Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Филиппов, Единое описание космологических и статических решений в аффинных обобщенных теориях гравитации: дуальность вектор–скаляр и ее применения, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 2, 323–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:55:31

© 2013 г.

А. Т. Филиппов*

ЕДИНОЕ ОПИСАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ И СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В АФФИННЫХ ОБОБЩЕННЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ: ДУАЛЬНОСТЬ ВЕКТОН–СКАЛЯРОН И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Приводится краткое описание простейшего класса аффинных теорий гравитации в пространстве-времени старших размерностей с симметричными связностями и его редукций на двумерные полевые теории дилатон-вектонной гравитации. Отличительной чертой данных теорий является присутствие полностью нейтрального массивного (или тахионного) векторного поля (вектона) с существенно нелинейным взаимодействием с дилатонной гравитацией. Отметим, что в дилатон-вектонной гравитации вектонное поле можно согласованным образом заменить новым эффективно массивным скалярным полем (скаляроном), которое взаимодействует с дилатонной гравитацией нестандартным образом. В рамках дуальности вектон–скалярон можно применять методы и результаты стандартной дилатонной гравитации, взаимодействующей с обычными скалярными полями, в более сложной картине теорий дилатон-скаляронной гравитации, эквивалентной дилатон-вектонной гравитации. Представлены модели дилатон-вектонной гравитации, построенные с помощью редукций многомерных аффинных теорий, и получены одномерные динамические системы, одновременно описывающие космологические и статические состояния в любой выбранной калибровке. Представленный подход полностью применим при исследовании статических и космологических решений в многомерных теориях, равно как и в общих одномерных моделях дилатон-скаляронной гравитации. Упор делается на общие и глобальные свойства моделей, на поиск интегралов движения и на анализ структуры пространства решений. В интегрируемых случаях это пространство наглядно представляется графически с помощью “топологического портрета”, напоминающего фазовые портреты динамических систем и выражающего в простом виде глобальные свойства статических и космологических решений, включая горизонты, сингулярности и т. д. Для аналитических аппроксимаций предлагается применить интегральное уравнение, которое хорошо подходит для итераций.

Ключевые слова: модифицированная гравитация, дилатонная гравитация, космология, интегрируемые системы.

DOI: 1010.4231/tmf8539

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: Alexandre.Filippov@jinr.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные данные наблюдений свидетельствуют в пользу того, что теория гравитации Эйнштейна должна быть модифицирована. В совокупности с данными о темной энергии накопленные данные относительно существования инфляции привели к появлению целого ряда таких модификаций (см., например, работы [1]–[10]). Естественные модификации вытекают из идей теории суперструн, однако в силу серьезных математических трудностей, испытываемых современной теорией струн, строго однозначные предсказания относительно конкретных модификаций теории гравитации сформулировать пока не удастся. Более того, само существование темной энергии не было предсказано теорией струн, и ее происхождение в струнном подходе оказывается весьма сложно обнаружить и понять. Проблема темной энергии в теории струн представляется достаточно глубокой задачей, связанной с многими другими сложными задачами квантовой космологии (до сих пор не построенной), но эта задача также приводит к красивым и захватывающим гипотезам, таким как вечная инфляция и мультивселенная (см., например, [11], [12]). С другой стороны, если сначала попытаться найти естественное место для темной энергии в моделях классической космологии, которые неизбежно имеют существенно нелинейную природу и неинтегрируемы, то самым лучшим оказывается вернуться к основам общей теории относительности и проверить некоторые возможности, отброшенные или не обнаруженные ее создателями.

По этой причине более простые модификации гравитации, в которых модифицируется только собственно сектор гравитационных полей, также достаточно популярны (см., например, [13]–[16]). В сущности, эти модификации сводятся к обычной гравитации Эйнштейна с добавлением некоторого числа скалярных бозонов (первый пример такой модификации был предложен в старой теории Йордана–Бранса–Дикке). Основная трудность этого подхода состоит в том, что происхождение таких скалярных бозонов весьма туманно и не существует теоретических закономерностей, фиксирующих вид их взаимодействия с полями гравитации. Разумеется, существуют феноменологические и теоретические ограничения, но в целом спектр этих моделей слишком широк¹⁾. Модификации, предложенные и исследованные в работах [18]–[22], отвечают некоторым принципам геометрической природы, основанным на идее Эйнштейна, сформулированный им в 1923 году²⁾. Согласно этой идее теорию гравитации предлагается строить в неримановом пространстве с симметричной связностью, задаваемой с помощью специального вариационного принципа, основанного на *геометрическом лагранжиане*. Предполагается, что этот лагранжиан представляет собой функцию от обобщенного тензора кривизны Риччи и от других фундаментальных тензоров и варьируется относительно коэффициентов связности. Новая интерпретация и обобщение этого подхода были развиты в работах [19]–[21] для случая произвольной размерности D пространства-времени.

Коэффициенты связности задают симметричную и антисимметричную части тензора Риччи (s_{ij} и a_{ij}) и новый вектор a_i . В предположении, что в чисто геомет-

¹⁾Если ограничиться однородными космологиями, то можно обнаружить, что в размерно редуцированной теории супергравитации (суперструн) возникает множество безмассовых скалярных бозонов, взаимодействующих только с гравитационным полем (см., например, работы [17], [2]).

²⁾Ссылки на эти работы, равно как и на связанные с ними работы Вейля и Эддингтона, можно найти в [18]–[21].

рической теории отсутствуют размерные фундаментальные константы (кроме скорости света, связывающей пространство и время), будем выбирать лагранжианы геометрических теорий, приводящие к безразмерному геометрическому действию. Геометрический вариационный принцип налагает дополнительные ограничения на возможные геометрии и, в частности, устанавливает связь между a_i и a_{ij} . Для того чтобы определить метрический тензор, надо ввести некоторую размерную постоянную. После этого можно найти *физический лагранжиан*, зависящий от этой размерной постоянной и от некоторых безразмерных параметров. Полученная таким образом теория добавляет в стандартную общую теорию относительности темную энергию (космологический член, остающийся в пределе $a_i = a_{ij} = 0$), нейтральное массивное (или тахионное) векторное поле, пропорциональное a_i (*поле вектона*), а после проведения размерной редукции к $D = 4$ добавляет $D - 4$ массивных (или тахионных) скалярных полей.

Дальнейшие свойства теории зависят от конкретного выбора *геометрического лагранжиана*. Получаемую при этом физическую теорию можно описать с помощью соответствующего *эффективного лагранжиана*, зависящего от метрики, вектона и скалярных полей. В геометрической теории отсутствуют размерные константы, в то время как каждый фундаментальный тензор имеет размерность некоторой степени длины (в системе единиц с $c = 1$). Мы предложили рассмотреть класс геометрических лагранжевых плотностей, зависящих от симметричной и антисимметричной компонент тензора Риччи (s_{ij} , a_{ij}) и от фундаментального вектора, получаемого с помощью свертки коэффициентов связности Γ_{ij}^k , т. е. $a_i \sim \Gamma_{ik}^k$. Налагая условие безразмерности на геометрическое “действие” (пространственно-временной интеграл от геометрической лагранжевой плотности), можно перечислить все возможные формы действия (см. работу [19]). Соответствующий лагранжиан можно определить как квадратный корень из произвольной линейной комбинации этих плотностей или как линейную комбинацию их квадратных корней.

Наиболее естественной плотностью такого рода в произвольной размерности оказывается квадратный корень из $\det(s_{ij} + \bar{l}a_{ij})$, где $\bar{l}$ представляет собой число³⁾. Эффективный физический лагранжиан представляет собой сумму стандартного эйнштейновского члена, вектонного массового члена и члена, пропорционального $\det(g_{ij} + lf_{ij})$ в степени $\nu \equiv 1/(D - 2)$, где g_{ij} и f_{ij} – тензоры полей метрики и вектона, сопряженные соответственно s_{ij} и a_{ij} ⁴⁾, l – параметр, связанный с $\bar{l}$. Последний член содержит размерный множитель, который в пределе малого поля f_{ij} переходит в космологическую постоянную. Таким образом, в размерности $D = 4$ получается член, впервые введенный Эйнштейном, но называемый обычно лагранжианом Борна–Инфельда или *бранным* лагранжианом. В размерности $D = 3$ получается теория Эйнштейна–Прока, которая весьма интересна с точки зрения исследований нетривиальных топологий пространства.

Простейшие размерные редукции из пространств размерности $D > 4$ к пространству $D = 4$ приводят к появлению $D - 4$ скалярных полей, что делает полную теорию достаточно сложной даже на классическом уровне. Ее сферически-симметричный сектор описывается значительно более простой теорией $(1 + 1)$ -мерной дилатонной

³⁾Эйнштейн использовал в качестве лагранжиана эддингтонову скалярную плотность $\sqrt{|\det r_{ij}|}$, где $r_{ij} \equiv s_{ij} + a_{ij}$.

⁴⁾Эта необычная конструкция, введенная Эйнштейном, описана и обобщена в работах [18]–[21], см. также приложение Б к настоящей работе.

гравитации, взаимодействующей с одним массивным векторным и несколькими скалярными полями. Эта дилатонная гравитация, взаимодействующая с вектоном и массивными скалярами, равно как и ее дальнейшие редукции к одномерным “космологическим” и “статическим” теориям, были впервые сформулированы в работах [18]–[21]; в настоящей работе мы начинаем систематические исследования общих свойств и решений данных теорий. Эти исследования несколько упрощаются, если преобразовать поле вектона в новое массивное скалярное поле, что возможно (на массовой поверхности) в рамках двумерных редукций⁵⁾. В отличие от обычных скалярных полей материи, скалярон имеет другое взаимодействие с гравитацией и может содержать неправильные знаки при кинетическом члене (фантом) или при массовом члене (тахсион). Тем не менее некоторые общие методы, применяемые в моделях дилатон-скалярной гравитации, находят успешное применение в дилатонной гравитации, взаимодействующей с необычными скалярными полями. Таким образом, основными для нас являются следующие задачи: существенная модернизация имеющихся методов, направленная на построение различных схем приближений, понимание наиболее важных качественных свойств глобальных решений и поиск возможных интегрируемых приближений в простых одномерных редукциях общей теории.

В настоящей работе рассматривается простейший *геометрический лагранжиан*

$$\mathcal{L}_{\text{geom}} = \sqrt{-\det(s_{ij} + \bar{l}a_{ij})} \equiv \sqrt{-\Delta_s}, \quad (1)$$

где выбран отрицательный знак, поскольку $\det(s_{ij}) < 0$ (в силу локальной лоренц-инвариантности), и естественно предположить, что это условие остается справедливым для $\det(s_{ij} + \bar{l}a_{ij})$ (это обеспечивает воспроизведение общей теории относительности Эйнштейна с космологической постоянной в пределе $\bar{l} \rightarrow 0$). Следуя логике работы [19] или применяя результаты, описанные в приложении А, можно вывести соответствующий *физический лагранжиан*

$$\mathcal{L}_{\text{phys}} = \sqrt{-g}[-2\Lambda[\det(\delta_i^j + lf_i^j)]^\nu + R(g) - m^2 g^{ij} a_i a_j], \quad \nu \equiv \frac{1}{D-2}, \quad (2)$$

который можно варьировать относительно метрики и векторного поля; m^2 представляет собой параметр, зависящий от выбранной модели аффинной геометрии и от D (см. [18]–[21]). Этот параметр может быть положительным или отрицательным, и мы часто используем обозначение $m^2 \equiv \mu$. В отсутствие поля вектона получается обычная гравитация Эйнштейна с космологической постоянной. При размерной редукции из размерности $D \geq 5$ в $D = 4$ получается лагранжиан, описывающий вектон a_i , $f_{ij} \sim \partial_i a_j - \partial_j a_i$ и $D - 4$ скалярных полей a_k , $k = 4, \dots, D$. Заметим, что в размерности $D = 3$ лагранжиан (2) билинеен относительно поля вектона, и в приближении $a_i = 0$ он переходит в трехмерную гравитацию с космологическим членом. Трехмерная гравитация исследовалась многими авторами (см., например, [23], [24] и литературу к этим работам), и это может существенно упростить исследование решений в новой теории.

⁵⁾В дополнение к некоторым формальным упрощениям, это преобразование может пролить новый свет на некоторые теоретические задачи, особенно в космологии. В самом деле, в новых космологических теориях появляются различные экзотические скалярные поля (инфлатоны, фантомы, тахионы), которые обычно вводятся *ad hoc*. В рассматриваемых здесь моделях такие “частицы” появляются как эффективные поля в последовательном теоретическом подходе.

Рассмотрим сначала простейшую сферически-симметричную размерную редукцию из D -мерной теории (2) к двумерной дилатон-вектонной гравитации, а затем редуцируем ее дальше до одномерной статической или космологической теории. На следующем этапе рассмотрим цилиндрически-симметричные редукции D -мерной теории к более сложным двумерным теориям дилатонной гравитации, взаимодействующим с несколькими скалярными полями. Для простоты рассмотрим эту размерную редукцию только в размерностях $D = 4$ и $D = 3$. Хорошо известно, что в случае $D = 4$ помимо дилатона возникают “геометрические” скалярные поля σ -модельного типа и чисто калибровочные векторные поля, задающие эффективный потенциал, введенный в работе [25]. Эти двумерные скаляры выглядят как скалярные поля “материи”, полученные с помощью размерной редукции из теории супергравитации в старшей размерности, и они также оказываются безмассовыми на классическом уровне. Однако в общем случае помимо σ -модельного взаимодействия скалярных полей имеется также эффективный потенциал, зависящий от скалярных полей и от “зарядов” геометрических чисто калибровочных полей. Такая теория оказывается весьма сложной и неинтегрируемой даже после редуцирования к размерностям $1+0$ или $0+1$ (см. [25]). Добавление взаимодействия с вектоном делает теорию еще более сложной, и рассмотрение в настоящей работе ограничивается только простейшими вариантами таких теорий.

Мы обсуждаем здесь в основном теории в низших размерностях ($D = 1, 2, 3, 4$), что позволяет нам изучить некоторые частные решения реалистических теорий высокой размерности. Мы сосредоточимся на математических проблемах, оставляя пока в стороне физический смысл полученных решений. Заметим также, что в контексте современных идей инфляции, мультивселенных и пр. не удастся теоретически определить основные параметры фундаментальной теории гравитации. В частности, неизвестны ни знак, ни значение космологической постоянной, равно как и других параметров, задающих масштаб длины. Даже размерность и сигнатуру самого пространства-времени необходимо рассматривать как свободные параметры, которые определяются в контексте конкретного сценария эволюции мультивселенной или же исходя из антропоморфных соображений. На практике это означает, что теории с произвольными значениями параметров в произвольном пространстве-времени должны рассматриваться как равнозначно интересные, по крайней мере с теоретической точки зрения.

2. РАЗМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Опишем кратко основные редукции модели (2) в размерностях $D = 3, 4$ ⁶⁾. Из-за ограниченности объема статьи мы остановимся только на основных моментах теории. Прежде всего, рассмотрим лагранжиан достаточно общего вида в D -мерном сферически-симметричном случае ($x^0 = t$, $x^1 = r$),

$$ds_D^2 = ds_2^2 + ds_{D-2}^2 = g_{ij} dx^i dx^j + \varphi^{2\nu} d\Omega_{D-2}^2, \quad (3)$$

⁶⁾Подробное рассмотрение последовательных размерных редукций общего вида гравитации Эйнштейна из размерности $D = 4$ в размерность $D = 1$ содержится в работах [26], [27]. Обзор стандартных сферически- и цилиндрически-симметричных редукций и решений дается в работе [28].

где $\nu \equiv (D - 2)^{-1}$. Обычная сферическая редукция лагранжиана (2) приводит к эффективному двумерному лагранжиану⁷⁾, первые три члена которого описывают обычную сферически-редуцированную гравитацию Эйнштейна:

$$\mathcal{L}_D^{(2)} = \sqrt{-g}[\varphi R(g) + k_\nu \varphi^{1-2\nu} + W(\varphi)(\nabla\varphi)^2 + X(\varphi, \mathbf{f}^2) - m^2\varphi\mathbf{a}^2]. \quad (4)$$

Здесь вектор $a_i(t, r)$ имеет только две ненулевые компоненты a_0, a_1 , а вектор f_{ij} — только одну независимую компоненту $f_{01} = a_{0,1} - a_{1,0}$; другие обозначения имеют следующий вид: $\mathbf{a}^2 \equiv a_i a^i \equiv g^{ij} a_i a_j$, $\mathbf{f}^2 \equiv f_{ij} f^{ij}$, $k_\nu \equiv k(D - 2)(D - 3)$, $W(\varphi) = (1 - \nu)/\varphi$ и⁸⁾

$$X(\varphi, \mathbf{f}^2) \equiv -2\Lambda\varphi \left[1 + \frac{1}{2}\lambda^2 \mathbf{f}^2 \right]^\nu, \quad (5)$$

где параметр λ связан с безразмерным параметром l в выражении (2), но $[\lambda] = L$.

Иногда полезно избавиться от кинетического члена дилатона с помощью преобразования Вейля, имеющего в нашем случае следующий вид ($w'(\varphi)/w(\varphi) = W(\varphi)$):

$$g_{ij} = \hat{g}_{ij} w^{-1}(\varphi), \quad w(\varphi) = \varphi^{1-\nu}, \quad \mathbf{f}^2 = w^2 \hat{\mathbf{f}}^2, \quad \mathbf{a}^2 = w \hat{\mathbf{a}}^2. \quad (6)$$

Применяя это преобразование к (4) и опуская шляпки над переменными, найдем преобразованный лагранжиан:

$$\hat{\mathcal{L}}_D^{(2)} = \sqrt{-g} \left[\varphi R(g) + k_\nu \varphi^{-\nu} - 2\Lambda\varphi^\nu \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2 \varphi^{2(1-\nu)} \mathbf{f}^2 \right)^\nu - m^2 \varphi \mathbf{a}^2 \right]. \quad (7)$$

При $D = 3$ имеем $\nu = 1$, $k_\nu = 0$, преобразование Вейля тождественно, а лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_3^{(2)} = \sqrt{-g} \varphi \left[R(g) - 2\Lambda - \lambda^2 \mathbf{f}^2 - m^2 \mathbf{a}^2 \right]. \quad (8)$$

Эти двумерные редукции существенно проще, чем порождающие их теории старших размерностей. В частности, можно показать, что полевую теорию массивного вектона можно преобразовать в модель дилатон-скаляронной гравитации, оперировать с которой намного проще. К сожалению, эти модели дилатон-скаляронной гравитации, равно как и их дальнейшие редукции к размерности $D = 1$ (статические и космологические редукции), также существенно неинтегрируемы. Хорошо известно, что безмассовая модель, которая описывается чисто дилатонной гравитацией, оказывается интегрируемой на классическом уровне (см., например, работы [29]). Принимая это во внимание, попробуем найти некоторые дополнительные интегралы движения в похожих вектонных моделях.

Следующую упрощенную теорию получим в *цилиндрически-симметричном* случае. Рассмотрим только размерности $D = 3$ и $D = 4$. Цилиндрическая редукция общего вида подробно рассматривалась в работе [25], и здесь мы только опишем

⁷⁾Предполагается, что поля φ, a_i безразмерны, в то время как $[t] = [r] = L$, и поэтому $[f_{ij}] = L^{-1}$, $[R] = [k_\nu] = [X] = [m^2] = L^{-2}$. Более подробное рассмотрение дается в приложении Б.

⁸⁾Выражение для определителя в формуле (2) в терминах величин f_{ij} в размерности $D = 4$, представленное в работе [19], содержит также член четвертого порядка относительно поля вектона. Нетрудно видеть, что как в сферической, так и в цилиндрической редукциях (см. рассуждения в конце этого раздела) этот член обращается в нуль, и выражение (5) тем самым оказывается справедливым. На самом деле оно справедливо в произвольной размерности D .

основные результаты. Наиболее общий цилиндрический лагранжиан можно вывести, применив общую редукцию Калуцы в размерности $D = 4$. Соответствующую метрику можно представить в виде

$$ds_4^2 = (g_{ij} + \varphi \sigma_{mn} \varphi_i^m \varphi_j^n) dx^i dx^j + 2\varphi_{im} dx^i dy^m + \varphi \sigma_{mn} dy^m dy^n, \quad (9)$$

где $i, j = 0, 1, m, n = 2, 3$, все коэффициенты метрики зависят только от x -координат (t, r) , а $y^m = (\varphi, z)$ – координаты двумерного цилиндра (тора). Заметим, что φ играет роль дилатона, а σ_{mn} ($\det \sigma_{mn} = 1$) – так называемое σ -поле. Редукцию эйнштейновской части лагранжиана в четырехмерном пространстве, $\sqrt{-g_4} R_4$, можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{4c}^{(2)} = \sqrt{-g} \left[\varphi R(g) + \frac{1}{2\varphi} (\nabla \varphi)^2 - \frac{\varphi}{4} \text{tr}(\nabla \sigma \sigma^{-1} \nabla \sigma \sigma^{-1}) - \frac{\varphi^2}{4} \sigma_{mn} \varphi_{ij}^m \varphi^{nij} \right], \quad (10)$$

где $\varphi_{ij}^m \equiv \partial_i \varphi_j^m - \partial_j \varphi_i^m$. Абелевы калибровочные поля φ_i^n не эволюционируют, и их вкладом обычно пренебрегают. В работе [25] было предложено учесть вклад этих полей с помощью решения их уравнений движения и построения соответствующего эффективного потенциала (подобно тому, как это сделано ниже для сферически-симметричной векторной теории гравитации). Вводя удобную параметризацию для σ_{mn} ,

$$\sigma_{22} = e^\eta \text{ch } \xi, \quad \sigma_{33} = e^{-\eta} \text{ch } \xi, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = \text{sh } \xi,$$

можно исключить калибровочные поля φ_i^m и получить эффективное действие

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \sqrt{-g} \left[\varphi R(g) + \frac{1}{2\varphi} (\nabla \varphi)^2 - \frac{\varphi}{2} [(\nabla \xi)^2 + (\text{ch } \xi)^2 (\nabla \eta)^2] + V_{\text{eff}}(\varphi, \xi, \eta) \right]. \quad (11)$$

Первые три члена в этом выражении стандартны, а эффективный геометрический потенциал

$$V_{\text{eff}}(\varphi, \xi, \eta) = -\frac{\text{ch } \xi}{2\varphi^2} [Q_1^2 e^{-\eta} - 2Q_1 Q_2 \text{th } \xi + Q_2^2 e^\eta] \quad (12)$$

зависит от двух новых произвольных вещественных постоянных Q_m , которые можно называть *зарядами абелевых геометрических калибровочных полей* φ_i^m . Эта форма представления действия оказывается более удобной при записи уравнений движения, при дальнейших редукциях к размерностям $1+0$ и $0+1$, а также при анализе специальных случаев, таких как $Q_1 Q_2 = 0$, $\xi \eta \equiv 0^9$.

Статическое решение теории (12) с $Q_1 Q_2 \neq 0$ содержит горизонты, в то время как точные решения, обсуждаемые в работе [25] при $Q_1 = Q_2 = 0$ и при ненулевых σ -полях ξ и η , вообще не содержат горизонтов в согласии с общей теоремой из работ [29]. Интересный специальный случай получается, если выбрать $Q_1 \neq 0$, $Q_2 = 0$, $\xi \equiv 0$. Тогда лагранжиан (11) приводит к стандартной дилатонной гравитации, взаимодействующей со скалярным полем η , потенциал которой зависит как от скалярного поля, так и от дилатона. Если $Q_1 \neq 0$, то имеет место статическое

⁹Уравнения движения в этом случае близки к уравнениям Эйнштейна–Розена для нелинейных гравитационных волн, которые можно получить, если положить $Q_1 = Q_2 = 0$. При $Q_1 Q_2 \neq 0$ поля ξ и η не могут быть тождественно равны нулю.

решение с горизонтом, который исчезает при обращении в нуль величины Q_1 . Разумеется, горизонт также существует и в чисто дилатонной гравитации, в которой $\xi = \eta = 0$.

В работах [29] были подробно изучены модели, потенциалы которых не зависят от скалярного поля. В настоящей работе мы покажем, что интересные результаты удастся получить и в более общих моделях с *мультипликативными* потенциалами $V(\varphi, \psi) = v_1(\varphi)v_2(\psi)$. В частности, будет показано, что один из интегралов движения дилатонной гравитации, взаимодействующей с безмассовыми скалярами, выведенный в работах [29], может также существовать в некоторых моделях с мультипликативными потенциалами. Эти модели представляют интерес с точки зрения настоящего исследования.

Видно, что цилиндрическое действие общего вида оказывается чрезвычайно сложной двумерной теорией, и даже его одномерные редукции оказываются достаточно сложными и в общем случае неинтегрируемыми. Добавление векторного сектора не делает ситуацию ни более простой, ни более ясной. Более понятным оказывается случай трехмерного цилиндрического пространства-времени. Метрика в этом случае получается с помощью очевидной редукции выражения (9):

$$ds_3^2 = (g_{ij} + \varphi_i \varphi_j) dx^i dx^j + 2\varphi_i dx^i dy + \varphi dy^2, \quad (13)$$

и соответствующий эйнштейновский лагранжиан имеет простой вид:

$$\mathcal{L}_{3c}^{(2)} = \sqrt{-g\varphi} \left\{ R(g) - \frac{\varphi}{4} \varphi_{ij} \varphi^{ij} \right\}, \quad \varphi_{ij} \equiv \varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}. \quad (14)$$

Применяя уравнения движения для φ_{ij} и вводя соответствующий эффективный потенциал (см. [25] и более общий вывод ниже), получим следующую двумерную дилатонную гравитацию:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \sqrt{-g} \{ \phi R(g) - 8Q^2 \phi^{-3} \}, \quad \phi \equiv \sqrt{\varphi}. \quad (15)$$

В отличие от цилиндрической редукции четырехмерной чистой теории гравитации Эйнштейна, соответствующей потенциалу $V_{\text{eff}} = 0$ в (11), эта теория содержит горизонт и может быть легко проинтегрирована.

Нетрудно включить векторную составляющую в цилиндрически-симметричные лагранжианы. На самом деле члены $-m^2 \varphi a^2$, $X(\varphi, \mathbf{f}^2)$ в выражении (4) инвариантны и имеют один и тот же вид в произвольной размерности. Поэтому можно просто добавить выражение (11), (14) к лагранжианам теории гравитации и в случае цилиндрической симметрии. Заметим, однако, что существует и другая редукция векторного потенциала a_i . Например, в отличие от случая сферической симметрии, эти поля могут оставаться ненулевыми при $i = 0, 1, 2$, и соответственно $e_1 \equiv f_{01} \equiv \partial_0 a_1 - \partial_1 a_0 \neq 0$, $e_2 \equiv f_{02} \equiv \partial_0 a_2 - \partial_2 a_0 \neq 0$, $h_3 \equiv f_{12} \equiv \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 \neq 0$ ¹⁰⁾. Видно, что составляющая $a_2 \equiv a_\varphi$ векторного поля a_i ведет себя как дополнительное скалярное поле, и в дополнение к двумерному векторному полю (a_0, a_1) мы можем получить до трех новых скалярных полей материи a_2, ξ, η , взаимодействующих достаточно

¹⁰⁾Здесь $e_i \equiv a_{0i}$, $h_i \equiv \varepsilon_{ijk} a_{jk}$. В диагональной метрике $g_{ij} = g_i \delta_{ij}$ член четвертого порядка в определителе в выражении (2) пропорционален $(e_i h_i)^2 \exp(\sum 2g_k)$ и явно обращается в нуль. Это рассуждение, очевидно, справедливо в произвольной размерности.

сложным образом с дилатонной гравитацией. Это означает, что исследование решений с цилиндрической симметрией оказывается более сложным по сравнению с исследованием сферически-симметричных решений. Наше дальнейшее обсуждение применимо к простейшему случаю двух потенциалов a_0, a_1 с одним полем f_{01} .

3. ДУАЛЬНОСТЬ ВЕКТОН–СКАЛЯРОН В ДВУМЕРНОЙ ВЕКТОННОЙ ТЕОРИИ

В размерности $D = 2$ все поля (векторные, спинорные и т. д.) практически эквивалентны скалярным полям. Эта эквивалентность хорошо известна в случае безмассовых абелевых калибровочных полей (см., например, [29]–[32] и литературу к этим работам). Цель настоящего раздела состоит в построении стандартного отображения массивных абелевых векторных полей в скалярные поля. Мы не будем приводить наиболее общие результаты в этом направлении, намеренно ограничив рассмотрение случаем дилатон-вектонной гравитации, взаимодействующей со скалярными полями “материи”. Этот случай включает в себя все модели, упомянутые в предыдущих разделах. Предположим, что вместо стандартного члена абелева калибровочного поля $X(\varphi, \psi)\mathbf{f}^2$ лагранжиан содержит взаимодействие более общего вида между калибровочным полем $f_{ij} = \partial_i a_j - \partial_j a_i$ и дилатонным и скалярным полями $X(\varphi, \psi; \mathbf{f}^2)$, где $\mathbf{f}^2 \equiv f_{ij}f^{ij}$. С помощью преобразования Вейля можно записать лагранжиан в размерности $D = 2$ достаточно общего вида в так называемой вейлевской форме,

$$\mathcal{L}^{(2)} = \sqrt{-g} \left[\varphi R + V(\varphi, \psi) + X(\varphi, \psi; \mathbf{f}^2) + Z_a(\varphi)\mathbf{a}^2 + \sum Z(\varphi, \psi)(\nabla\psi)^2 \right], \quad (16)$$

в которой теперь отсутствует кинетический член дилатонного поля, пропорциональный $\varphi^{-1}(\nabla\varphi)^2$, а члены V и Z представляют собой потенциалы и кинетические члены скалярных полей (подобно членам в выражениях (11) и (12)). Здесь нет необходимости уточнять число скалярных полей материи, поэтому индексы суммирования для полей ψ и их функций Z опущены. Для полей с положительной кинетической энергией все функции Z в выражении (16) отрицательны и обычно пропорциональны φ ; будем называть эти функции *полями обычной материи*.

В работе [30] рассматривался случай безмассовой теории $Z_a \equiv 0$ и было предложено использовать вместо (16) эффективный лагранжиан, не содержащий абелевы калибровочные поля (см. подробное доказательство в работах [31], [32]). В настоящей работе этот подход обобщается на случай массивного вектона и показывается, что векторное поле можно эффективно заменить на скалярное, называемое здесь *полем скалярона* и обозначаемое через $q(t, r)$. Это означает, что уравнения движения, задаваемые лагранжианом (16), можно получить из лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \sqrt{-g} \left[\varphi R + V(\varphi, \psi) + X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q) + Z_q(\varphi)(\nabla q)^2 + \sum Z(\varphi, \psi)(\nabla\psi)^2 \right], \quad (17)$$

если применить формально обратимое преобразование из вектонных полей a_i, f_{ij} в скаляронные поля $\partial_i q, q$. Такое преобразование можно построить в полной аналогии с безмассовым случаем.

Рассмотрим сначала уравнения векторных полей, получаемые из лагранжиана (16):

$$2\partial_j(\sqrt{-g}X'f^{ij}) = Z_a(\varphi)\sqrt{-g}a^i, \quad X' \equiv X'(\varphi, \psi; \mathbf{f}^2) \equiv \frac{\partial X}{\partial \mathbf{f}^2}. \quad (18)$$

Здесь удобно переписать лагранжиан и уравнения в координатах светового конуса:

$$ds^2 = -4h(u, v) du dv, \quad \sqrt{-g} = 2h, \quad f_{uv} \equiv a_{u,v} - a_{v,u}, \quad -2\mathbf{f}^2 = \left(\frac{f_{uv}}{h}\right)^2. \quad (19)$$

Прежде чем перейти к лагранжиану в терминах светового конуса, необходимо вывести ограничения на энергию и импульс с использованием общих координат. Оставляя только одно вспомогательное поле ψ , имеем (см., например, [18], [29]–[34])

$$h\partial_i\left(\frac{\partial_i\varphi}{h}\right) = Z_a(\varphi)a_i^2 + Z(\varphi, \psi)(\partial_i\psi)^2, \quad i = u, v. \quad (20)$$

Другие уравнения движения можно вывести из лагранжиана, преобразованного к переменным светового конуса,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{(2)} = \varphi\partial_u\partial_v\ln|h| + h[V(\varphi, \psi) + X(\varphi, \psi, \mathbf{f}^2)] - Z_a(\varphi)a_u a_v - Z(\varphi, \psi)\partial_u\psi\partial_v\psi, \quad (21)$$

просто с помощью варьирования по h , ψ , $\mathbf{f}^2$, φ . Среди получаемых таким образом уравнений наиболее важными оказываются уравнения

$$\partial_u\partial_v\varphi + h\left[X(\varphi, \psi, \mathbf{f}^2) + h\frac{\partial X}{\partial \mathbf{f}^2}\frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial h}\right] \equiv \partial_u\partial_v\varphi + h\left[X - 2\mathbf{f}^2\frac{\partial X}{\partial \mathbf{f}^2}\right] = 0, \quad (22)$$

которые позволяют определить эффективный потенциал $X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q)$, и уравнения вектона

$$\partial_u(h^{-1}X'f_{uv}) = -Z_a(\varphi)a_u, \quad \partial_v(h^{-1}X'f_{uv}) = Z_a(\varphi)a_v, \quad (23)$$

эквивалентные уравнениям (18). Преобразуем их теперь в стандартное уравнение для нового скалярного поля $q(u, v)$, которое можно определить как в координатах светового конуса, так и в общих координатах:

$$q(u, v) \equiv h^{-1}X'f_{uv}, \quad 2\sqrt{-g}f^{ij}X' \equiv \varepsilon^{ij}q, \quad i, j = 0, 1. \quad (24)$$

Нетрудно понять, что определенное таким образом скалярное поле q также инвариантно относительно преобразований Вейля (6). В рамках этого определения можно рассматривать $\mathbf{f}^2$ как функцию от q , которая получается при решении уравнения (24). Обозначив это решение через $z(q)$ и выразив f_{uv}/h в терминах $\mathbf{f}^2$ с помощью (19), получим важное соотношение:

$$2z(q) = -\left(\frac{q}{\bar{X}'}\right)^2, \quad \bar{X}' \equiv \frac{\partial}{\partial z(q)}X[\varphi, \psi; z(q)]. \quad (25)$$

Вернувшись к уравнению (22), обнаружим, что выражение в квадратных скобках с заменой $\mathbf{f}^2$ на $z(q)$ на самом деле есть не что иное, как *эффективный потенциал* $X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q)$. Для него имеются несколько форм записи, позволяющие вывести одни

и те же уравнения движения для полей h, φ, ψ, q . В работах [31], [32] нами были получены два эквивалентных выражения для X_{eff} с помощью (22) и (25):

$$X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q) = X[\varphi, \psi; z(q)] - 2z(q)\bar{X}' = X[\varphi, \psi; z(q)] + \frac{q^2}{\bar{X}'[\varphi, \psi; z(q)]}. \quad (26)$$

Из условий (25) и (26) мы также получили наиболее компактное и красивое представление:

$$X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q) = X(\varphi, \psi; z) + q\sqrt{-2z}, \quad (27)$$

где $z(q)$ намеренно заменено на z . Причина этого в том, что

$$\partial_q X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q) = \left(\bar{X}' - \frac{q}{\sqrt{-2z}} \right) \partial_q z(q) + \sqrt{-2z} = \sqrt{-2z}, \quad (28)$$

как следует из уравнения (25). Теперь можно легко записать уравнение для q . С учетом (23), (24) получим

$$a_u(u, v) = -Z_a^{-1}(\varphi)\partial_u q(u, v), \quad a_v(u, v) = Z_a^{-1}(\varphi)\partial_v q(u, v), \quad (29)$$

$$\partial_v(Z_a^{-1}\partial_u q) + \partial_u(Z_a^{-1}\partial_v q) = -f_{uv}(q) = -\frac{hq}{\bar{X}'} = -h\partial_q X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q). \quad (30)$$

Последнее уравнение для $q(u, v)$ можно вывести из лагранжиана (17), если положить $Z_q = Z_a^{-1}$. Обычно $Z_a = -m^2\varphi$, и в этом случае кинетический член скалярона имеет необычный вид:

$$Z_q(\nabla q)^2 = Z_a^{-1}(\nabla q)^2 = \frac{(\nabla q)^2}{-m^2\varphi}. \quad (31)$$

Нетрудно вывести все уравнения движения с помощью эффективного лагранжиана (17), в котором X_{eff} и Z_q задаются выражениями (27) и (31), и мы приводим эти выражения здесь для удобства ссылок в дальнейшем. В дополнение к полученным выше соотношениям необходимо использовать следующие легко проверяемые соотношения:

$$\partial_h X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q) = 0, \quad \partial_\varphi X_{\text{eff}} = \partial_\varphi X(\varphi, \psi, q), \quad \partial_\psi X_{\text{eff}} = \partial_\psi X(\varphi, \psi, q).$$

Первое тождество следует непосредственно из приведенных выше определений. В действительности оно представляет собой основное свойство потенциала X_{eff} , и его можно использовать в качестве определения потенциала X_{eff} . Два других тождества выводятся по аналогии с уравнением (28).

Определим полный эффективный потенциал:

$$U(\varphi, \psi, q) \equiv V(\varphi, \psi) + X_{\text{eff}}(\varphi, \psi, q). \quad (32)$$

Запишем сначала эффективный лагранжиан и уравнения связей в версии переменных светового конуса:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \varphi\partial_u\partial_v \ln|h| + hU(\varphi, \psi, q) - Z_q(\varphi)\partial_u q\partial_v q - Z(\varphi, \psi)\partial_u\psi\partial_v\psi, \quad (33)$$

$$h\partial_i\left(\frac{\partial_i\varphi}{h}\right) - Z_q(\varphi)(\partial_i q)^2 - Z(\varphi, \psi)(\partial_i\psi)^2 = 0, \quad i = u, v. \quad (34)$$

Оставшиеся уравнения имеют тот же вид, что и в обычной дилатонной гравитации, взаимодействующей со скалярными полями¹¹⁾:

$$\partial_u \partial_v \varphi + hU(\varphi, \psi, q) = 0, \quad (35)$$

$$\partial_u (Z_q \partial_v q) + \partial_v (Z_q \partial_u q) + h \partial_q U(\varphi, \psi, q) = 0, \quad (36)$$

$$\partial_u (Z \partial_v \psi) + \partial_v (Z \partial_u \psi) = \partial_\psi [-hU + Z(\varphi, \psi) \partial_u \psi \partial_v \psi], \quad (37)$$

$$\partial_u \partial_v \ln |h| = \partial_\varphi [-hU + Z_q(\varphi) \partial_u q \partial_v q + Z(\varphi, \psi) \partial_u \psi \partial_v \psi]. \quad (38)$$

Одно из последних трех уравнений выполняется для всех решений системы из оставшихся пяти уравнений. Условие энергетической поверхности, представляющее собой сумму двух условий (34), играет специальную роль в гамильтоновой формулировке Арновитта–Дезера–Мизнера [35]. Здесь оставим в стороне эти тонкости, которые будут прояснены при рассмотрении одномерных редукций этой двумерной квазилинейной системы со связями. Структура этой системы позволяет найти некоторые интегрируемые классы, если применить упрощающие предположения относительно потенциалов U и Z . Для некоторых мультиэкспоненциальных потенциалов U и постоянных потенциалов Z существуют интегрируемые системы, связанные с системами Лиувилля и Тоды–Лиувилля (см. [36], [37], [33]). Случай чистой теории Лиувилля был полностью решен, но в случае системы Тоды–Лиувилля трудно найти точное аналитическое решение двумерных уравнений связи даже в простейшем случае $u_1 \oplus su_2$. Эту задачу тем не менее оказывается нетрудно решить в одномерном (статическом или космологическом) случае.

Для сферически-симметричных лагранжианов в размерностях $D = 3$ и $D = 4$ в вейлевской системе отсчета (см. соответственно (8) и (7)) можно легко вывести эффективный потенциал $\hat{U} \equiv U/w(\varphi)$ и, таким образом, найти потенциал (32):

$$U(\varphi, q) = \hat{U}(\varphi, q) = -2\Lambda\varphi \left[1 + \frac{q^2}{4\lambda^2 \Lambda^2 \varphi^2} \right], \quad D = 3, \quad (39)$$

$$U(\varphi, q) = \sqrt{\varphi} \hat{U}(\varphi, q) = -2\Lambda\varphi \left[1 + \frac{q^2}{\lambda^2 \Lambda^2 \varphi^2} \right]^{1/2} + 2k, \quad D = 4. \quad (40)$$

Напомним, что потенциал Z_q не зависит от D , $Z_q = -1/m^2 \varphi$ (см. (31)).

В работе [18] утверждалось, что даже одномерная космологическая редукция чисто скалярной теории с потенциалом (39) оказывается неинтегрируемой. Таким образом, можно сосредоточиться на поиске приближенных потенциалов, позволяющих найти класс аналитических решений, достаточно широкий для того, чтобы можно было восстановить точные решения с помощью процедуры итераций. Например, потенциал (40) при больших q асимптотически имеет весьма простой вид; в стандартной системе отсчета имеем $U = -2q/\lambda + \dots$. Как будет показано, это асимптотическое выражение справедливо в размерностях $D > 3$. С другой стороны, поведение зависящей от q части потенциала U при малых q задается формулой (39), если умножить член порядка q^2 на $D - 2$. Это свойство универсальности позволяет в дальнейшем считать выражения (39), (40) потенциалами скалярона общего вида.

¹¹⁾Ниже мы также используем обозначение $\ln |h| \equiv F$, $h \equiv e^F$, где $\epsilon = +1$ для космологических решений и $\epsilon = -1$ для статических решений.

4. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ

В настоящей работе рассматриваются только простейшие редукции двумерной теории и не рассматриваются одномерные волны, исследованные в наших предыдущих работах [30]–[33], [37]. Простейшие редуцированные уравнения с фиксированной калибровкой можно непосредственно вывести, если предположить, что в уравнениях светового конуса (33)–(38) поля h, φ, q, ψ зависят от одной переменной, которую мы обозначаем $\tau \equiv u + v$. В случае космологических решений эта переменная отождествляется с переменной времени, $\tau = t$, а в случае статических решений, в том числе черных дыр, эта переменная оказывается пространственной переменной, $\tau = r$. Единственное различие между космологическими и статическими решениями заключается в знаке метрики, $h_c > 0$, $h_s < 0$.

В наших исследованиях черных дыр и космологий применяется диагональная метрика общего вида:

$$ds_2^2 = e^{2\alpha(t,r)} dr^2 - e^{2\gamma(t,r)} dt^2. \quad (41)$$

Тогда статические и космологические редукции двумерной теории вектона (17) можно описать лагранжианом (при $Z(\varphi, \psi) = -\varphi$)

$$\varepsilon \mathcal{L}_v^{(1)} = e^{\varepsilon(\alpha-\gamma)} \varphi \left[\dot{\psi}^2 - 2\dot{\alpha}_\varepsilon \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} - (1-\nu) \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right)^2 \right] - e^{\varepsilon(\gamma-\alpha)} \mu \varphi a_\varepsilon^2 + \varepsilon e^{\alpha+\gamma} \left[V + X(\mathbf{f}^2) \right]. \quad (42)$$

Здесь опущена возможная зависимость потенциалов V и X от φ и ψ , было введено обозначение $Z_a \equiv -\mu\varphi \equiv m^2$ и $\varepsilon = +, -$. Все поля зависят от $\tau = t$ ($\varepsilon = +$) или от $\tau = r$ ($\varepsilon = -$). Наконец, получим

$$a_+ = a_1(\tau), \quad a_- = a_0(\tau), \quad \alpha_+ \equiv \alpha, \quad \alpha_- \equiv \gamma, \quad \dot{\alpha}_\varepsilon = \frac{d}{d\tau} \alpha_\varepsilon, \quad \dot{a} = \frac{d}{d\tau} a.$$

Видно, что космологический и статический лагранжианы в основном совпадают, единственное различие состоит в знаках потенциального члена и экспоненты метрики. Так как кинетический член зависит лишь от $\dot{\alpha}_\varepsilon$, множитель потенциального члена $l_\varepsilon \equiv e^{\alpha-\varepsilon}$ оказывается множителем Лагранжа, вариация относительно которого порождает уравнение связи, которое эквивалентно обращению в нуль гамильтониана. В силу неявной зависимости величины $\mathbf{f}^2$ от l_ε гораздо более удобным представляется сначала применить каноническую формулировку, а затем выбрать подходящий множитель Лагранжа. Конечно, можно следовать процедуре, описанной в предыдущем разделе, но канонический подход оказывается более простым как с технической, так и с концептуальной точки зрения.

Построим эффективный гамильтониан и лагранжиан для вектонной части лагранжиана (42),

$$\mathcal{L}_a \equiv hX(\mathbf{f}^2) - \tilde{\mu}\varphi a^2; \quad \tilde{\mu} = e^{\varepsilon(\gamma-\alpha)}\mu, \quad h = \varepsilon e^{\alpha+\gamma}. \quad (43)$$

Учитывая предыдущие результаты, определим переменную y и найдем импульс p_a :

$$\frac{1}{2}\lambda^2\mathbf{f}^2 = -\lambda^2\left(\frac{\dot{a}}{h}\right)^2 = -y^2, \quad \dot{a} \equiv \frac{1}{\lambda}hy, \quad p_a \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_a}{\partial\dot{a}} = \lambda\frac{\partial X}{\partial y}, \quad (44)$$

где последнее уравнение неявно определяет $y(p_a)$. Это позволяет записать частичный гамильтониан:

$$\mathcal{H}_a(p_a, a) \equiv p_a \dot{a} - \mathcal{L}_a = -h \left[X - y \frac{\partial X}{\partial y} \right] + \tilde{\mu} \varphi a^2 \equiv -h X_{\text{eff}} + \tilde{\mu} \varphi a^2. \quad (45)$$

В этом выражении потенциал X_{eff} по существу совпадает с эффективным потенциалом, выведенным в предыдущем разделе, но он теперь зависит от φ, ψ и $y(p_a)$. Применив самое простое каноническое преобразование

$$p_a \rightarrow -2q, \quad a \rightarrow \frac{p}{2}, \quad X_{\text{eff}}(p_a) \rightarrow X_{\text{eff}}(-2q), \quad (46)$$

получим, что эффективные потенциалы (и частичные лагранжианы), полученные здесь и в разделе 3, совпадают. В самом деле, применив каноническое преобразование к гамильтониану (45), построим частичный гамильтониан скалярона $\mathcal{H}_s(p, q)$ и соответствующий лагранжиан

$$\mathcal{L}_s(p, q) \equiv p \dot{q} - \mathcal{H}_s(p, q) = h X_{\text{eff}} + e^{\varepsilon(\alpha - \gamma)} \frac{\dot{q}^2}{\mu \varphi}, \quad (47)$$

которые теперь уже можно ввести в полный лагранжиан вместо $\mathcal{L}_a$.

Таким образом, получается полный лагранжиан дилатон-скаляронной гравитации

$$\varepsilon \mathcal{L}_q^{(1)} = l_\varepsilon^{-1} \left[\varphi \dot{\psi}^2 - 2 \dot{\alpha}_\varepsilon \dot{\varphi} - (1 - \nu) \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi} + \frac{\dot{q}^2}{m^2 \varphi} \right] + l_\varepsilon \varepsilon e^{2\alpha_\varepsilon} U(\varphi, \psi, q), \quad (48)$$

где теперь $l_\varepsilon \equiv e^{\alpha - \varepsilon - \alpha + \varepsilon}$, а также было использовано обозначение (32) и $\mu = m^2$. Эта форма записи более естественна, чем (42). Прежде всего, зависимость от лагранжева множителя l_ε оказывается простой и стандартной, кинетический член квадратичен относительно обобщенных скоростей и его можно привести к диагональному виду с помощью переопределения лагранжева множителя и скоростей. Кроме того, имеется свобода выбора удобного калибровочного условия и вейлевской системы отсчета. Например, производя сдвиг $\alpha_\varepsilon \Rightarrow \alpha_\varepsilon - (1 - \nu) \ln \sqrt{\varphi}$ и переопределяя потенциал в виде $U \Rightarrow \varphi^{\nu-1} U$, можно убрать третий член в (48) и получить лагранжиан в вейлевской системе отсчета¹²⁾. После этого можно переопределить $l_\varepsilon \varphi \equiv \bar{l}_\varepsilon$, ввести новое поле $\xi \equiv \varphi^2$ и, наконец, переписать уравнение (48) в более простом виде:

$$\varepsilon \mathcal{L}_q^{(1)} = \bar{l}_\varepsilon^{-1} [\xi \dot{\psi}^2 + m^{-2} \dot{q}^2 - \dot{\xi} \dot{\alpha}_\varepsilon] + \bar{l}_\varepsilon \varepsilon e^{2\alpha_\varepsilon} \xi^{\nu/2-1} U(\sqrt{\xi}, q, \psi). \quad (49)$$

Прежде чем применить это уравнение к исследованию космологий и горизонтов событий в теории скалярона, обсудим более подробно эффективный потенциал скалярона, отвечающий потенциалу X (см. (5)).

¹²⁾ После этого преобразования теорию, задаваемую лагранжианом со связями (48), можно сравнить с одномерной редукцией теории, задаваемой уравнениями (33)–(38): сначала выводится условие связи, выбирается метрика светового конуса, при этом считается, что $l_\varepsilon = 1$, а затем выводятся все уравнения движения. Заметим, что одномерный лагранжиан общего вида (48) обеспечивает большую свободу при упрощении уравнений. Например, если имеются только обычные поля ψ , можно выбрать $l_\varepsilon \equiv \bar{l}_\varepsilon \varphi$, $\xi \equiv \ln \varphi$, и при этом не нужно переходить к вейлевской системе отсчета для упрощения кинетического члена.

Применяя обозначения (44), видим, что $y(p_a)$ можно получить из уравнения

$$y = x(1 - y^2)^{1-\nu}, \quad x \equiv -\frac{q}{2\nu\lambda\Lambda\varphi}, \quad (50)$$

где знак величины q выбран таким образом, чтобы выполнялось условие $x > 0$, и, следовательно, $y > 0$. Получаемое при этом уравнение имеет вид многочлена от y^2 порядка $D - 3$ для четных D и многочлена от y порядка $2(D - 3)$ для нечетных D . Это наблюдение не слишком полезно при $D > 4$, тем не менее удастся записать некоторые алгебраические выражения от $y(x)$ в случае размерностей $D = 5, 6$. Эти выражения достаточно громоздки, и их сложно применить на практике. Тем не менее нетрудно найти хорошие приближения для решений при малых и больших значениях переменной x :

$$y = x[1 - (1 - \nu)x^2 + \dots];$$

$$1 - y^2 = |x|^{-\sigma} - \frac{\sigma}{2}|x|^{-2\sigma} + \dots, \quad \sigma \equiv \frac{1}{1 - \nu}. \quad (51)$$

Оба этих разложения применимы при всех $\nu > 1$, и первое из них оказывается точным при $\nu = 1$.

Чтобы исследовать поведение потенциала $X_{\text{eff}}(x)$, перепишем его в терминах решения $y(x)$ уравнения (50):

$$X_{\text{eff}} = X - y \frac{\partial X}{\partial y} = -2\Lambda\varphi \frac{x}{y} \left[1 - (1 - 2\nu)y^2 \right]. \quad (52)$$

Это выражение оказывается удобным как при получении некоторых точных решений, так и при обсуждении их общих свойств при произвольных D . При $D = 3$ имеем $y = x$, и тем самым непосредственно получаем эффективный потенциал (39). При $D = 4$ получаем $x/y = \sqrt{1 + x^2}$, и потенциал совпадает с выражением (40). Интересным свойством этого эффективного потенциала оказывается инвариантность относительно вращений в плоскости $(q, \lambda\Lambda\varphi)$. Эта инвариантность имеет место только при $D = 4$. К сожалению, кинетическая составляющая не обладает такой симметрией ни при каком выборе калибровочного условия. При $D = 3$ эффективный потенциал, равный потенциалу (39), деленному на $\varphi \equiv \sqrt{\xi}$, обладает другой, более простой, симметрией. Тогда лагранжиан (49) чисто скалярной гравитации с $h \equiv \varepsilon e^{2\alpha_\varepsilon}$ и $\psi \equiv 0$ имеет очень простой вид

$$\varepsilon \mathcal{L}_q^{(1)} = \bar{l}_\varepsilon^{-1} [m^{-2} \dot{q}^2 - \dot{\xi} \dot{\alpha}_\varepsilon] - \bar{l}_\varepsilon 2\Lambda h \left[1 + \frac{q^2}{4\lambda^2 \Lambda^2 \xi} \right], \quad (53)$$

в котором легко прослеживается масштабная инвариантность $q \mapsto Cq$, $\xi \mapsto C^2\xi$, $h \mapsto C^2h$. Такая симметрия сама по себе недостаточна для того, чтобы получить дополнительный интеграл движения. В лучшем случае она сигнализирует о существовании специального решения с зависимостью масштабного типа от q, ξ, h , но это не особенно полезно. Ниже, однако, будет показано, что на самом деле теория с лагранжианом (53) обладает дополнительным интегралом, но сначала завершим обсуждение общих свойств теорий вида (49).

Применяя асимптотические приближения (51) к (52), докажем упомянутое выше свойство универсальности:

$$X_{\text{eff}} = -2\Lambda\varphi \left[1 + \frac{q^2}{4\nu\lambda^2\Lambda^2\varphi^2} + O(x^4) \right], \quad X_{\text{eff}} = -2\sqrt{\frac{q^2}{\lambda^2}} + O(|x|^{-\sigma}). \quad (54)$$

Приближение малых q оказывается точным при $\nu = 1$, приближение больших q не зависит ни от φ , ни от $\nu > 1$, а общая структура потенциала X_{eff} задается положительной регулярной функцией $v_\nu(x)$:

$$-\frac{X_{\text{eff}}}{2\Lambda\varphi} \equiv v_\nu(x); \quad v_\nu(0) = 1; \quad v_\nu(x) \simeq 2\nu x, \quad x \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Таким образом, эффективный потенциал в лагранжиане (49) полезно записать в виде

$$U_e(\varphi, x) \equiv \xi^{\nu/2-1} U(\sqrt{\xi}, q, \psi) = \varphi^{\nu-2} U = -2\Lambda\varphi^{\nu-1} v_\nu(x) + k_\nu \varphi^{-(1+\nu)}, \quad (56)$$

а точные выражения для $\nu = 1, 1/2$ задаются формулами (39), (40).

Обсудим теперь свойства величин $v_\nu(x)$, которые можно рассматривать как функции от параметра $q^2/\varphi^2 \equiv q^2/\xi$ (его, в свою очередь, можно выразить в терминах $y(x)$ с помощью уравнения (52)). Применяя формулы (50) и (51), легко найти, что

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \frac{1-y^2}{1+(1-2\nu)y^2} > 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\infty) = 0, \\ v'_\nu(x) &= 2\nu y(x), \quad v'_\nu(x) > 0, \quad v''_\nu(x) > 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Тем самым функция $v_\nu(x)$ оказывается монотонной и выпуклой, и она обладает простыми разложениями при $x \ll 1$, $x \gg 1$:

$$v_\nu(x) = 1 + \nu x^2 + O(x^4), \quad v_\nu(x) = 2\nu x \left[1 + \frac{1-\nu}{2\nu} x^{-\sigma} + O(x^{-2\sigma}) \right]. \quad (58)$$

Имея в руках такой простой и регулярный потенциал U_e , можно ожидать, что по крайней мере качественное поведение решений теории (49) можно успешно проанализировать как при малых, так и при больших значениях аргумента x . Это, конечно, верно, если теория интегрируема. Однако наша теория неинтегрируема даже в простейшем случае $D = 3$, когда $v_1(x) = 1 + x^2$, $k_1 = 0$ и потенциал $U_e = -2\Lambda(1 + x^2)$ линейно зависит от параметра q^2/ξ . Интегрируемость этой и других, похожих на нее, но более общих теорий обсуждается в следующем разделе и в нашей последующей работе. Здесь же рассмотрим канонические уравнения скалярона и найдем один дополнительный интеграл движения.

Рассмотрим общую чисто скаляронную теорию, в которой мы пренебрегаем членом кривизны $k_\nu \varphi^{-(1+\nu)}$:

$$\mathcal{L}_q^{(1)} = \bar{l}_\varepsilon^{-1} [\mu^{-1} \dot{q}^2 - \dot{\xi} \dot{\alpha}_\varepsilon] - \bar{l}_\varepsilon 2\Lambda h \varphi^{\nu-1} v_\nu(x), \quad \mu \equiv m^2. \quad (59)$$

Калибровка еще не фиксирована, так что величина $\bar{l}_\varepsilon$ произвольна. Варьируя относительно этой величины, получим нулевой гамильтониан¹³⁾

$$\mathcal{H}_q^{(1)} \equiv \bar{l}_\varepsilon H_q^{(1)} = \bar{l}_\varepsilon \left[\frac{\mu p_q^2}{4} - p_\alpha p_\xi + 2\Lambda h \varphi^{\nu-1} v_\nu(x) \right] = 0, \quad (60)$$

где было использовано определение канонических импульсов (здесь и ниже α_ε заменяется на α)

$$\dot{q} = \frac{\bar{l}_\varepsilon \mu p_q}{2}, \quad \dot{\xi} = -\bar{l}_\varepsilon p_\alpha, \quad \dot{\alpha} = -\bar{l}_\varepsilon p_\xi. \quad (61)$$

Теперь можно использовать инвариантность теории относительно параметризации, чтобы выбрать наиболее удобный параметр эволюции τ , например $d\bar{\tau} \equiv \bar{l}_\varepsilon d\tau = \dot{\xi} d\tau = d\xi^{14)}$. Такая параметризация эквивалентна фиксации калибровки в совокупности с преобразованием координат. Стандартный выбор калибровки светового конуса в настоящих обозначениях имеет вид $l_\varepsilon = 1$, но мы в основном используем калибровку $l_\varepsilon \varphi \equiv \bar{l}_\varepsilon = 1$, а точкой по-прежнему обозначаем $d/d\tau$. Чтобы еще более упростить уравнения, рассмотрим случай $\nu = 1$ и обозначим $2\Lambda h v_1(x) \equiv h\omega(q^2/\xi)$. В указанных обозначениях и при $\bar{l}_\varepsilon = 1$ гамильтонова система задается уравнениями (61), дополненными уравнениями

$$\dot{p}_q = -2h\omega' \left(\frac{q^2}{\xi} \right) \frac{q}{\xi}, \quad \dot{p}_\xi = h\omega' \left(\frac{q^2}{\xi} \right) \frac{q^2}{\xi^2}, \quad \dot{p}_\alpha = -2h\omega. \quad (62)$$

Нетрудно видеть, что эта гамильтонова система обладает двумя интегралами движения. Первый из них – это гамильтониан (60), а второй вытекает из очевидного соотношения $qp_q + 2\xi\dot{p}_\xi = 0$:

$$\frac{d}{d\tau}(qp_q + 2\xi p_\xi) = q\dot{p}_q + 2\xi\dot{p}_\xi = -2h\omega = \dot{p}_\alpha, \quad (63)$$

где использовано условие (61), гамильтонова связь (60) и последнее из уравнений (62). Интегрируя это соотношение, получим искомый интеграл. Таким образом, имеются два интеграла движения:

$$\mu p_q^2 - 4p_\alpha p_\xi + 4h\omega = 0, \quad qp_q + 2\xi p_\xi - p_\alpha = c_0. \quad (64)$$

Даже если эти интегралы известны, этого еще недостаточно для того, чтобы проинтегрировать данные системы, но знание этих интегралов оказывается полезным при исследовании их свойств (будем называть такие системы *частично интегрируемыми*). Можно надеяться, что для некоторых специальных потенциалов ω можно найти и третий интеграл движения. Эти наблюдения подсказывают более общий подход к конструированию систем с дополнительными интегралами движения, представленный в следующем разделе.

¹³⁾ Действуя по-другому, можно применить стандартное преобразование Лежандра и записать гамильтонову теорию в лагранжевом виде, $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = p\dot{q} - lH(p, q)$, который оказывается наиболее удобным в случае систем со связями (см., например, [38]).

¹⁴⁾ Такой выбор параметризации всегда возможен локально, и он имеет место при всех $\dot{\xi} \neq 0$. Эти тонкости выходят за рамки настоящей работы.

5. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ПРОСТЫХ СЛУЧАЯХ

Рассмотрим теперь дилатон-скалярную гравитацию общего вида с одним скаляром ψ , который может быть обычным или же скалярным полем:

$$\mathcal{L}_{\text{dsg}}^{(2)} = \sqrt{-g} [\varphi R + Z(\varphi)(\nabla\psi)^2 + V(\varphi, \psi)]. \quad (65)$$

В случае скалярона имеем $\psi = q$, $Z = Z_q = -1/(m^2\varphi)$ с потенциалами, приведенными выше. В случае обычного скалярного поля имеем $Z_\psi \sim -\varphi$, но некоторые из результатов, представленных ниже, остаются применимыми и к функциям Z более общего вида. В приведенных обозначениях отрицательные знаки Z отвечают положительным кинетическим энергиям скалярных полей, но классическое рассмотрение полностью применимо при любом знаке. Общая модель (65) с потенциалом V общего вида неинтегрируема ни в каком смысле. Одним из наиболее сильных препятствий интегрируемости служит зависимость Z от φ , а потому обычным предположением, упрощающим ситуацию, служит предположение о независимости функций Z от φ . При этом ограничении возникает класс *мультиэкспоненциальных потенциалов* специального вида, для которых можно свести теории дилатон-скалярной гравитации с произвольным числом скалярных полей к системам Тоды–Лиувилля, которые допускают точные решения¹⁵⁾. Для статических и космологических редукций этих моделей были построены аналитические решения. Здесь предлагается некое расширение этого класса моделей.

Рассмотрим сначала случай безмассового вектона. В чисто скалярной дилатонной гравитации в безмассовом пределе получим, что $h\partial_i(\partial_i\varphi/h) = 0$, откуда найдем, что $h(u, v) = h(\tau)$, $\varphi(u, v) = \varphi(\tau)$, где $\tau = a(u) + b(v)$. Это означает, что теория автоматически редуцируется к размерности $D = 1$, и можно применить гамильтонову формулировку из раздела 4 (в калибровке светового конуса). Ясно, что q при этом постоянно, $q \equiv q_0$, что также можно увидеть из выражений (23), (24). Теперь, применяя приведенные выше определения импульсов p_α , p_ξ , условия связей $p_\alpha p_\xi = h\omega(\xi)$ и уравнение $\dot{p}_\alpha = -2h\omega(\xi)$ (все они справедливы при произвольном потенциале $\omega(\xi)$), можно явно разрешить уравнения движения:

$$\dot{p}_\alpha = -2h\omega = -2p_\alpha p_\xi \Rightarrow 2\dot{\alpha}p_\alpha = \dot{p}_\alpha \Rightarrow -\dot{\xi} \equiv p_\alpha = -c_1 h \Rightarrow c_1 \dot{h} = -2h\omega, \quad (66)$$

где c_1 – константа интегрирования. При этом получается хорошо известное выражение для h ,

$$c_1^2 \frac{dh}{d\xi} = 2\omega(\xi), \quad c_1^2 h = 2 \int d\xi \omega(\xi) = 2 \int d\varphi V(\varphi) \equiv N(\varphi) - N(\varphi_0), \quad (67)$$

если вспомнить, что преобразование от ξ к φ индуцирует преобразование потенциала, так что имеем $d\xi \omega(\xi) = d\varphi V(\varphi)$. Тем самым можно найти явное общее решение

¹⁵⁾Этот класс решений содержит в себе все ранее рассмотренные интегрируемые двумерные модели дилатон-скалярной гравитации, обзор которых содержится в работе [36] (см. также [39]). Первая модель дилатон-скалярной гравитации лиувиллевского типа (или *билиувиллевская модель*), которая является обобщением моделей Джакива [40] и Каллана–Гиддингса–Харви–Стромингера [41], была предложена и решена в работах [29], результаты которых существенно обобщаются в настоящей работе.

дилатонной гравитации общего вида, если решить уравнение $\dot{\xi} = c_1 h(\xi)$, задающее зависимость от τ . В нашем специальном случае дилатон-скаляронной гравитации, отвечающей случаю безмассового вектона, единственным проявлением этого вектона будет зависимость потенциала от q_0 (“заряда” безмассового векторного поля) и от других параметров, определяющих теорию. Общее решение зависит от независимых свободных параметров $(c_1, \varphi_0, \tau_0)^{16)}$, которые можно зафиксировать масштабными преобразованиями h и φ и сдвигом переменной τ . Тогда *портретом* решения будет служить кривая в плоскости (h, φ) , существенно зависящая от q_0 . Наиболее важным свойством этого портрета будет структура множества горизонтов. Для нас наибольший интерес представляет зависимость этого портрета от параметров порождающей дилатон-скаляронной гравитации: $q_0, \Lambda, \lambda, \nu$. Характеристические свойства портретов – это число и структура горизонтов (простых, вырожденных и сингулярных) и поведение решений вблизи горизонтов и сингулярностей. Более интересный портрет интегрируемой дилатон-скаляронной гравитации описан в приложении А.

Для дилатон-скаляронной гравитации (65) можно вывести некоторые удобные разложения точных решений около горизонтов с применением общего подхода, предложенного в работе [34]. Здесь мы сформулируем его в наиболее компактном виде, удобном при использовании в общей теории дилатон-скаляронной гравитации с произвольными Z, V ($V_\psi \neq 0$) и с произвольным числом скаляров. Для сохранения общности не будем явно применять канонический формализм, а потому слегка изменим обозначения, приведя их к виду, похожему на обозначения работ [29]. Также будем применять калибровку светового конуса и вейлевскую систему отсчета, помня о том, что уравнения (48), (49) показывают, как вернуться к стандартной системе отсчета и к калибровке общего вида. Систему одномерных уравнений можно получить с помощью размерной редукции системы (34)–(38), если предположить, что все неизвестные функции зависят от единственной переменной $\tau = u + v$. Обозначая $F \equiv \ln h$ и вводя новые переменные типа импульсов χ, η, ρ ,

$$\dot{\varphi} = \chi, \quad Z(\varphi)\dot{\psi} = \eta, \quad Z(\varphi)\dot{F} = \rho, \quad (68)$$

можно переписать основные уравнения динамики и уравнение связи в виде

$$\dot{\chi} + hV = 0, \quad 2\dot{\eta} + hV_\psi = 0, \quad \dot{\rho} + h(ZV)_\varphi = 0, \quad \chi\rho + hZV + \eta^2 = 0, \quad (69)$$

где нижние индексы φ и ψ обозначают соответствующие частные производные. Хорошо известно, что второе или третье уравнение можно убрать¹⁷⁾, так что на самом деле имеются два независимых дифференциальных уравнения второго порядка и одно условие связи, задаваемое уравнением первого порядка. Таким образом, чтобы полностью решить эту систему, необходимо найти две дополнительные связи, канонически коммутирующие с гамильтонианом и друг с другом¹⁸⁾.

¹⁶⁾ Физические параметры определяются уравнением горизонтов $N(\varphi) - N(\varphi_0) = 0$. Когда это уравнение имеет единственное невырожденное решение, как в случае черной дыры Шварцшильда, параметр $N(\varphi_0)$ можно связать с “массой” этой черной дыры; в случае, когда имеется несколько решений φ_n , физическая интерпретация оказывается гораздо богаче (см., например, [26], [42]).

¹⁷⁾ Полная система (68), (69), очевидно, переполнена, и ее можно называть расширенной системой. Она полезна при поиске интегралов движения. Ее подсистемы можно использовать при построении некоторых специальных решений.

¹⁸⁾ Поскольку мы интересуемся классической теорией, интегрируемость обычно понимается в смысле Лиувилля.

Теперь по аналогии с предыдущим разделом произведем замену переменной τ на ξ , определенную соотношениями $\chi d\tau = d\varphi \equiv Z d\xi$. После этого перепишем уравнения (68), (69), обозначив штрихом производную $d/d\xi$ и введя полезные обозначения: $U(\xi, \psi) \equiv Z(\varphi)V(\varphi, \psi)$, $H(\xi) \equiv h/\chi$ и $G(\xi) \equiv \eta/\chi$. Основные независимые уравнения для χ , η , ψ , H приобретают теперь весьма компактный вид:

$$\psi' = G, \quad H' = -G^2 H, \quad \chi' + UH = 0, \quad 2\eta' + U_\psi H = 0. \quad (70)$$

Расширенная система содержит два уравнения для ρ (см. (68), (69)):

$$\chi F' - \rho = 0, \quad \rho' + U_\xi H = 0, \quad \chi G' = UH \left(G - \frac{U_\psi}{2U} \right), \quad (71)$$

где добавлено явное уравнение для G , которое можно использовать вместо последнего уравнения в системе (70).

Система уравнений (70) оказывается наиболее удобной при вычислении решений вблизи горизонтов и в асимптотических областях, а также при исследовании их общих свойств. Например, очень важным свойством решений оказывается то, что $(\ln H)' = -G^2 < 0$. Это свойство не зависит от потенциала и остается справедливым при любом числе скалярных полей до тех пор, пока их функции Z остаются отрицательными (см. [22]). В самом деле, в этом случае уравнение связи можно записать в виде

$$\Phi' \equiv (\ln H)' = -Z_0 \sum_{n=0}^N Z_n^{-1}(\xi) \left(\frac{\eta_n}{\chi} \right)^2, \quad \eta_n \equiv Z_n \psi \equiv \chi \psi'. \quad (72)$$

Для обычных полей $Z_n < 0$ при всех n , в то время как для некоторых аномальных полей типа поля скалярона, отвечающего тахионному вектону, величина Z может быть положительна, и тогда знак Φ' зависит от выбора конкретного решения. В случае совпадающих знаков уравнение (72) напоминает второе начало термодинамики и задает “стрелу времени” для рассматриваемой динамической системы. Если это не так, то теорема нарушается весьма специфическим образом. Она может послужить интересным отправным пунктом при построении космологических моделей.

Система уравнений (70) обладает и другими интересными свойствами. Общее решение первых двух уравнений можно выразить через интегралы от G и G^2 :

$$\psi(\xi) = \psi_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} G, \quad H(\xi) = H_0 \exp \left(- \int_{\xi_0}^{\xi} G^2 \right). \quad (73)$$

Теперь подставляя эти решения в третье и четвертое уравнения и интегрируя их, можно записать интегральное уравнение для $G(\xi)$ вместо системы уравнений (70):

$$G(\xi) \equiv \frac{\eta}{\chi} = \left(\eta_0 - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} U_\psi H \right) \left(\chi_0 - \int_{\xi_0}^{\xi} UH \right)^{-1}, \quad (74)$$

где $\psi(\xi)$ и $H(\xi)$ задаются формулами (73). Как отмечалось в работах [29] и [34], обычный (регулярный и невырожденный) горизонт появляется при $\chi_0 = \eta_0 = 0$. Тогда $h(\xi_0) = 0$, в то время как величина $G(\xi_0) = U_\psi(\xi_0)/2U(\xi_0)$ остается конечной, если $U_\psi \neq 0$. Таким образом, G , ψ и H конечны и их можно разложить в сходящиеся

ряды в окрестности точки ξ_0 , если потенциал $U(\xi, \psi)$ аналитичен в окрестности (ξ_0, ψ_0) ¹⁹⁾. При $U_\psi \equiv 0$ имеем очевидный интеграл движения $\eta = \eta_0$. Как нетрудно видеть из приведенных выше уравнений и как было доказано в работах [29], горизонт отсутствует при $\eta_0 \neq 0$, но в случае $\eta_0 = 0$ имеем $G \equiv 0$, и мы возвращаемся к чисто дилатонной гравитации с решением (67), которое всегда содержит горизонты.

В простых случаях интегральное уравнение нетрудно свести к дифференциальному. Например, если $U = u(\xi)v(\psi)$ и $U_\psi = 2gU$, то интегральное уравнение можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка, которое оказывается неинтегрируемым при произвольных $u(\xi)$, но явно интегрируемым, если $U_\xi = g_1U$. Этот результат выглядит вполне естественным, так как в этом случае возникают два дополнительных интеграла движения $\eta = g\chi + \eta_0$ и $\rho = g_1\chi + \rho_0$, и поэтому наиболее прямым подходом оказывается тот, в котором применяются расширенные дифференциальные системы уравнений. В неинтегрируемых случаях или в случае, когда возникает только один дополнительный интеграл движения, интегральное уравнение может еще служить вполне полезным аналитическим приемом, которому будет посвящена отдельная публикация. Здесь же только кратко опишем обобщение подхода работ [29] к поиску потенциалов $U(\xi, \psi)$, для которых расширенная система дифференциальных уравнений обладает дополнительными интегралами.

Обобщая подход работ [29] и приведенные выше замечания относительно возможных интегралов движения, сведем воедино все те уравнения, которые порождают такие интегралы:

$$0 = \rho + UH + \frac{\eta^2}{\chi} = \chi' + UH = \eta' + U_\psi \frac{H}{2} = \rho' + U_\xi H = 0, \quad (75)$$

$$0 = \psi\eta' + \psi U_\psi \frac{H}{2} = \eta\psi' - \frac{\eta^2}{\chi} = \xi\rho' + \xi U_\xi H = \xi'\rho - \rho = 0. \quad (76)$$

Первое уравнение системы (75) есть энергетическая связь, которую будем обозначать через E_0 , а последующие члены этой цепочки уравнений обозначим через E_i , $i = 1, \dots, 7$. Вычисляя теперь сумму $\sum_{i=0}^7 c_i E_i$ при $c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_0$, получим, что решения уравнений (75) удовлетворяют тождеству

$$[c_1\chi + c_2\eta + c_3\rho + c_4(\psi\eta + \xi\rho)]' = -H \left[(c_1 + c_4)U + c_2 \frac{U_\psi}{2} + c_3 U_\xi + c_4 \left(\frac{\psi U_\psi}{2} + \xi U_\xi \right) \right]. \quad (77)$$

Если правая часть тождественно равна нулю, то левая часть задает интеграл движения:

$$c_1\chi + c_2\eta + c_3\rho + c_4(\psi\eta + \xi\rho) = I_1. \quad (78)$$

Отсюда следует, что для потенциалов $U(\xi, \psi)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям в частных производных

$$(c_1 + c_4)U + c_2 \frac{U_\psi}{2} + c_3 U_\xi + c_4 \left(\frac{\psi U_\psi}{2} + \xi U_\xi \right) = 0, \quad (79)$$

¹⁹⁾Это показано в работе [34]. В работе [22] можно найти подробное обсуждение регулярных решений с горизонтами, включая обобщение координат Секереша–Крускала, равно как и примеры сингулярных и вырожденных горизонтов.

существует соответствующий интеграл движения уравнений (75). Все приведенные выше интегралы можно получить с помощью этого утверждения²⁰⁾. Решение уравнения (79) зависит от произвольной функции одной переменной. С учетом этого в некоторых простых случаях можно вывести еще один интеграл движения.

В приведенном выше примере потенциала $U = U_0 e^{2g\psi + g_1\xi}$ с двумя дополнительными интегралами движения можно непосредственно найти уравнение для χ :

$$\chi' = (g^2 + g_1)\chi + (\rho_0 + 2\eta_0 g) + \frac{\eta_0^2}{\chi}. \quad (80)$$

Решив это уравнение, можно явно выразить ξ , η , ρ , h и ψ в виде функций от χ . Этого оказывается достаточно для нахождения портрета этой физически интересной системы – результат, который будет представлен в будущих публикациях.

В заключение кратко опишем проблему, которая возникает даже в весьма простых системах. Рассмотрим, например, потенциал $U(\psi)$, который также обладает двумя дополнительными интегралами. Очевидный линейный интеграл имеет вид $\rho = \rho_0$. Чтобы получить еще один интеграл, предположим, что $\psi U_\psi = 2gU$. Тогда имеется дополнительный билинейный интеграл движения указанных трех дифференциальных уравнений:

$$\psi\eta - (g+1)\chi + \rho_0\xi = I_0, \quad \chi' = \rho_0 + \frac{\eta^2}{\chi}, \quad \eta\psi' = \frac{\eta^2}{\chi}, \quad \psi\eta' = g\chi'. \quad (81)$$

Можно исключить из интеграла ψ (или η) и таким образом получить два уравнения на χ и η (или ψ). Однако эта система не попадает в класс интегрируемых динамических систем для двух функций, поскольку она явно зависит от ξ . Если в выражении для интеграла I_0 положить $\rho_0 = 0$, то эту систему можно явно проинтегрировать, как и в предыдущем случае, но тем самым можно получить лишь “частичное” (не общее) решение. Эта проблема оказывается типичной для данной задачи – появление билинейных интегралов, содержащих члены, зависящие от ξ и описывающие некоторый “обратный отклик” гравитации на поле материи.

Мы собираемся привести подробный сравнительный анализ наиболее интересных интегрируемых и частично интегрируемых систем дилатон-скалярной гравитации в отдельной публикации. В заключение этого раздела сведем воедино его основные утверждения. Дилатонная гравитация со скалярными полями оказывается в общем случае неинтегрируемой даже при наличии формально достаточного числа интегралов движения. Модели с безмассовыми скалярными полями качественно отличаются от скалярных моделей дилатон-скалярной гравитации, которые неизбежно оказываются неинтегрируемыми. К счастью, в некоторых физически важных примерах неинтегрируемые системы оказываются частично интегрируемыми, а потому допускающими эффективное изучение, по крайней мере на качественном уровне. Поведение решений вблизи горизонтов и сингулярностей можно исследовать аналитически, применяя явные разложения и итерации управляющего интегрального

²⁰⁾Интересным исключением служит интеграл (26) из работы [29], для объяснения которого требуется более общий метод. Е. А. Давыдов сформулировал теоретико-групповой метод для вывода интегралов движения в общих теориях дилатон-скалярной гравитации, который явно позволяет получать интегралы более общего вида по сравнению с обсуждаемыми в настоящей работе. Краткое изложение см. в работе [43].

уравнения. С другой стороны, представленный подход к построению систем с дополнительными интегралами движения может быть полезен в задаче нахождения интегрируемых или частично интегрируемых систем, качественно близких к реальным системам.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Перечислим основные результаты, полученные в настоящей работе. В разделе 2 кратко описаны стандартная сферически-симметричная редукция D -мерной дилатон-векторной гравитации и ее цилиндрически-симметричные редукции типа Калуцы в размерностях $D = 3$ и $D = 4$. В разделе 3 получено преобразование двумерной дилатон-векторной гравитации в эквивалентную ей дилатон-скаляронную гравитацию. Это открывает возможности применения в векторной теории некоторых методов, развитых в двумерной дилатонной гравитации, взаимодействующей со скалярными полями. В частности, нелинейные кинетические члены векторной теории преобразуются в абсолютно стандартные потенциалы, зависящие только от скалярных полей (дилатонов, скаляронов и других скаляров). Скалярная формулировка упрощает процедуру поиска дополнительных интегралов движения в одномерных редукциях дилатон-скаляронной гравитации²¹). В разделе 4 предложен более стандартный переход от двумерной дилатон-векторной гравитации к объединенному описанию космологических и статических решений в произвольной калибровке и предъявлены параметризационно-инвариантные гамильтоновы уравнения движения одномерной теории дилатон-скаляронной гравитации. Формализм канонических связей оказался наиболее удобным при поиске новых интегралов движения, что было проиллюстрировано на примере теории в размерности $D = 3$. Это предполагает существование возможных дальнейших обобщений подхода, предложенного в работах [29], где были найдены две нетривиальные одномерные модели дилатон-скаляронной гравитации, обладающие двумя дополнительными интегралами движения.

Раздел 5 представляет собой центральную часть работы. В нем получен простейший вид обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих общую теорию дилатон-скаляронной гравитации, и выведены наиболее важные свойства их космологических и статических решений. В общем случае эта теория неинтегрируема, и нами предложены несколько эффективных подходов к аналитическим и качественным исследованиям этой теории. Наиболее простой из них – это степенные разложения вблизи горизонтов и обобщенное разложение вблизи сингулярностей (с учетом неаналитических членов). Также был предложен более мощный подход, базирующийся на интегральном уравнении для наиболее важной функции указанной системы. Это уравнение, названное нами *управляющим интегральным уравнением*, суммирует важные свойства нашей *космо-статической* системы (одновременно описывающей статические и космологические решения). В полностью

²¹) Чисто дилатонная гравитация представляет собой топологическую теорию, а потому сводится к одномерной интегрируемой системе. Были построены нетривиальные интегрируемые модели дилатон-скаляронной гравитации, содержащие один безмассовый скаляр [29]. Более сложные модели с эффективно массивными скалярными полями могут обладать не более чем одним дополнительным интегралом движения, а потому остаются неинтегрируемыми в общем случае.

интегрируемых случаях ее можно свести к дифференциальной динамической системе. В некоторых случаях оказалось возможным найти глобальные аналитические решения динамической системы и предъявить картину, напоминающую классические фазовые портреты. Пример такого портрета представлен в приложении А.

Подводя итог, можно отметить, что основной целью настоящей работы был поиск подходов, позволяющих понять глобальную картину космологических и статических решений дилатонной гравитации, взаимодействующей с нелинейными скалярными полями. Такие теории оказываются неинтегрируемыми, но, возможно, их удастся аппроксимировать интегрируемыми теориями. В работе показано, что дополнительные интегралы движения могут появиться, и были предложены некоторые приемы, позволяющие извлечь пользу из этого обстоятельства. Хотя основные свойства векторной теории указывают на возможность ее применения к единому описанию темной энергии, инфляции²²⁾ и темной материи, точные утверждения пока сделать трудно, на сегодняшний день лучший подход к этой проблеме – это поиск глобальных качественных портретов решений. Трудность здесь состоит в том, что точная система остается неинтегрируемой, и поэтому портрет должен быть по крайней мере трехмерным.

Понимание глобальных свойств классических решений также важно с точки зрения их квантования. Простейший подход был опробован некоторое время назад в случае классически интегрируемых гравитационных систем с минимальным числом степеней свободы (см., например, работы [45], [46], [38] и литературу к ним). Это наивное квантование справедливо критиковалось за то, что оно не принимает в расчет неоднородности, учет которых принципиален в космологических приложениях (обзор других, более развитых, подходов к квантовой гравитации см., например, в работах [47], [48]). Тем не менее можно надеяться, что такое квантование дилатон-скаляронной гравитации может представлять некоторый интерес в связи с исследованием свойств простейших моделей квантовой космологии.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Топологический портрет

Некоторые линейные интегралы из раздела 5 были найдены в работах [29] для дилатон-скаляронной гравитации с не зависящими от ψ потенциалами, которые в соответствии с (70) допускают интеграл движения $Z(\varphi)\dot{\psi} = \eta_0$. Если к тому же $U_\xi = gU$, то из (77), (78) можно найти еще один интеграл движения (с учетом (68)):

$$Z\dot{F} - g\dot{\varphi} \equiv \rho - g\chi = C_1. \quad (82)$$

Тогда получим, что решение можно выразить в квадратурах (см. уравнения (24), (25) в первой из работ [29]). Интересное обстоятельство, не отмеченное в работах [29], состоит в том, что этот интеграл также существует в случае зависящих от ψ мультипликативных потенциалов $U = u(\varphi)v(\psi)$, когда $Z(\varphi)\dot{\psi}$ зависит от τ .

Рассмотрим вторую интегрируемую модель работ [29], потенциал которой не зависит от ψ и зависит от произвольной функции $w(\varphi)$. Считая $w(\varphi)$ вейлевской функцией (см. (6)) и переходя к вейлевскому представлению лагранжиана (65), можно

²²⁾В то время как связь с моделями темной энергии представляется очевидной, явление инфляции было явно показано только при численном анализе теории массивных векторных мезонов в тахионной модели с $m^2 < 0$ [44].

показать что потенциалы V и Z задаются формулами

$$U(\xi) \equiv ZV = [g_1 w(\xi) + g_2 w^{-1}(\xi)]', \quad [2g_3 l(\xi) + g_4 l^2(\xi)] = \xi, \quad (83)$$

где $d\xi \equiv d\varphi/Z(\varphi)$, $l(\xi) \equiv \ln w(\xi)$, а третий интеграл, полученный с помощью вычислений в [29], в обозначениях настоящей работы имеет вид

$$\left[\frac{\rho}{l'(\xi)} \right]^2 - 4g_2 h + 2g_4 \eta_0^2 \ln h = C_1. \quad (84)$$

Полный лагранжиан и смысл констант связи описаны в первой из работ [29]. Как показано в ней, решение можно получить в квадратурах, которые не выражаются через элементарные функции в случае, когда $g_4 \neq 0$.

Если взять $g_4 = g_2 = 0$, то получим простое решение, выражающее w в виде функции от h . Вводя масштабы w_0 и h_0 для $w(\xi)$ и $h(\xi)$, найдем соотношение между нормированными w и h , которое зависит только от одного параметра δ , определяемого соотношением

$$2\delta + 1 = \sqrt{1 - \frac{8g_3 \eta_0^2}{C_1}} \geq 0, \quad (85)$$

где $g_3 < 0$ для обычных скалярных полей и $C_1 > 0$. Тогда (h, w) -портрет исследуемой системы задается соотношением

$$w = \frac{|h|^\delta}{|1 + \varepsilon|h^{1+2\delta}|}, \quad (86)$$

где $\varepsilon \equiv h/|h|$, $-1 < h < \infty$, $0 < w < \infty$. Теперь нетрудно нарисовать картину кривых, описывающую все возможные решения. В области $h < 0$ имеем статические решения, в то время как для космологических решений имеем $h > 0$. Эта картина выглядит как портрет динамической системы в плоскости (h, w) с сингулярными точками $(0, 1)$, $(1, 1/2)$, $(0, 0)$, $(0, \infty)$, $(-1, \infty)$ и $(\infty, 0)$. Эти точки соединяются важными разделяющими кривыми, аналогичными сепаратрисам фазовых портретов. Наиболее интересные точки следующие: нодальная точка исходной сингулярности $(0, 0)$, седловая точка горизонта $(0, 1)$ и наиболее интересная “космологическая” точка $(1, 1/2)$, в которой все космологии совпадают и имеют общую касательную²³⁾.

Этот *топологический портрет* описывает качественные свойства статических и космологических решений при различных значениях параметра δ , характеризующего энергию безмассового скалярного поля. При его деформации с помощью произвольно выбранного непрерывного дифференцируемого преобразования, сохраняющего сингулярности, мы получаем по сути ту же самую космо-статическую систему. Например, нетрудно сдвинуть все сингулярности в некоторую конечную область на плоскости. Более того, для лучшего понимания топологической структуры пространства решений можно попытаться расширить портрет на область, в которой, например, $2\delta + 1 < 0$ или $h < -1$, и т. д. Мы полагаем, что топологический портрет дает наиболее адекватное глобальное представление интегрируемых гравитационных систем, исследованных в настоящей работе.

²³⁾Еще более интересным, но гораздо более сложным является портрет модели с безмассовым векторным (при $g_2 \neq 0$) и скалярными полями (см. уравнение (30) в первой из работ [29]). Этот портрет будет обсуждаться в отдельной публикации.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Размерности и лагранжианы

Размерности геометрических и физических полей и параметров обсуждались в работе [19]. Однако в различных работах, посвященных аффинным моделям, нами использовались несколько различные обозначения. Здесь сначала представим несколько замечаний по этому поводу. В чисто геометрической части проблемы не возникает, поскольку единственная размерность, имеющаяся в наличии, – это длина. Поэтому получаем, что $[s_{ij}] = [a_{ij}] = L^{-2}$, $[\bar{l}] = L^0$, геометрический лагранжиан (1) имеет размерность L^{-D} , а геометрическое действие соответственно безразмерно. При переходе к физической картине мы определяем безразмерные тензорные плотности $\mathbf{g}^{ij}$, $\mathbf{f}^{ij}$ с помощью вариации лагранжиана (1). Чтобы сделать плотности безразмерными, лагранжиан необходимо умножить на константу $2\tilde{\gamma}$, где $[\tilde{\gamma}] = L^{D-2}$:

$$\mathcal{L} \equiv 2\tilde{\gamma}\sqrt{-\Delta_s},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_{ij}} \equiv \mathbf{g}^{ij}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{ij}} \equiv \mathbf{f}^{ij}. \quad (87)$$

Применяя это определение, нетрудно доказать следующее тождество:

$$|\Delta_g| \equiv |\det(\mathbf{g}^{ij} + l\mathbf{f}^{ij})| = \tilde{\gamma}^D |\det(s_{ij} + l^{-1}a_{ij})|^{(D-2)/2}, \quad (88)$$

где l – безразмерная постоянная. Применяя это тождество, можно найти сопряженную лагранжеву плотность $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(\mathbf{g}^{ij}, \mathbf{f}^{ij})$:

$$\mathcal{L}^* = \nu^{-1} \left(-\frac{\Delta_g}{\tilde{\gamma}^2} \right)^\nu,$$

$$s_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}^{ij}}, \quad a_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{f}^{ij}}. \quad (89)$$

Этот результат был, несомненно, известен Эйнштейну в специальном случае размерности $D = 4$, в котором $\nu = 1/2$ и $l = 1$. Следуя его подходу, найдем физический лагранжиан (2), как было описано в работах [18]–[22]. Уравнения (87)–(89) играют ключевую роль в этом выводе. При рассмотрении физического лагранжиана лучше всего использовать гравитационную постоянную $\kappa \equiv G/c^4$ с тем, чтобы определить физические поля A_i и F_{ij} , пропорциональные a_i и f_{ij} , но обладающие стандартными размерностями и удовлетворяющие соотношениям $[\kappa A_i^2] = 1$, $[\kappa F_{ij}^2] = L^{-2}$ [19]. Мы выберем единицы измерения с $c = \kappa = 1$, поэтому величина A_i оказывается безразмерной, а F_{ij} имеет размерность L^{-1} . На самом деле мы использовали обозначение a_i для безразмерного потенциала в этой системе единиц и f_{ij} для соответствующего полевого тензора $f_{ij} = a_{i,j} - a_{j,i}$; это означает, что $[\lambda] = L$ и $[\lambda^2 \Lambda] = 1$. В уравнении (2) и в тексте настоящей статьи везде применяется это соглашение об обозначениях. Поскольку тензорные плотности нами не используются, жирный шрифт используется только для обозначения $f_{ij} f^{ij} \equiv \mathbf{f}^2$ и $a_i a^i \equiv \mathbf{a}^2$.

Последнее замечание относится к размерностям постоянных и полей. В применяемых единицах измерений имеются три существенно размерные постоянные геометрического происхождения: Λ , λ , $\mu \equiv m^2$ (постоянные k_ν и $\tilde{\gamma}$ – вспомогательные

размерные константы, не имеющие отношения к аффинной геометрии). Координаты t, r, u, v имеют размерность L , а основные поля a_i, ψ, φ безразмерны, в то время как $[q] = L^{-1}$. Обозначив скалярон через ψ (в разделе 5), мы неявно предположили, что он безразмерен, когда включили m в его определение, положив $\psi = q/m$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Трехмерная чисто вектонная теория

Рассмотрим вектонный лагранжиан (42) в калибровке светового конуса (с $\alpha = \gamma$ и $2\alpha = \ln |h| = F$) без перехода к скаляронному описанию:

$$\mathcal{L}_v^{(1)} = \frac{\lambda_0 \varphi \dot{a}_\varepsilon^2}{h} - \dot{\varphi} \dot{F} - \mu \varphi a_\varepsilon^2 - 2\Lambda \varphi h, \quad (90)$$

где $h = \varepsilon e^{-F}$ и $\lambda_0 \equiv \lambda^2 \Lambda$ безразмерны, в то время как $\mu = m^2$ имеет размерность L^{-2} . Гамильтонова связь, которую нужно вычислить до перехода к координатам светового конуса, имеет вид

$$\mathcal{H}_v^{(1)} = \frac{\lambda_0 \varphi \dot{a}_\varepsilon^2}{h} - \dot{\varphi} \dot{F} + \mu \varphi a_\varepsilon^2 + 2\Lambda \varphi h = 0, \quad (91)$$

а все прочие уравнения вводятся просто с помощью вариаций лагранжиана (90). Вместо гамильтоновых уравнений запишем уравнения движения в виде уравнений первого порядка, похожих на (70). Вводя определения $\xi \equiv \varphi^2/2$, $\varphi \dot{a}/h \equiv b$, $A \equiv a/\chi$, $\mu_1 \equiv \mu/\lambda_0$ и обозначая действие $d/d\xi$ штрихом, получим

$$b' = -\mu_1 A, \quad H' = \mu A^2 H, \quad 2\xi a' = bH, \quad \xi \chi' = \left(2\Lambda \xi + \frac{\lambda_0 b^2}{2}\right) H, \quad (92)$$

где опущен индекс ε при a и A . В безмассовом пределе $\mu = \mu_1 = 0$, поэтому величины $H = H_0$, $b = b_0$ не зависят от ξ . Это немедленно приводит к трехмерному решению Максвелла–Эйнштейна. Действительно, имеем

$$h(\xi) = H_0 \chi(\xi), \quad a = a_0 + \frac{b_0 H_0}{2} \ln \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \chi = \chi_0 + \frac{\lambda_0 b_0^2 H_0}{2} \ln \frac{\xi}{\xi_0} + 2\Lambda(\xi - \xi_0), \quad (93)$$

и, таким образом, возвращаясь к переменной φ , получим (выбрав $\chi_0 = 0$ и обозначив $\lambda_0 b_0^2 H_0 \equiv \tilde{c}$)

$$h = H_0 \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \left(\frac{\tilde{c}}{2\xi} + 2\Lambda \right) = H_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \left(\frac{\tilde{c}}{\varphi} + 2\Lambda \varphi \right). \quad (94)$$

Формулы (93), (94) задают общее решение чисто дилатонной гравитации с потенциалом, пропорциональным выражениям в скобках (ср. с уравнением (67)).

Чтобы найти приближенные решения при малых, но конечных величинах μ, μ_1 , можно взять $H = H_0$, $b = b_0$ и выражения (93) для $a_0(\xi)$, $\chi_0(\xi)$, $A_0 = a_0/\chi_0$ и таким образом построить последовательные приближения для $b_i, H_i, a_i, \chi_i, A_i = a_i/\chi_i$. Уравнения (92) или их интегральное представление оказываются хорошо приспособленными для получения решения вблизи горизонта и вблизи сингулярностей при $\xi \rightarrow 0, \infty$. На самом деле они проще, чем приближенные решения, исследованные в работах [18]–[21]. На горизонте при $\xi = \xi_0$, когда $a_0 = \chi_0 = 0$, а величины H_0, A_0

остаются конечными, получаются сходящиеся разложения решения по степеням разности $\xi - \xi_0$. Более того, можно видеть, что радиус сходимости не может превышать ξ_0 (он может быть меньше, если имеется второй горизонт). Вблизи сингулярностей также можно найти разложения по степеням ξ , если правильным образом учесть логарифмические члены, присутствующие в нулевом приближении (94).

Более правильные, хотя и более сложные взаимодействия можно получить с помощью интегральных уравнений для $A(\xi)$, сходных с уравнениями (73), (74), если выбрать нулевое приближение $A = A_0$, решить уравнения для H и b , решить получающееся уравнение для $A(\xi)$, а потом повторить этот цикл. Упростить вычисления можно, если найти дополнительный приближенный интеграл. На этом пути скалярная формулировка выглядит более обещающей. Например, было показано, что потенциал в размерности $D = 3$ зависит от q^2/ξ и имеет место дополнительный интеграл (64), который, вероятно, можно применить при построении более эффективных приближений.

Благодарности. Автор благодарит Е. А. Давыдова за полезные замечания. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 11-02-01335_а, 11-02-12232-офи_м-2011).

Список литературы

- [1] V. Sahni, A. Starobinsky, *Internat. J. Modern Phys. D*, **15**:12 (2006), 2105–2132, arXiv: astro-ph/0610026.
- [2] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, *Internat. J. Modern Phys. D*, **15**:11 (2006), 1753–1935, arXiv: hep-th/0603057.
- [3] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Acad. Publ., Chur, Switzerland, 1990, arXiv: hep-th/0503203.
- [4] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, New York, 2005.
- [5] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [6] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва*, УРСС, М., 2008.
- [7] D. Langlois, *Lectures on inflation and cosmological perturbations*, arXiv: 1001.5259.
- [8] A. H. Guth, Y. Nomura, *Phys. Rev. D*, **86**:2 (2012), 023534, 24 pp., arXiv: 1203.6876.
- [9] D. Mulryne, J. Ward, *Class. Quantum Grav.*, **28**:20 (2011), 204010, 20 pp., arXiv: 1105.5421.
- [10] S. R. Green, E. J. Martinec, C. Quigley, S. Sethi, *Class. Quantum Grav.*, **29**:7 (2012), 075006, 16 pp., arXiv: 1110.0545.
- [11] N. Mavromatos, “The issue of dark energy in string theory”, *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy*, Lecture Notes in Physics, **720**, ed. L. Papantonopoulos, Springer, Berlin–Heidelberg, 2007, 333–374, arXiv: hep-th/0507006.
- [12] R. Bousso, *The cosmological constant problem, dark energy, and the landscape of string theory*, arXiv: 1203.0307.
- [13] S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Phys. Rep.*, **505**:2 (2011), 59–144, arXiv: 1011.0544.
- [14] T. Clifton, P. Ferreira, A. Padilla, C. Skordis, *Phys. Rep.*, **513**:1–3 (2012), 1–189, arXiv: 1106.2476.
- [15] D. Rodrigues, F. de Salles, I. Shapiro, A. Starobinsky, *Phys. Rev. D*, **83**:8 (2011), 084028, 14 pp., arXiv: 1101.5028.
- [16] Ph. Brax, *Acta Phys. Polon. B*, **43**:12 (2012), 2307–2329, arXiv: 1211.5237.

- [17] J. E. Lidsey, D. Wands, E. J. Copeland, *Phys. Rep.*, **337**:4–5 (2000), 343–492, arXiv: hep-th/9909061.
- [18] A. T. Filippov, *On Einstein–Weyl unified model of dark energy and dark matter*, arXiv: 0812.2616.
- [19] А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **163**:3 (2010), 430–448, arXiv: 1003.0782.
- [20] А. Т. Filippov, *Тр. МИАН*, **272** (2011), 117–128, arXiv: 1008.2333.
- [21] A. T. Filippov, “An old Einstein–Eddington generalized gravity and modern ideas on branes and cosmology”, *Gribov-80 Memorial volume*, eds. Yu. L. Dokshitzer, P. Levai, J. Nyiri, World Sci., Singapore, 2011, 479–495, arXiv: 1011.2445.
- [22] A. T. Filippov, *General properties and some solutions of generalized Einstein–Eddington affine gravity I*, arXiv: 1112.3023.
- [23] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2 + 1 Dimensions*, Cambridge Univ. Press, New York, 1998.
- [24] E. Witten, *Three-dimensional gravity revisited*, arXiv: 0706.3359.
- [25] A. T. Filippov, *Some unusual dimensional reductions of gravity: geometric potentials, separation of variables, and static-cosmological duality*, arXiv: hep-th/0605276.
- [26] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Series of Monographs on Physics, **69**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1983.
- [27] P. Breitenlohner, G. Gibbons, D. Maison, *Commun. Math. Phys.*, **120**:2 (1988), 295–333.
- [28] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [29] A. T. Filippov, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:21 (1996), 1691–1704; *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:01 (1997), 13–22, arXiv: gr-qc/9612058.
- [30] A. T. Filippov, *Integrable models of horizons and cosmologies*, arXiv: hep-th/0307266.
- [31] V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **140** (2007), 139–145, arXiv: hep-th/0307269.
- [32] V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Integrable low dimensional models for black holes cosmologies from high dimensional theories*, arXiv: hep-th/0504101.
- [33] В. де Альфаро, А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **162**:1 (2010), 41–68, arXiv: 0902.4445.
- [34] A. T. Filippov, D. Maison, *Class. Quantum Grav.*, **20**:9 (2003), 1779–1786, arXiv: gr-qc/0210081.
- [35] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, “The dynamics of general relativity”, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, Wiley, New York, 1962, 227–264, arXiv: gr-qc/0405109.
- [36] А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 115–131, arXiv: hep-th/0505060.
- [37] В. Де Альфаро, А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 422–452, arXiv: hep-th/0612258.
- [38] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2008.
- [39] D. Grumiller, W. Kummer, D. Vassilevich, *Phys. Rep.*, **369**:4 (2002), 327–430, arXiv: hep-th/0204253.
- [40] R. Jackiw, *ТМФ*, **92**:3 (1992), 404–414.
- [41] C. Callan Jr., S. Giddings, J. Harvey, A. Strominger, *Phys. Rev. D*, **45**:4 (1992), R1005–R1009.
- [42] V. P. Frolov, I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, Fundamental Theories of Physics, **96**, Springer, Berlin, 1998.
- [43] E. A. Davydov, A. T. Filippov, *Dilaton-scalar models in context of generalized affine gravity theories: their properties and integrability*, arXiv: 1302.6969.

- [44] L. H. Ford, *Phys. Rev. D*, **40**:4 (1989), 967–972.
- [45] M. Cavaglia, V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Internat. J. Modern Phys. D*, **4**:05 (1995), 661–672, arXiv: gr-qc/9411070; **5**:03 (1996), 227–250, arXiv: gr-qc/9508062.
- [46] M. Cavaglia, V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:05 (1995), 611–633, arXiv: gr-qc/9402031.
- [47] H. Hamber, *Quantum Gravitation. The Feynman Path Integral Approach*, Springer, Berlin, 2009.
- [48] D. Oriti (ed.), *Approaches to Quantum Gravity. Toward a New Understanding of Space, Time and Matter*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

Поступила в редакцию 12.04.2013