мы имеем $A_{4,0} \cap A_{3,0} \cap A_{1,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

2. Пусть $a_{00} = a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 4$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{4,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 4$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,0}$; но $A_{4,0} \cap A_{3,0} \cap A_{0,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

3. Пусть $a_{00} = a_{10} = a_{11} = l, a_{01} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 4$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{4,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 4$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,0}$; но при этом мы имеем $A_{3,0} \cap A_{4,0} \cap A_{0,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

4. Пусть $a_{00} = m$, $a_{01} = a_{10} = a_{11} = l$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$; но при этом мы имеем $A_{2,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

5. Пусть $a_{00} = a_{01} = l$, $a_{10} = a_{11} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 4$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{4,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{1,0}$; но $A_{4,0} \cap A_{3,0} \cap A_{1,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

6. Пусть $a_{00} = a_{11} = l$, $a_{01} = a_{10} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$.

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$; но $A_{3,0} \cap A_{2,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$, поэтому можно утверждать, что соответствующие конфигурации не являются основными состояниями.

7. Пусть $a_{00} = a_{10} = l$, $a_{01} = a_{11} = m$, где $l, m \in \Phi$, $l \neq m$. Тогда соответствующая слабо периодическая конфигурация имеет вид (15).

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 3$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 3$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$; но $A_{3,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 \leq 0, -J_1/6 \leq J_2 \leq -J_1/4\}$, откуда получим, что слабо периодическая конфигурация $\varphi(x)$ является периодической; периодическая конфигурация $\varphi(x)$ является основным состоянием, следовательно, она является также слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим случай, когда a_{ij} принимает три разных значения из множества Φ .

1. Пусть $a_{00} = a_{01} = l$, $a_{10} = m$, $a_{11} = n$, где $l, m, n \in \Phi$, $l \neq m$, $l \neq n$, $m \neq n$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 4$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{4,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = l$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b(c_b) = m$, $|B_l| = 3$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,1}$; но $A_{4,0} \cap A_{3,0} \cap A_{0,1} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

2. Пусть $a_{00} = a_{10} = l, a_{01} = m, a_{11} = n$, где $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l, |B_l| = 3, |B_m| = 1, |B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b(c_b) = l, |B_l| = 3, |B_m| = 0, |B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m, |B_l| = 1, |B_m| = 0, |B_n| = 3$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,1}$; но при этом мы имеем $A_{3,0} \cap A_{0,1} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

3. Пусть $a_{00} = a_{11} = l, a_{01} = m, a_{10} = n$, где $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l, |B_l| = 3, |B_m| = 1, |B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b(c_b) = l, |B_l| = 2, |B_m| = 1, |B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,1}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = n, |B_l| = 4, |B_m| = 0, |B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,0}$; но $A_{3,0} \cap A_{2,1} \cap A_{0,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

4. Пусть $a_{00} = m, a_{01} = a_{10} = l, a_{11} = n$, где $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможен следующий случай: если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m, |B_l| = 2, |B_m| = 2, |B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,0}$; но при этом мы имеем $A_{2,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

5. Пусть $a_{00} = m, a_{01} = a_{11} = l, a_{10} = n$, где $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = m, |B_l| = 1, |B_m| = 3, |B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b(c_b) = m, |B_l| = 1, |B_m| = 2, |B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,1}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = n, |B_l| = 1, |B_m| = 3, |B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{0,1}$; но мы имеем $A_{3,0} \cap A_{2,1} \cap A_{0,1} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$.

6. Пусть $a_{00} = m, a_{01} = n, a_{10} = a_{11} = l$, где $l, m, n \in \Phi, l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = m, |B_l| = 1, |B_m| = 2, |B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{2,1}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b(c_b) = m, |B_l| = 0, |B_m| = 3, |B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b \in C_{3,0}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b(c_b) = l, |B_l| = 1, |B_m| = 3, |B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b \in C_{1,0}$; но $A_{2,1} \cap A_{3,0} \cap A_{1,0} = \{J \in \mathbb{R}^2: J_1 = 0, J_2 = 0\}$; на основании рассуждений, приведенных выше, можно утверждать, что соответствующие конфигурации не являются основными состояниями.

Случай $|A| = 2$ доказывается аналогично. Теорема 3 доказана.

4.4. Доказательство теоремы 4.

Докажем первое утверждение теоремы.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b^*(c_b) = l, |B_l| = 0, |B_m| = 3, |B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 2$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,2}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 3$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 2$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,2}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = 3$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b^*(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = 3$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

Отсюда получим, что на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} = A_{0,1} = \{J \in \mathbb{R}^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ данная конфигурация $\varphi^*(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Доказательство второго утверждения теоремы аналогично доказательству теоремы 3. Теорема 4 доказана.

4.5. Доказательство теоремы 5. Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b^*(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 1$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = k - 1$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,2}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b^*(c_b) = n$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = k$, $|B_n| = 0$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

а) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = l$, то $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 2$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k - 1$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,2}$;

б) если $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = n$, то $\varphi_b^*(c_b) = m$, $|B_l| = 1$, $|B_m| = 0$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$;

в) если $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_b^*(c_{b\downarrow}) = m$, то $\varphi_b^*(c_b) = l$, $|B_l| = 0$, $|B_m| = 1$, $|B_n| = k$, следовательно, $\varphi_b^* \in C_{0,1}$.

Таким образом, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} = \{J \in \mathbb{R}^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}$ данная конфигурация $\varphi^*(x)$ является слабо периодическим основным состоянием. Теорема 5 доказана.

4.6. Доказательство теоремы 7. Докажем первое утверждение теоремы. Для инвариантного множества I_1 доказательство очевидно.

Докажем второе утверждение теоремы для инвариантного множества I_2 . Система уравнений (10) при $k = |A| = 2$ на инвариантном множестве I_2 имеет следующий вид:

$$z_{11} = \left(\frac{(\theta + q - 2)z_{21} + 1}{(q - 1)z_{21} + \theta} \right)^2, \quad z_{21} = \left(\frac{(\theta + q - 2)z_{11} + 1}{(q - 1)z_{11} + \theta} \right) \left(\frac{(\theta + q - 2)z_{21} + 1}{(q - 1)z_{21} + \theta} \right).$$

Подставляя первое уравнение во второе, получим равенство

$$z_{21} = \left(\frac{(\theta + q - 2)z_{11} + 1}{(q - 1)z_{11} + \theta} \right) \sqrt{z_{11}},$$

подставим его в первое уравнение и положим $z = \sqrt{z_{11}}$. В результате получим уравнение

$$(q-1)(\theta+q-2)z^4 + (\theta(q-1) - (\theta+q-2)^2)z^3 + (\theta^2 - (\theta+q-2))z - \theta = 0,$$

левая часть которого делится на $z-1$. Производя это деление, получим

$$(q^2 + \theta q - 3q - \theta + 2)z^3 + (q + 2\theta - \theta^2 - 2)z^2 + (q + 2\theta - \theta^2 - 2)z + \theta = 0.$$

Это уравнение является кубическим относительно z , с другой стороны, оно является квадратным уравнением относительно θ . Найдём решения этого квадратного уравнения:

$$\theta_1 = -\frac{(q-2)z}{z+1}, \quad \theta_2 = \frac{(q-1)z^2 + z + 1}{z}.$$

Неравенство $\theta = -(q-2)z/(z+1) < 0$ при $q > 2$, $z > 0$ невозможно.

Для $\theta = \theta_2$ имеем

$$(q-1)z^2 + (1-\theta)z + 1 = 0. \quad (16)$$

Если $\theta^2 - 2\theta + 5 - 4q = 0$, что эквивалентно $\theta = 1 \pm 2\sqrt{q-1}$, то уравнение (16) имеет единственное решение, так как параметр $\theta > 0$ может принимать только значение $\theta = 1 + 2\sqrt{q-1}$. Единственное решение уравнения (16) имеет вид

$$z = \frac{\sqrt{\theta-1}}{2(q-1)} = \frac{1}{\sqrt{q-1}}$$

и положительно. Если $\theta^2 - 2\theta - 7 > 0$, что эквивалентно

$$\theta \in (-\infty, 1 - 2\sqrt{q-1}) \cup (1 + 2\sqrt{q-1}, +\infty),$$

то уравнение (16) имеет два решения, так как параметр $\theta > 0$ может принимать только значения из интервала $(1 + 2\sqrt{q-1}, +\infty)$. Легко проверить, что для таких θ оба решения уравнения (16) являются положительными.

Доказательство второго утверждения в случае $|A| = 1$ аналогично. Теорема 7 доказана.

4.7. Доказательство леммы 3. Уравнение (13) можно переписать как

$$\frac{\theta + q - 2}{q - 1} \frac{\frac{(\theta+q-2)z^{2k-1} + z^{k-1}}{(q-1)z^k + \theta} + 1}{\frac{(\theta+q-2)z^{2k-1} + z^{k-1}}{(q-1)z^k + \theta} + \theta} = z$$

или как

$$((\theta + q - 2)^2 - z(q-1)(\theta + q - 2))z^{2k} + ((\theta + q - 2) - \theta z^2(q-1))z^k + \theta z - \theta^2 z^2 = 0.$$

Отсюда находим z^k как корни квадратного уравнения: для $z^k = -\theta z/(\theta + q - 2)$ неравенство $z^k < 0$ при $\theta > 0, q \geq 2$ невозможно; для другого корня квадратного уравнения имеем

$$z^k = \frac{\theta z - 1}{(1-q)z + \theta + q - 2}, \quad z = \frac{(\theta + q - 2)z^k + 1}{(q-1)z^k + \theta} = f(z^k).$$

Лемма 3 доказана.

4.8. Доказательство теоремы 8. Уравнение

$$z = f(z^k) = (\theta + q - 2)z^k + 1(q - 1)z^k + \theta$$

перепишем как уравнение

$$(q - 1)z^{k+1} - (\theta + q - 2)z^k + \theta z - 1 = 0, \quad (17)$$

одним из решений которого является $z = 1$. Тогда, разделив левую часть уравнения (17) на $z - 1$, получим следующее уравнение:

$$(q - 1)z^k - (\theta - 1)(z^{k-1} + z^{k-2} + \dots + z) + 1 = 0.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = (q - 1)z^k - (\theta - 1)(z^{k-1} + z^{k-2} + \dots + z) + 1$. Легко проверить, что $g(0) = 1$. Существует значение $\theta_{\text{cr}} > 1$ такое, что при $\theta > \theta_{\text{cr}}$ множество $\{z: g(z) < 0\}$ непустое, но при этом $g(z) > 0$ для достаточно больших z , т. е. функция $g(z)$ имеет два нуля. Если $\theta = \theta_{\text{cr}}$, то функция $g(z)$ имеет один ноль. Теорема 8 доказана.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую признательность профессору У. А. Розикову за постановку задачи и полезные советы по работе.

Список литературы

- [1] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [2] Р. А. Минлос, *Введение в математическую статистическую физику*, МЦНМО, М., 2002.
- [3] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 507–516.
- [4] M. M. Rahmatullaev, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **4**:2 (2010), 237–251.
- [5] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 292–302.
- [6] Г. И. Ботиров, У. А. Розиков, *ТМФ*, **153**:1 (2007), 86–97.
- [7] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [8] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.
- [9] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35**:2 (1990), 220–230.

Поступила в редакцию 11.03.2013