Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Хакимов, p -Адические квазимеры Гиббса для модели Ваннименуса на дереве Кэли, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 1, 13–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:27:58

© 2014 г.

О. Н. Хакимов*

p -АДИЧЕСКИЕ КВАЗИМЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ВАННИМЕНУСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучаются p -адические квазимеры Гиббса для модели Ваннименуса на дереве Кэли порядка два. Особое внимание уделено проблеме ограниченности трансляционно-инвариантных p -адических квазимер Гиббса. Также исследованы периодические p -адические квазимеры Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, квазимера Гиббса, модель Ваннименуса, трансляционно-инвариантная мера, p -адические числа.

DOI: 10.4213/tmf8536

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание предельных мер Гиббса для данного гамильтониана является одной из основных задач в теории мер Гиббса. Полный анализ множества таких мер является весьма трудоемким. По этой причине большая часть работ по этой тематике посвящена изучению мер Гиббса на дереве Кэли [1], [2].

Известно [3]–[5], что p -адические модели в физике нельзя описать, используя обычную теорию вероятностей. В монографии [3] абстрактная p -адическая теория вероятностей была развита на основе теории неархимедовых мер. Вероятностные процессы на поле p -адических чисел изучались многими авторами [6]–[12]. Неархимедов аналог теоремы Колмогорова был доказан в работе [13].

В работе [8] рассматривались p -адические меры Гиббса для модели Изинга с четырьмя конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. Доказано, что множество p -адических мер Гиббса состоит из единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса. Более того, эта мера является ограниченной. В работах [10], [11] изучались трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка два. Показано, что множество таких мер может состоять более чем из одного элемента. В работе [8] также рассматривались трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса для модели Ваннименуса на дереве Кэли и было доказано, что при определенных условиях существуют три трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса.

*Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: hakimovo@mail.ru

Настоящую работу можно считать продолжением работы [8]. Мы изучаем проблему ограниченности трансляционно-инвариантных p -адических квазимер Гиббса для модели Ваннименуса, а также исследуем периодические p -адические квазимеры Гиббса.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

2.1. p -Адические числа и меры. Каждое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде

$$x = p^r \frac{n}{m},$$

где p – фиксированное простое число, $r, n \in \mathbb{Z}$, а m – положительное число, взаимно простое с n , причем m и n не делятся на p . p -Адическая норма числа x определяется по формуле

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта норма удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\},$$

что показывает неархимедовость нормы. Из этого свойства непосредственно вытекают следующие утверждения:

- 1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
- 2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x - y|_p \leq |x|_p$.

Пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме приводит к полю p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ для каждого простого p [14]. Начав с поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, мы можем получить либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо одно из полей p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (теорема Островского).

Каждое p -адическое число $x \neq 0$ имеет единственное каноническое разложение

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots),$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j – целые числа такие, что $x_0 > 0$ и $0 \leq x_j \leq p - 1$ для $j = 0, 1, 2, \dots$ [5], [14], [15]. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Следующая теорема доказана в книге [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + \dots)$, где $a_0 > 0$ и $0 \leq a_j \leq p - 1$ для $j = 0, 1, 2, \dots$. Уравнение $x^2 = a$ имеет решение $x \in \mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) число $\gamma(a)$ четное;
- 2) уравнение $y^2 \equiv a_0 \pmod{p}$ разрешимо, если $p \neq 2$, и $a_1 = a_2 = 0$, если $p = 2$.

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ введем обозначение

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}.$$

p -Адический логарифм определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n},$$

который сходится при $x \in B(1, 1)$; p -адическая экспонента определяется как

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

этот ряд сходится при $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

ЛЕММА 1. Пусть $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Тогда

$$\begin{aligned} |\exp_p(x)|_p &= 1, & |\exp_p(x) - 1|_p &= |x|_p, & |\log_p(1+x)|_p &= |x|_p, \\ \log_p(\exp_p(x)) &= x, & \exp_p(\log_p(1+x)) &= 1+x. \end{aligned}$$

Более подробно об основах p -адического анализа и p -адической математической физики можно прочитать в монографиях [5], [14], [15].

Пусть $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, где $\mathcal{B}$ – алгебра подмножеств в X . Функция $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется p -адической мерой, если для любого набора множеств $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ такого, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

p -Адическая мера называется вероятностной, если $\mu(X) = 1$ (см. работу [13]).

2.2. Дерево Кэли. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, V – множество вершин и L – множество ребер. Две вершины x и y называются ближайшими соседями, если существует ребро $l \in L$, соединяющее их; это записывается как $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$ между вершинами x и y равно числу ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y .

Пусть x^0 – фиксированная вершина. Введем обозначения

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m$$

и для $x \in W_n$

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

Обычно говорят, что $S(x)$ – это множество прямых потомков элемента x . Две вершины y и z называются следующими ближайшими соседями, если существует вершина $x \in V$ такая, что $y, z \in S(x)$; это обозначается как $\rangle y, z \langle$.

2.3. Модель Ваннименуса. Рассмотрим p -адическую модель Ваннименуса на дереве Кэли порядка два.

Пусть $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел и $\Phi = \{-1; 1\}$. Конфигурация σ в V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; аналогично определяются конфигурации σ_n и $\sigma^{(n)}$ на V_n и W_n соответственно. Множество всех конфигураций на V (на V_n, W_n) обозначается через $\Omega = \Phi^V$ (соответственно через $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). Для конфигураций $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_n}$ и $\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}$ положим

$$(\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)})(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{если } x \in V_{n-1}, \\ \varphi^{(n)}(x), & \text{если } x \in W_n. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)} \in \Omega_{V_n}$.

Гамильтониан $H_n: \Omega_{V_n} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ p -адической модели Ваннименуса имеет следующий вид:

$$H_n(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in V_n}} \sigma(x)\sigma(y), \quad (1)$$

где $J_1, J_2 \in \mathbb{Q}_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Модель Ваннименуса является обобщением модели Изинга, модель Изинга отвечает случаю $J_2 = 0$. Более подробно о модели Ваннименуса можно найти в книге [12].

2.4. Построение p -адической квазимеры Гиббса. Следуя работам [10], [11], построим p -адическую меру Гиббса для модели (1). Как и в классическом случае, мы рассмотрим специальный класс мер Гиббса.

Пусть $h: x \rightarrow h_x \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ есть p -адическая функция на множестве V . Рассмотрим p -адическое вероятностное распределение $\mu_h^{(n)}$ на Ω_{V_n} , заданное как

$$\mu_h^{(n)}(\sigma_n) = Z_{n,h}^{-1} p^{H_n(\sigma_n)} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $Z_{n,h}$ – нормировочная константа,

$$Z_{n,h} = \sum_{\varphi \in \Omega_{V_n}} p^{H_n(\varphi)} \prod_{x \in W_n} h_x^{\varphi(x)}. \quad (3)$$

Говорят, что p -адическое вероятностное распределение $\mu_h^{(n)}$ согласованно, если для всех $n \geq 1$ и любых $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (4)$$

В этом случае по теореме Колмогорова [13] существует единственная мера μ_h на Ω такая, что $\mu_h(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и любых $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. p -Адическая вероятностная мера μ называется *p -адической квазимерой Гиббса*, если существует p -адическая функция h на V такая, что

$$\mu(\sigma \in \Omega: \sigma|_{V_n} = \sigma_n) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ и любых $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$. Здесь $\mu_h^{(n)}$ определена формулами (2), (3).

Заметим, что p -адические квазимеры Гиббса μ_h и μ_{-h} , соответствующие функциям h и $-h$, одинаковы.

Обозначим через $\mathcal{QG}(H)$ множество всех p -адических квазимер Гиббса, соответствующих функциям $h = \{h_x, x \in V\}$. Рассмотрим гамильтониан (1) в случае $J = J_1 = J_2 \in \mathbb{Z}$.

Следующее утверждение доказано в работе [8].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Семейство p -адических вероятностных мер $\mu_h^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию согласованности (4) тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее соотношение:

$$u_x = \frac{\theta^2 u_y u_z + u_y + u_z + 1}{u_y u_z + u_y + u_z + \theta^2}, \quad \theta = p^{2J}, \quad u_x = h_x^2; \quad (5)$$

здесь $S(x) = \{y, z\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вещественнозначные меры Гиббса возникают во многих проблемах теории вероятностей и статистической механики. Эти меры определяются с помощью функции экспоненты. Аналогично, p -адическая мера Гиббса определяется с помощью p -адической экспоненты $\exp_p(x)$. Но область определения и область значения функции $\exp_p(x)$ не очень удобна для работы. Поэтому для многих моделей, в частности для модели Изинга, существует только одна p -адическая мера Гиббса. Чтобы получить широкий класс p -адических мер Гиббса, в работе [10] было введено понятие p -адической квазимеры Гиббса, которая определяется с помощью функции r^x . В работах [10], [11] для модели Поттса и в работе [8] для модели Ваннименуса показано, что множество $\mathcal{QG}(H)$ шире, чем множество всех p -адических мер Гиббса. Более того, p -адические квазимеры Гиббса могут быть неограниченными [11].

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНАЯ КВАЗИМЕРА ГИББСА

Решения уравнения (5) вида $u_x = u \in \mathbb{Q}_p$ для $x \neq x_0$ называются *трансляционно-инвариантными*. Соответствующая p -адическая квазимера Гиббса называется трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

Подставляя u вместо u_x для всех $x \neq x_0$, из уравнения (5) получим

$$u = \frac{\theta^2 u^2 + 2u + 1}{u^2 + 2u + \theta^2}. \quad (6)$$

Легко проверить, что $u_0 = 1$ является решением уравнения (6). Так как уравнение (6) является кубическим, для других решений (если они существуют) имеем формальную запись

$$u_{1,2} = \frac{\theta^2 - 3 \pm \sqrt{(1 - \theta^2)(5 - \theta^2)}}{2}.$$

Известны следующие теоремы [8].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $J > 0$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Если $p \in \{2, 3, 5\}$, то существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая квазимера Гиббса μ_{h_0} .

2. Пусть $p > 5$ и x_0 является решением уравнения $x^2 \equiv 5 \pmod{p}$. Если уравнение $x^2 + 6 \equiv 2x_0 \pmod{p}$ имеет решение, то существуют три трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса $\mu_{h_0}, \mu_{h_1}, \mu_{h_2}$. Здесь $h_0 = 1, h_1 = \sqrt{u_1}, h_2 = \sqrt{u_2}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $J < 0$. Тогда существуют три трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса $\mu_{h_0}, \mu_{h_1}, \mu_{h_2}$.

3.1. Ограниченность трансляционно-инвариантных p -адических квази-мер Гиббса.

ЛЕММА 2. Пусть h является решением уравнения (5) и μ_h – соответствующая p -адическая квазимера Гиббса. Тогда для нормировочной константы $Z_{n,h}$ (см. (3)) имеет место равенство $Z_{n+1,h} = A_{n,h} Z_{n,h}$, где

$$A_{n,h} = \prod_{x \in W_n} a_h(x). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как h является решением уравнения (5), для любой вершины $x \in V$ существует величина $a_h(x) \in \mathbb{Q}_p$ такая, что

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} p^{J(\sigma(x)(\varphi(y)+\varphi(z))+\varphi(y)\varphi(z))} h_y^{\varphi(y)} h_z^{\varphi(z)} = a_h(x) h_x^{\sigma(x)}; \quad (8)$$

здесь $S(x) = \{y, z\}$ и $\sigma \in \Omega_{V_n}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \prod_{x \in W_n} \sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} p^{J(\sigma(x)(\varphi(y)+\varphi(z))+\varphi(y)\varphi(z))} h_y^{\varphi(y)} h_z^{\varphi(z)} &= \\ &= \prod_{x \in W_n} a_h(x) h_x^{\sigma(x)} = A_{n,h} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $A_{n,h}$ определены формулой (7). Из соотношений (2) и (9) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} \mu_h^{(n+1)}(\sigma \vee \varphi) &= \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \sum_{\varphi \in \Omega_{W_{n+1}}} \frac{1}{Z_{n+1,h}} p^{H(\sigma \vee \varphi)} \prod_{x \in W_{n+1}} h_x^{\varphi(x)} = \\ &= \frac{A_{n,h}}{Z_{n+1,h}} \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} p^{H(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)} = \frac{A_{n,h}}{Z_{n+1,h}} Z_{n,h} = 1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть h является решением уравнения (5). Найдем коэффициент $a_h(x)$, соответствующий этому h . Фиксируем точку $x \in V$ и перепишем равенство (8) для случаев $\sigma(x) = 1$ и $\sigma(x) = -1$. Имеем для $\sigma(x) = 1$

$$p^{3J} h_y h_z + p^{-J} h_y^{-1} h_z + p^{-J} h_y h_z^{-1} + p^{-J} h_y^{-1} h_z^{-1} = a(x) h_x,$$

а для $\sigma(x) = -1$

$$p^{-J} h_y h_z + p^{-J} h_y^{-1} h_z + p^{-J} h_y h_z^{-1} + p^{3J} h_y^{-1} h_z^{-1} = a(x) h_x^{-1}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$a_h(x) = \frac{\sqrt{(p^{4J} h_y^2 h_z^2 + h_y^2 + h_z^2 + 1)(h_y^2 h_z^2 + h_y^2 + h_z^2 + p^{4J})}}{p^J h_y h_z}. \quad (10)$$

Для трансляционно-инвариантных решений h формула (10) имеет вид

$$a_h = \frac{\sqrt{(p^{4J} h^4 + 2h^2 + 1)(h^4 + 2h^2 + p^{4J})}}{p^J h^2}. \quad (11)$$

3.1.1. Случай $J > 0$.

ЛЕММА 3. Для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ и $n \geq 1$ имеет место неравенство

$$|p^{H_n(\sigma)}|_p \leq p^{J(2^n-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что $H_n(\sigma) \geq -J(2^n - 1)$. Заметим, что гамильтониан достигает своего минимума, например конфигурация $\sigma \in \Omega_{V_n}$, определенная как $\sigma(y)\sigma(z) = -1$ при всех $x \in V_{n-1}$ (здесь $S(x) = \{y, z\}$), дает минимальное значение гамильтониана.

ЛЕММА 4. Справедливы равенства $|h_0|_p = |h_1|_p = |h_2|_p = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $|h_0|_p = 1$, так как $h_0 = 1$. В силу теоремы 2 решения h_1 , h_2 могут существовать лишь только при $p > 5$. Более того, в силу свойства 1 p -адической нормы (см. п. 2.1) имеем

$$|h_1|_p = \left| \sqrt{\frac{p^{4J} - 3 + \sqrt{p^{8J} - 6p^{4J} + 5}}{2}} \right|_p = \left| \sqrt{2\sqrt{5} - 6} \right|_p = 1.$$

Аналогично проверяется, что $|h_2|_p = 1$.

ЛЕММА 5. Для нормировочных констант Z_{n,h_i} , $i = 0, 1, 2$, имеют место следующие равенства:

$$|Z_{n,h_1}|_p = |Z_{n,h_2}|_p = p^{J(2^n-2)}, \quad |Z_{n,h_0}|_p = \begin{cases} p^{J(2^n-2)}, & \text{если } p \neq 3, \\ p^{(J-1)(2^n-2)}, & \text{если } p = 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы для решения h_1 . Из представления (11) имеем

$$\begin{aligned} |a_{h_1}|_p &= \left| \frac{\sqrt{(p^{4J}h_1^4 + 2h_1^2 + 1)(h_1^4 + 2h_1^2 + p^{4J})}}{p^J h_1^2} \right|_p = \\ &= \left| p^{-J} \sqrt{(2\sqrt{5} - 4)(\sqrt{5} + 1)} \right|_p = \left| p^{-J} \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right|_p = p^J. \end{aligned}$$

Далее, так как $Z_{n,h} = a_h^{|V_{n-1}|}$ и $|V_{n-1}| = 2^n - 2$, мы получаем

$$|Z_{n,h_1}|_p = p^{J(2^n-2)}.$$

Аналогично проверяется, что $|Z_{n,h_2}|_p = p^{J(2^n-2)}$.

Докажем утверждение леммы для решения h_0 . Так как $h_0 = 1$, из (11) получим

$$|a_{h_0}|_p = \left| \frac{\sqrt{(p^{4J} + 3)(3 + p^{4J})}}{p^J} \right|_p = |3p^{-J}|_p = \begin{cases} p^J, & \text{если } p \neq 3, \\ p^{J-1}, & \text{если } p = 3. \end{cases}$$

Отсюда

$$|Z_{n,h_0}|_p = \begin{cases} p^{J(2^n-2)}, & \text{если } p \neq 3, \\ p^{(J-1)(2^n-2)}, & \text{если } p = 3. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $p \neq 3$, то все трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса являются ограниченными.*

2. *Если $p = 3$, то существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая квазимера Гиббса μ_{h_0} , причем она является неограниченной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \neq 3$. В этом случае в силу леммы 5 мы имеем $|Z_{n,h_i}|_p = p^{J(2^n-2)}$ для $i = 0, 1, 2$. В силу лемм 3 и 4 для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ и всякого $n = 1, 2, \dots$

$$|\mu_{h_i}^{(n)}(\sigma)|_p = \left| \frac{p^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_i^{\sigma(x)}}{Z_{n,h_i}} \right|_p \leq \frac{p^{J(2^n-2)}}{p^{J(2^n-2)}} = 1, \quad i = 0, 1, 2.$$

Это означает, что в случае $p \neq 3$ все трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса μ_{h_i} , $i = 0, 1, 2$, ограничены.

Пусть $p = 3$. В этом случае в силу теоремы 2 существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая квазимера Гиббса μ_{h_0} . Покажем, что она неограничена. Определим конфигурацию σ следующим образом: $\sigma(y)\sigma(z) = -1$ при всех $x \in V_{n-1}$ (здесь $S(x) = \{y, z\}$). Тогда в силу лемм 4 и 5 для нормы меры μ_{h_0} в этой конфигурации имеем

$$|\mu_{h_0}^{(n)}(\sigma)|_p = \left| \frac{p^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_0}{Z_{n,h_0}} \right|_p = \frac{p^{J(2^n-2)}}{p^{(J-1)(2^n-2)}} = p^{2^n-2}.$$

Отсюда $|\mu_{h_0}^{(n)}(\sigma)|_p \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

3.1.2. Случай $J < 0$.

ЛЕММА 6. *Для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ и $n \geq 1$ имеет место неравенство*

$$|p^{H_n(\sigma)}|_p \leq p^{-J(3 \cdot 2^n - 5)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что гамильтониан достигает своего минимума на конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$, которая принимает значение единица для всех $x \in V_n$.

ЛЕММА 7. *Справедливы равенства $|h_0|_p = 1$, $|h_1|_p = p^{-2J}$, $|h_2|_p = p^{2J}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $|h_0|_p = 1$. Для нормы h_1 имеем

$$|h_1|_p = \left| p^{2J} \sqrt{\frac{1 - 3p^{-4J} + \sqrt{1 - 6p^{-4J} + 5p^{-4J}}}{2}} \right|_p = p^{-2J}.$$

Так как $h_i = \sqrt{u_i}$, $i = 1, 2$, и $u_1 u_2 = 1$, получаем $|h_2|_p = p^{2J}$.

ЛЕММА 8. *Для нормировочных констант Z_{n,h_i} , $i = 0, 1, 2$, имеют место следующие равенства:*

$$|Z_{n,h_1}|_p = |Z_{n,h_2}|_p = p^{-J(5 \cdot 2^n - 10)}, \quad |Z_{n,h_0}|_p = p^{-J(3 \cdot 2^n - 6)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7 имеем $h_1 = p^{2J}\varepsilon$, где $|\varepsilon|_p = 1$. Следовательно,

$$|a_{h_1}|_p = \left| \frac{\sqrt{(p^{12J}\varepsilon^4 + 2p^{4J}\varepsilon^2 + 1)(p^{8J}\varepsilon^4 + 2p^{4J}\varepsilon^2 + p^{4J})}}{p^{5J}\varepsilon^2} \right|_p = p^{-5J}.$$

Отсюда

$$|Z_{n,h_1}|_p = p^{-J(5 \cdot 2^n - 10)}.$$

Аналогично проверяются равенства $|Z_{n,h_2}|_p = p^{-J(5 \cdot 2^n - 10)}$ и $|Z_{n,h_0}|_p = p^{-J(3 \cdot 2^n - 6)}$.

ТЕОРЕМА 5. *Все трансляционно-инвариантные p -адические квазимеры Гиббса ограничены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 6–8.

4. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ p -АДИЧЕСКАЯ КВАЗИМЕРА ГИББСА

Рассмотрим следующее уравнение:

$$u = f(f(u)), \quad \text{где} \quad f(u) = \frac{\theta^2 u^2 + 2u + 1}{u^2 + 2u + \theta^2}.$$

Заметим, что множество решений этого уравнения содержит решения уравнения $u = f(u)$. Нас интересуют только периодические (не являющиеся трансляционно-инвариантными) меры, поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(u)) - u}{f(u) - u} = 0,$$

из которого получим

$$\theta^2 u^2 + (\theta^2 + 1)u + \theta^2 = 0. \tag{12}$$

Если существует $\sqrt{1 + 2\theta^2 - 3\theta^4}$ в $\mathbb{Q}_p$, то величины

$$u_{3,4} = \frac{-1 - \theta^2 \pm \sqrt{1 + 2\theta^2 - 3\theta^4}}{2\theta^2}$$

являются решениями уравнения (12). Положим $D(\theta) = 1 + 2\theta^2 - 3\theta^4$. Сначала мы проверим, что в $\mathbb{Q}_p$ существует $\sqrt{D(\theta)}$, а затем покажем, что существуют числа $\sqrt{u_3}$ и $\sqrt{u_4}$. Заметим, что из существования одного из них вытекает существование второго. Имеем по теореме Виета $u_3 u_4 = 1$. При $\sqrt{u_3} \in \mathbb{Q}_p$ отсюда получаем, что $\sqrt{u_4} \in \mathbb{Q}_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку существование одного из чисел $\sqrt{u_1}$ или $\sqrt{u_2}$ влечет существование другого, мы заключаем, что либо не существует 2-периодическая p -адическая квазимера Гиббса, либо существуют две 2-периодические p -адические квазимеры Гиббса.

4.1. Случай $J > 0$. В этом случае в силу теоремы 1 существует $\sqrt{D(\theta)}$ для любого простого числа p . Теперь проверим существование $\sqrt{u_3}$ в $\mathbb{Q}_p$.

Пусть $p = 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{-1 - 2^{4J} + \sqrt{1 + 2^{4J+1} - 3 \cdot 2^{8J}}}{2^{4J+1}} = \\ &= \frac{-1 - 2^{4J} + 1 + 2 + 2^2 + \dots}{2^{4J+1}} = 2^{-4J}(1 + 2 + \dots). \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что $\sqrt{u_3}$ не существует в $\mathbb{Q}_p$.

Пусть $p \neq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{-1 - p^{4J} + \sqrt{1 + 2p^{4J} - 3p^{8J}}}{2p^{4J}} = \\ &= \frac{-1 - p^{4J} + 1 + p^{2J} + \dots}{2p^{4J}} = \frac{1 + a_1p^J + a_2p^{2J} + \dots}{2p^{2J}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\sqrt{u_3}$ существует тогда и только тогда, когда существует $\sqrt{2}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть существует $\sqrt{2}$ в $\mathbb{Q}_p$, тогда для модели (1) существуют две 2-периодические p -адические квазимеры Гиббса μ_{h_3} и μ_{h_4} . Здесь $h_i = \sqrt{u_i}$, $i = 3, 4$.

4.2. Случай $J < 0$. В этом случае $|\theta|_p > 1$. Положим

$$D(\theta) = \theta^4(-3 + 2\theta^{-2} + \theta^{-4}).$$

Видно, что $\sqrt{D(\theta)}$ существует тогда и только тогда, когда существует $\sqrt{-3}$. Заметим, что для простых чисел $p \leq 19$ значение $\sqrt{D(\theta)}$ существует только при $p = 7, 13$.

ТЕОРЕМА 7. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $p \in \{2, 3\}$, то не существует периодическая p -адическая квазимера Гиббса.
2. Пусть $p > 3$. Если уравнение $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ не имеет решения в $\mathbb{Q}_p$, то не существует периодическая p -адическая квазимера Гиббса.
3. Пусть $p > 3$ и число x_0 является решением уравнения $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда существуют две 2-периодические p -адические квазимеры Гиббса в том и только том случае, когда уравнение $x^2 - 2x_0 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо в $\mathbb{Q}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\sqrt{D(\theta)}$ существует тогда и только тогда, когда существует $\sqrt{-3}$, мы можем ограничиться случаем, когда уравнение $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо в $\mathbb{Q}_p$. Заметим, что $\sqrt{-3} \notin \mathbb{Q}_p$ при $p \leq 3$.

Пусть $p > 3$ и число x_0 является решением уравнения $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда

$$u_3 = \frac{-1 - p^{4J} + \sqrt{1 + 2p^{4J} - 3p^{8J}}}{2p^{4J}} = \frac{x_0 - 1 + p^{-4J}\varepsilon}{2}, \quad |\varepsilon|_p \leq 1.$$

Отсюда с учетом теоремы 1 следует, что $\sqrt{u_3}$ существует тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 2x_0 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо.

В силу замечания 3 существуют две 2-периодические p -адические квазимеры Гиббса в том и только том случае, когда уравнение $x^2 - 2x_0 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо в $\mathbb{Q}_p$.

Благодарности. Автор благодарен У. А. Розикову и Ф. М. Мухамедову за полезные советы и ряд замечаний.

Список литературы

- [1] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnev, *J. Statist. Phys.*, **79**:1–2 (1995), 473–482.
- [2] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [3] A. Yu. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Mathematics and Its Applications, **427**, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [4] E. Marinari, G. Parisi, *Phys. Lett. B*, **203**:1–2 (1988), 52–54.
- [5] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. Н. Зеленов, *p -Адический анализ и математическая физика*, Физматлит, М., 1994.
- [6] S. Alberverio, W. Karwowski, *Stochastic Processes Appl.*, **53**:1 (1994), 1–22.
- [7] K. Yasuda, *Osaka J. Math.*, **37**:4 (2000), 967–985.
- [8] O. N. Khakimov, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **5**:3 (2013), 194–203.
- [9] У. А. Розиков, О. Н. Хакимов, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 84–92.
- [10] F. M. Mukhamedov, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **16**:1 (2013), 49–87.
- [11] F. M. Mukhamedov, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:3 (2010), 241–251.
- [12] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [13] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухаммедов, У. А. Розиков, *Узб. матем. журн.*, **4** (1998), 23–29.
- [14] Н. Коблиц, *p -Адические числа, p -адический анализ и дзета-функции*, Мир, М., 1981.
- [15] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

Поступила в редакцию 18.10.2013