Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Однородные системы типа систем Штеккеля, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 1, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 11:56:46

© 1998 г.

А. В. Цыганов*

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА СИСТЕМ ШТЕККЕЛЯ

Рассматривается класс гамильтоновых динамических систем, интегрируемых методом разделения переменных, для которых интегрирование сводится к обращению отображения Абеля на гиперэллиптических кривых. Доказано, что производная отображения Абеля равна матрице Штеккеля, которая определяет диагональную риманову метрику и ортогональные криволинейные системы координат в плоском пространстве. Построены представления Лакса со спектральным параметром. Соответствующие классические r -матрицы являются динамическими. Показано, как теория редукции абелевых интегралов позволяет естественно обобщить класс точечных канонических преобразований.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод разделения переменных является одним из основных методов интегрирования уравнений движения динамических систем. Он позволяет свести интегрирование для случая многих степеней свободы к интегрированию последовательности одномерных задач. В работах Якоби было предложено рассматривать обратную задачу, т.е. начиная с некоторого набора разделенных одномерных задач построить различные классы вполне интегрируемых систем. При этом заданные переменные разделения отображаются различными способами в физические переменные, что и определяет различные методы разделения переменных. В рамках данного подхода в прошлом веке Лиувиль и Штеккель [1, 2] ввели простые системы, интегрируемые в квадратурах (системы Лиувилля — частный случай систем Штеккеля).

Вполне интегрируемые системы типа систем Штеккеля [1] являются голономными системами на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{j=1}^n g_j(q_1, \dots, q_n)(p_j^2 + U_j(q_j)). \quad (1.1)$$

* Научно-исследовательский институт физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.niif.spb.su

Здесь $\{p_j, q_j\}_{j=1}^n$ – канонические переменные в $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической формой и скобками Пуассона

$$\Omega_n = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j, \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}. \quad (1.2)$$

Приведем наиболее сильный вариант теоремы Штеккеля.

ТЕОРЕМА 1 ([2]). *Для гамильтоновой системы с гамильтонианом вида (1.1) следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби допускают разделение переменных;*
- 2) *существует невырожденная порядка n матрица Штеккеля $\mathbf{S}$, элемент s_{kj} которой зависит лишь от q_j :*

$$\det \mathbf{S} \neq 0, \quad \frac{\partial s_{kj}}{\partial q_m} = 0, \quad j \neq m,$$

причем выполнены следующие условия:

$$\sum_{j=1}^n s_{kj}(q_j) g_j(q_1, \dots, q_n) = \delta_{k1}; \quad (1.3)$$

- 3) *существуют n квадратичных по импульсам функционально независимых интегралов движения.*

Обозначим через $\mathbf{C} = [c_{ik}]$ матрицу, обратную к матрице Штеккеля $\mathbf{S}$, так что $c_{j1} = g_j$. С помощью данной матрицы образуем n величин:

$$I_k = \sum_{j=1}^n c_{jk}(p_j^2 + U_j), \quad I_1 = H, \quad (1.4)$$

которые являются функционально независимыми интегралами движения в инволюции. Совместная поверхность уровня этих интегралов

$$M_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{R}^{2n} : I_k(z) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n \right\}$$

диффеоморфна n -мерному тору [3], откуда сразу же следует, что

$$p_j^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k s_{kj}(q_j) - U_j(q_j), \quad (1.5)$$

где $S(q_1, \dots, q_n)$ – функция укороченного действия [3]. Поэтому для рассматриваемого случая уравнение Гамильтона–Якоби на M_α

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = 0 \Rightarrow g^{jj} \frac{\partial S}{\partial q_j} \frac{\partial S}{\partial q_j} = E \quad (1.6)$$

допускает разделение переменных

$$S(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n s_j(q_j), \quad s_j(q_j) = \int \sqrt{F_j(q_j)} dq_j, \quad (1.7)$$

где функции $F_j(\lambda)$ зависят от n параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$:

$$F_j(\lambda) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathfrak{s}_{kj}(\lambda) - U_j(\lambda).$$

Согласно стандартной процедуре интегрирования уравнения Гамильтона–Якоби в квадратурах величины $q_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_0(p_0, q_0)}^{\gamma_j(p_j, q_j)} \frac{\mathfrak{s}_{1j}(\lambda) d\lambda}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathfrak{s}_{1j}(\lambda) - U_j(\lambda)}} &= \beta_1 = t, \\ \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_0(p_0, q_0)}^{\gamma_j(p_j, q_j)} \frac{\mathfrak{s}_{kj}(\lambda) d\lambda}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathfrak{s}_{kj}(\lambda) - U_j(\lambda)}} &= \beta_k, \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отметим, что в случае финитного движения это движение, вообще говоря, будет уже не периодическим, а лишь условно-периодическим [1, 4]. Если λ_j^0 и λ_j – точки остановки, определяемые условием обращения в нуль функции $F_j(\lambda)$, то периоды движения системы определяются матрицей

$$w_{kj} = \int_{\lambda_j^0}^{\lambda_j} \frac{\mathfrak{s}_{kj}(\lambda) d\lambda}{\sqrt{F_j(\lambda)}}. \quad (1.9)$$

Таким образом, теорема Штеккеля [1] полностью решает вопрос о разделении переменных в уравнении Гамильтона–Якоби (1.6) с гамильтонианом H вида (1.1). При этом ортогональные координаты $\{q_j\}_{j=1}^n$ являются переменными разделения, только если диагональная риманова метрика

$$ds^2 = \sum_{j=1}^n g_{jj}(q_1, \dots, q_n) (dq^j)^2, \quad g_{jj}(q_1, \dots, q_n) \equiv g_j(q_1, \dots, q_n), \quad (1.10)$$

выражается через матрицу Штеккеля

$$g_{jj}(q_1, \dots, q_n) = \mathbf{H}_j^2(q_1, \dots, q_n) = \frac{\det \mathbf{S}}{\mathbf{S}^{j1}}, \quad (1.11)$$

где $\mathbf{S}^{j1}$ – алгебраическое дополнение к элементу $\mathbf{s}_{j1}$ матрицы $\mathbf{S}$ (1.3). Здесь g_{jj} – диагональная метрика, а $\mathbf{H}_j$ – коэффициенты Ламе. Современный подход к построению коэффициентов Ламе излагается в работах [5–7].

В то же время теорема Штеккеля позволяет свести интегрирование уравнений движения к задачам алгебраической геометрии. Действительно, каждое выражение (1.5) определяет риманову поверхность

$$\mathcal{C}_j: y_j^2 = F_j(\lambda), \quad F_j(\lambda) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{s}_{kj}(\lambda) - U_j(\lambda), \quad (1.12)$$

и все пары переменных разделения (p_j, q_j) лежат на этих гиперэллиптических алгебраических кривых (1.12). Объединение данных кривых задает n -мерное лагранжево подмногообразие полного симплектического многообразия

$$\mathcal{C}^{(n)}: \mathcal{C}_1(p_1, q_1) \times \mathcal{C}_2(p_2, q_2) \times \dots \times \mathcal{C}_n(p_n, q_n), \quad (1.13)$$

где импульсы находятся из уравнения (1.5). При этом задача интегрирования уравнений движения сводится к задаче обращения Якоби (1.8) на лагранжевом многообразии (1.13).

Предлагаемая работа состоит из двух частей. Во втором разделе однородные системы типа систем Штеккеля, для которых все потенциалы в гамильтониане H (1.1) равны $U_j(q_j) = U(q_j)$, рассматриваются в рамках алгебраической геометрии. Мы докажем, что матрица Штеккеля равна матрице Бриль–Нетер, т.е. производной отображения Абеля. Несмотря на то что все свойства систем Штеккеля полностью описываются отображением Абеля, в третьем разделе мы построим представление Лакса и изучим его свойства. Используя данное представление, в четвертом разделе мы рассматриваем системы криволинейных ортогональных координат в плоском пространстве и связанные с ними два класса канонических преобразований координат. Одно из достоинств этой схемы состоит в том, что построение представлений Лакса в методе классической r -матрицы позволяет достаточно легко перейти к рассмотрению квантовых систем Штеккеля и к разделению переменных в квантовой механике [8].

2. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА СИСТЕМ ШТЕККЕЛЯ

Далее мы будем рассматривать однородные системы штеккелевского типа, которые задаются на одной общей гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}_j \equiv \mathcal{C}$, например вида

$$\mathcal{C}: y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (\lambda - \lambda_i), \quad (2.1)$$

с единственной выделенной точкой Вейерштрасса P на бесконечности $\lambda = \infty$. В этом случае переменные $\{s_k, w_k\}$ (1.7), (1.9) отождествляются с переменными действие–угол на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$:

$$s_k = \oint_{A_k} y d\lambda, \quad w_k = \oint_{A_k} dw_k. \quad (2.2)$$

Таким образом, периоды w_k (1.9) приравниваются к периодам абелевых дифференциалов dw_k в каноническом базисе гомологий [3, 9, 10]. При этом симплектическая форма Ω (1.2):

$$\Omega_g = \sum_{j=1}^n ds_j \wedge dw_j, \quad (2.3)$$

является голоморфной или мероморфной 2-формой на алгебраической кривой $\mathcal{C}$ (в зависимости от типа используемых дифференциалов) [10].

Заметим, что геометрические переменные действие–угол (2.2) не содержат в себе информацию об исходной физической задаче. Только задавая связь этих переменных с физическими переменными или с переменными разделения в уравнении Гамильтона–Якоби, мы описываем конкретную интегрируемую систему. На примере систем типа систем Штеккеля мы покажем, как из данного отображения можно получить всю необходимую информацию о соответствующей интегрируемой системе.

Для однородных систем Штеккеля интегрирование уравнений движения (1.8) сводится к решению задачи обращения отображения Абеля [11] на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$. Поэтому рассмотрим эту задачу подробнее и начнем со случая, когда род кривой $\mathcal{C}$ равен числу степеней свободы $g = n$. Задача обращения отображения Абеля $\mathcal{U}: \text{Div}(\mathcal{C}) \rightarrow J(\mathcal{C})$ ставится так (задача обращения Якоби (1.8)): для данной точки $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g) \in J(\mathcal{C})$ найти g точек $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ римановой поверхности $\mathcal{C}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^g \int_{\gamma_0}^{\gamma_k} dw_j = \beta_j, \quad j = 1, \dots, g. \quad (2.4)$$

Здесь dw_j – канонический базис голоморфных дифференциалов кривой $\mathcal{C}$, γ_0 – подходящим образом выбранная базовая точка поверхности $\mathcal{C}$ [11].

Для однородных систем штеккелевского типа неупорядоченные наборы из g точек поверхности $\mathcal{C}$, образующие g -ю симметрическую степень $\mathcal{C}^{(g)} = S^g \mathcal{C}$ кривой $\mathcal{C}$, определяют лагранжево подмногообразие $\mathcal{C}^{(g)}$ (1.13) фазового пространства. На языке отображения Абеля $\mathcal{U}$ задачу обращения Якоби (2.4) можно переписать так: необходимо обратить отображение

$$\mathcal{U}: \mathcal{C}^{(g)} \rightarrow J(\mathcal{C}), \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{U}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g) = \mathcal{U}(\gamma_1) + \mathcal{U}(\gamma_2) + \dots + \mathcal{U}(\gamma_g).$$

Известно [11], что для почти любой точки $\beta \in J(\mathcal{C})$ решение $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ существует и определяется системой (2.4) однозначно (без учета порядка точек γ_j).

Предположим, что точка $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$, $k \leq g$, принадлежит пространству $\mathcal{C}^{(k)}$. Производная отображения Абеля (2.5) в точке D есть линейное отображение из касательного пространства $T_D(\mathcal{C}^{(g)})$ к лагранжеву многообразию $\mathcal{C}^{(g)}$ в точке D в касательное пространство $T_{\mathcal{U}(D)}(J(\mathcal{C}))$ якобиана $J(\mathcal{C})$ в точке $\mathcal{U}(D)$:

$$\mathcal{U}_D^* : T_D(\mathcal{C}^{(k)}) \rightarrow T_{\mathcal{U}(D)}(J(\mathcal{C})).$$

Если D – дивизор общего положения и координаты z_j на кривой $\mathcal{C}$ в окрестности точек γ_j образуют систему локальных координат $(z_1, \dots, z_k)$ в окрестности точки D в $\mathcal{C}^{(k)}$, то канонический базис dw_k ($k = 1, \dots, g$) в пространстве голоморфных дифференциалов $\mathcal{H}_1(\mathcal{C})$ имеет вид

$$dw_k = \phi_{kj}(z_j) dz_j,$$

где функции $\phi_{kj}(z_j)$ голоморфны. Отображение Абеля $\mathcal{U}$ в данной окрестности точки D равно

$$\mathcal{U}(z_1, \dots, z_k) = \left(\sum_{j=1}^k \int_{\gamma_0}^{z_j} \phi_{1j}(z_j) dz_j, \dots, \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_0}^{z_j} \phi_{gj}(z_j) dz_j \right),$$

следовательно,

$$\mathcal{U}_D^* = \begin{pmatrix} \phi_{11}(\gamma_1) & \cdots & \phi_{g1}(\gamma_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1k}(\gamma_k) & \cdots & \phi_{gk}(\gamma_k) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Матрица $\mathcal{U}_D^*$ называется матрицей Бриль–Нетер.

ТЕОРЕМА 2. *Транспонированная матрица Бриль–Нетер $\mathcal{U}_D^{*t}$, которая является производной отображения Абеля $\mathcal{U}$ кривой $\mathcal{C}$ рода $g \geq n$, вычисленной в точке общего положения D , $\deg D = n$, равна матрице Штеккеля для однородных систем типа систем Штеккеля на фазовом пространстве $\mathbb{C}^{2n}$.*

Для дивизора общего положения D , $\deg D = g$, транспонированная матрица $\mathbf{S} = \mathcal{U}_D^{*t}$ невырождена и удовлетворяет всем условиям теоремы Штеккеля. Таким образом, производная отображения Абеля определяет гамильтониан и полный набор интегралов движения (1.4) для однородных систем типа систем Штеккеля.

Если род кривой g больше, чем число степеней свободы n , то достаточно рассмотреть ограничение отображения Абеля (2.5) на лагранжево подмногообразие $\mathcal{C}^{(n)}$, $g > n$. При этом переменные разделения $\{p_j, q_j\}_{j=1}^n$ получаются из $2n$ голоморфных переменных действие–угол, а соответствующая матрица Штеккеля – $(n \times n)$ -блок транспонированной матрицы Бриль–Нетер $\mathbf{S} = \mathcal{U}_D^{*t}$ (2.6).

Рассмотрим подробнее один пример, ограничившись случаем $n = g$. Выберем следующий базис в пространстве голоморфных дифференциалов $\mathcal{H}_1(\mathcal{C})$:

$$dw_j = \frac{\lambda^{j-1}}{y(\lambda)} d\lambda, \quad j = 1, \dots, g. \quad (2.7)$$

Используя соответствующие переменные действие–угол (1.7), (1.9) и решая проблему обращения (1.8), получим переменные разделения

$$p_j = y(\gamma_j), \quad q_j = \lambda(\gamma_j), \quad j = 1, \dots, g, \quad (2.8)$$

образующие дивизор общего положения $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ на кривой $\mathcal{C}$ (дивизор простых полюсов для функции Бейкера–Ахиезера [6], которая задается своими аналитическими свойствами на кривой $\mathcal{C}$).

Отображение $\mathcal{U}_D^*$ индуцирует каноническое отображение кривой $\mathcal{C}$ в $(g-1)$ -мерное проективное пространство $\mathbb{P}^{g-1}$. Для гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ рода $g \geq 2$ каноническое отображение $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ является композицией двойного накрытия $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, посылающего (y, λ) в λ , с отображением Веронезе $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. Для выбранного нами базиса (2.7) каноническое отображение выглядит очень просто:

$$(y, \lambda) \rightarrow \lambda \rightarrow [\lambda^{g-1}, \lambda^{g-2}, \dots, \lambda, 1].$$

Соответственно введем транспонированную матрицу Бриль–Нетер

$$U^{*t}(\lambda = \gamma_1, \mu = \gamma_2, \dots, \nu = \gamma_g) = \begin{pmatrix} \lambda^{g-1} & \mu^{g-1} & \dots & \nu^{g-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \mu & \dots & \nu \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} (D) \quad (2.9)$$

и матрицу Штеккеля

$$\mathbf{S}(q_1, q_2, \dots, q_g) = \mathbf{S}(\lambda, \mu, \dots, \nu) \Big|_{\lambda=q_1, \mu=q_2, \dots, \nu=q_g}, \quad \mathfrak{s}_{kj}(q_j) = \lambda^{g-k} \Big|_{\lambda=q_j}. \quad (2.10)$$

В этом случае диагональная метрика $g_{jj}(q_1, q_2, \dots, q_g)$ определяется по правилу (1.11). Тем не менее подставим данную матрицу в алгебраическое уравнение (1.3) для диагональной метрики $g_{jj}(q_1, q_2, \dots, q_g)$ и преобразуем это уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \mathfrak{s}_{kj}(q_j) g_{jj}(q_1, q_2, \dots, q_g) &= \delta_{k1} = \\ &= \sum_{j=1}^g \text{Res} \Big|_{\lambda=q_j} \frac{\lambda^{k-1}}{e(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\lambda^{k-1}}{e(\lambda)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, мы ввели новое определение для диагональной метрики

$$g_{jj}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \text{Res}_{\lambda=q_j} \frac{1}{e(\lambda)},$$

где функция $e(\lambda)$ определяется своим главным свойством – ее нули дают решение проблемы обращения отображения Абеля. В общем случае функция, которая имеет g нулей, дающих решение задачи обращения Якоби (2.5), известна:

$$e(\lambda) = \theta(\mathcal{U}(\gamma_1, \dots, \gamma_g) - \beta - K), \quad \mathcal{U}(\gamma_1, \dots, \gamma_g) = \mathcal{U}(\gamma_1) + \dots + \mathcal{U}(\gamma_g), \quad (2.12)$$

где K – вектор римановых констант [11]. Соответствующие эллиптические диагональные римановы метрики общего вида рассмотрены в работах [12, 6].

Всюду далее для примера и сравнения с известными в физике результатами мы ограничимся только полиномами $e(\lambda)$ переменной λ . Для полиномиальной функции $e(\lambda)$ докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Полиномиальная функция $e(\lambda)$, имеющая g нулей на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$, дающих решение задачи обращения Якоби, полностью определяет диагональную метрику для некоторой однородной системы типа систем Штеккеля. При этом функция $e(\lambda)$ и соответствующая метрика равны*

$$e(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - q_k), \quad e^{-1}(\lambda) = \prod_{k=1}^g (\lambda - q_k)^{-1}, \quad (2.13)$$

$$g_{jj}(q_1, q_2, \dots, q_g) = \text{Res}_{\lambda=q_j} e^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\prod_{j \neq k}^g (q_j - q_k)}. \quad (2.14)$$

Для доказательства достаточно рассмотреть следующий интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\lambda^k}{e(\lambda)} = \sum_{j=1}^g \text{Res}_{\lambda=q_j} \frac{\lambda^k}{e(\lambda)} = -\text{Res}_{\lambda=\infty} \frac{\lambda^k}{e(\lambda)} = \delta_{k,g-1}, \quad (2.15)$$

где контур C охватывает все точки q_j .

Введенная нами функция $e(\lambda)$ не зависит от параметров λ_j кривой $\mathcal{C}$ (интегралов движения) и от выбора базиса в пространстве голоморфных дифференциалов $\mathcal{H}_1(\mathcal{C})$. Например, рассмотрим ряд следующих эквивалентных матриц Штеккеля:

$$s_{kj}(\lambda)|_{q_j} = \phi_{kj}(\lambda)|_{q_j}, \quad \phi_{kj}(\lambda) = \lambda^{g-k} + a_1^{(j)} \lambda^{g-k-1} + \dots + a_{g-k}^{(j)}. \quad (2.16)$$

Здесь полиномы ϕ_{kj} образуют различные произвольные базисы в кольце полиномов степени $g-1$. Подставляя (2.16) в (2.11) и (2.15), получаем все то же универсальное решение $e(\lambda)$ (2.13). В дальнейшем мы докажем, что гамильтониан H (1.1) с метрикой (2.13) связан с выделенной точкой Вейерштрасса кривой $\mathcal{C}$ на бесконечности $\lambda = \infty$. При этом

различные матрицы Штеккеля (2.16) отвечают различному выбору семейств инволютивных интегралов движения для одного гамильтониана. Полнота и функциональная независимость интегралов в этих семействах являются следствием полноты и независимости базисных элементов (2.16) в кольце полиномов.

Рассмотрим теперь однородные системы типа систем Штеккеля на гиперэллиптических кривых $\mathcal{C}$ рода $g \neq n$. Если род кривой g больше числа степеней свободы n , то гиперэллиптическая кривая $\mathcal{C}$ рода g разлагается по правилу

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (\lambda - \lambda_i) = U_{2g+1}(\lambda) + \prod_{i=1}^{2\tilde{g}+1} (\lambda - \tilde{\lambda}_i), \quad \tilde{g} \leq g. \quad (2.17)$$

Здесь $U_{2g+1}(\lambda)$ — полиномиальный потенциал степени не более чем $2g + 1$ в гамильтониане (1.12). Матрица Штеккеля и функция $e(\lambda)$ строятся по вспомогательной кривой меньшего рода $\tilde{g}$

$$\tilde{\mathcal{C}}: \quad \tilde{y}^2 = \prod_{i=1}^{2\tilde{g}+1} (\lambda - \tilde{\lambda}_i). \quad (2.18)$$

Так как функция $e(\lambda)$ не зависит от параметров кривых $\mathcal{C}$ и $\tilde{\mathcal{C}}$, то потенциал U_{2g+1} в (2.17) имеет произвольную полиномиальную форму.

Если род кривой g меньше числа степеней свободы n , то соответствующая голоморфная симплектическая 2-форма Ω_n вырождена [10]. Данное вырождение снимается, если при построении переменных действие–угол использовать g голоморфных дифференциалов и $(n - g)$ мероморфных дифференциалов на кривой $\mathcal{C}$ [10]. Таким образом, при $g < n$ невырожденная алгебро-геометрическая симплектическая форма Ω_n на лагранжевом многообразии $\mathcal{C}^{(n)}$ мероморфна. Матрица Штеккеля для таких систем также строится по производной отображения, связывающего переменные разделения и переменные действие–угол. Хотя данная мероморфная симплектическая форма невырождена, тем не менее далее мы докажем, что соответствующие однородные системы типа систем Штеккеля являются вырожденными, или суперинтегрируемыми. Напомним, что для вырожденных вполне интегрируемых систем число функционально независимых интегралов движения больше числа степеней свободы.

Рассмотрим различные обобщения предложенных результатов. Зададим гиперэллиптическую кривую $\mathcal{C}$ в форме

$$\mathcal{C}: \quad y^2 = F(\lambda) = \frac{P_l(\lambda)}{Q_m(\lambda)} = \frac{\prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - \lambda_j)}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)}, \quad m \leq 2g + 1, \quad (2.19)$$

где $\{\delta_k\}$ — произвольные константы, при этом

$$\mathfrak{s}_{kj}(\lambda) \Big|_{\lambda=q_j} = \frac{\phi_{kj}(\lambda)}{Q_m(\lambda)} \Big|_{q_j}, \quad e(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^g (\lambda - q_j)}{Q_m(\lambda)}. \quad (2.20)$$

Кроме этого, алгебраическое уравнение (2.11) ковариантно относительно замены

$$\mathbf{S} \rightarrow R^{-1}(\lambda)\mathbf{S}, \quad e(\lambda) \rightarrow R^{-1}(\lambda)e(\lambda),$$

что приводит к общему виду метрики на кривой $\mathcal{C}$

$$g_{jj}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \text{Res}|_{\lambda=q_j} \left(\frac{Q_m(\lambda)R(\lambda)}{\prod_{j=1}^g (\lambda - q_j)} \right). \quad (2.21)$$

Итак, по гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ рода g можно построить семейство однородных систем типа систем Штекеля на фазовом пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ с помощью отображения Абеля $\mathcal{U}$, его производной $\mathcal{U}_D^*$ и их ограничения на лагранжево подмногообразие $\mathcal{C}^{(n)}$. При этом диагональная метрика $g_{jj}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ (1.11) в гамильтониане (1.1) не зависит от параметров кривой и задается числом степеней свободы.

С другой стороны, данная диагональная метрика $g(\lambda, q_1, \dots, q_n)$ (2.14) может быть связана с различными гиперэллиптическими кривыми. Соответствующие этим кривым гамильтоновы системы отличаются друг от друга формой и степенью полиномиального потенциала $U(\lambda)$ (2.17).

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА

Построение представления Лакса является одной из важнейших современных идей при изучении различных интегрируемых систем. Предположим, что нам удалось найти пару матриц L и A , элементы которых зависят от динамических переменных и спектрального параметра λ так, что при этом уравнения движения эквивалентны уравнению Лакса

$$\dot{L} = \{H, L\} = [L, A].$$

Следовательно, собственные значения матрицы $L(\lambda)$ и соответствующая спектральная кривая

$$\mathcal{C}: \det(L(\lambda) - y) = 0 \quad (3.1)$$

от времени не зависят, и, таким образом, параметры спектральной кривой (3.1) являются интегралами движения. Хотя представления Лакса получены для большинства из всех известных вполне интегрируемых систем, общего метода для построения представления Лакса для какой-либо данной интегрируемой системы пока не известно.

Все необходимые сведения об однородных системах Штекеля могут быть получены из свойств отображения Абеля, тем не менее в данном разделе мы построим и изучим соответствующее представление Лакса. Мы рассматриваем построение представления Лакса в классической механике как необходимый промежуточный шаг к изучению квантовых аналогов данных систем.

Рассмотрим уравнение для алгебро-геометрической симплектической формы на спектральной кривой оператора Лакса L , предложенное в работе [10],

$$\Omega_g = - \sum_{\alpha} \text{Res}_{P_{\alpha}} \frac{\langle \delta \psi^+ \wedge \delta L \psi \rangle}{\langle \psi^+ \psi \rangle}. \quad (3.2)$$

Здесь Ω_g – некоторое ограничение общей алгебро-геометрической симплектической формы, определяемой парой абелевых дифференциалов с заданными особенностями в окрестностях выколотых точек P_{α} на кривой $\mathcal{C}$ [10]. Поведение дифференциалов около точек P_{α} задается таким образом, что существование общей системы переменных действие–угол [13] гарантируется. Функции ψ и ψ^+ , определенные на $\mathcal{C}$, – функция Бейкера–Ахизера оператора Лакса L и дуальная к ней функция.

В принципе для данной кривой $\mathcal{C}$, отождествив алгебро-геометрическую симплектическую 2-форму Ω_g с заданной нам изначально симплектической формой на фазовом многообразии и задав собственные функции оператора L – функции Бейкера–Ахизера ψ , ψ^+ , мы можем попробовать восстановить соответствующий им оператор Лакса L . Таким образом, мы хотим восстановить оператор Лакса по его спектральным данным.

Для некоторых частных случаев систем типа систем Штеккеля известны (2×2) -матрицы Лакса [14, 15] и их собственные функции (векторные функции Бейкера–Ахизера). С другой стороны, скалярная функция Бейкера–Ахизера ψ , задаваемая своими аналитическими свойствами на кривой $\mathcal{C}$ и описывающая диагональные римановы метрики общего вида, построена в работе [6].

Поэтому, отождествив заданную симплектическую форму Ω_n (1.2) с алгебро-геометрической формой Ω_g на алгебраической кривой $\mathcal{C}$ рода g , попробуем восстановить матрицу Лакса для геодезического движения, используя следующий набор данных:

- 1) $L(\lambda)$ – (2×2) -матрица со спектральной гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ рода $g = [(n-1)/2]$;
- 2) нормировка $\vec{\alpha}$ векторной функции Бейкера–Ахизера $\vec{\psi}$ выбрана постоянной [8]

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\psi} \rangle = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 = 1, \quad \vec{\alpha} = (0, 1);$$

- 3) первая компонента функции Бейкера–Ахизера $\vec{\psi}$ в (3.2) пропорциональна единственной скалярной функции Бейкера–Ахизера ψ на алгебраической кривой $\mathcal{C}$ со стандартными аналитическими свойствами [6].

В первом предположении n – число степеней свободы, которое для вполне интегрируемых систем равно числу интегралов движения. Интегралы движения являются $2g + 1$ параметрами кривой $\mathcal{C}$ рода g . Следовательно, для геодезического движения выбирается кривая минимально допустимого рода $g = [(n-1)/2]$ для интегрируемых систем на $2n$ -мерном фазовом пространстве. В силу этого форма Ω_g в (3.2) является минимальным мероморфным ограничением общей алгебро-геометрической симплектической формы, построенной в [10] для данной кривой.

Второе и третье предположения позволяют свести собственную функцию оператора Лакса (векторную функцию Бейкера–Ахиезера) к известной скалярной функции Бейкера–Ахиезера [6], которая определяется своими аналитическими свойствами. При этих предположениях матрица Лакса L в уравнении (3.2) полностью определяется данной скалярной функцией ψ на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$. Дивизор полюсов функции ψ совпадает с дивизором нулей функции $e(\lambda)$, и эти две функции взаимосвязаны.

Нам будет удобнее сначала выписать матрицу Лакса в терминах функции $e(\lambda)$, определяемой обращением отображения Абеля $\mathcal{U}$. Обозначим переменную времени символом x и введем производные по времени e_x данной функции

$$e(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)}, \quad m \leq n, \quad e_x(\lambda) = \{H, e(\lambda)\}, \quad (3.3)$$

где $\{\delta_k\}_{k=1}^m$ — m произвольных параметров и гамильтониан геодезического движения равен

$$H = \sum_{j=1}^n g_{jj}(q_1, \dots, q_n) p_j^2, \quad g_{jj}(q_1, \dots, q_n) = \text{Res} \Big|_{\lambda=q_j} \frac{1}{e(\lambda)}. \quad (3.4)$$

В этом случае матрицы L и A в представлении Лакса:

$$L_x(\lambda) = \{H, L\} = [L, A],$$

имеют вид

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \begin{pmatrix} -e_x/2 & e \\ -e_{xx}/2 & e_x/2 \end{pmatrix} (\lambda) \equiv \begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix} (\lambda), \\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Гамильтониан геодезического движения H (3.4) равен главному вычету в выделенной точке Вейерштрасса $\lambda = \infty$ на бесконечности

$$H = -\text{Res} \Big|_{\lambda=\infty} \lambda^{n-m} \det L(\lambda), \quad (3.6)$$

а спектральная кривая $\mathcal{C}$ матрицы $L(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: \quad y^2 &= -F(\lambda) \equiv \det L(\lambda), \\ F(\lambda) &= -h^2(\lambda) - e(\lambda)f(\lambda) = \frac{e \cdot e_{xx}}{2} - \frac{e_x^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

По определению функции $e(\lambda)$ (2.13) ее нули равны переменным деления q_j

$$e(\lambda) \Big|_{\lambda=q_j} \equiv L_{12}(\lambda) \Big|_{\lambda=q_j} = 0.$$

Сопряженные к ним импульсы задаются по правилу

$$p_j = h(\lambda)|_{\lambda=q_j}, \quad h(\lambda) = \frac{-e_x}{2} = e(\lambda) \sum_{j=1}^n \frac{g_{jj}(q_1, \dots, q_n) p_j}{\lambda - q_j}.$$

По своему определению пары сопряженных переменных разделения $\gamma_j = (p_j, q_j)$ (2.8) расположены на спектральной кривой $\mathcal{C}$ матрицы Лакса

$$y^2(\gamma_j) = p_j^2 = h^2(\lambda)|_{\lambda=q_j} = -F(\lambda = q_j) = -F(\lambda)|_{\gamma_j}$$

(в соответствии с работой [8]).

Рациональная функция $F(\lambda)$ допускает различные представления, например

$$F(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^n I_j \lambda^{n-j}}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)} = \sum_{k=1}^m \frac{J_k}{(\lambda - \delta_k)} + \sum_{k=m+1}^n J_k \lambda^{n-k-1}. \quad (3.8)$$

Здесь $\{I_j\}_{j=1}^n$ и $\{J_k\}_{k=1}^n$ — два семейства функционально независимых интегралов движения. Первое семейство интегралов $\{I_j\}_{j=1}^n$ в разложении (3.8) соответствует матрице Штеккеля вида (2.9). Множество эквивалентных матриц Штеккеля (2.16) отвечает различным представлениям числителя рациональной функции $F(\lambda)$ (3.8). Второе семейство интегралов $\{J_k\}_{k=1}^n$ в разложении (3.8) связано с выбором базиса абелевых дифференциалов в окрестностях особых точек $\{\delta_k, \infty\}$ кривой $\mathcal{C}$. Конечно, все интегралы, порожденные функцией $F(\lambda)$, находятся в инволюции.

Спектральная кривая матрицы Лакса $L(\lambda)$ (3.1) не зависит от времени, что непосредственно дает

$$\{H, F(\lambda)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x^3 e(\lambda) = e_{xxx} = 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, мы рассматриваем полиномиальные решения $e(\lambda) = \prod (\lambda - q_j(t))$ дифференциального уравнения третьего порядка (3.9) и изучаем гамильтонову динамику нулей данных решений $q_j(t)$ [16]. Напомним, что ∂_x обозначает производную по времени.

Подставив функцию $e(\lambda)$ (3.3) и гамильтониан H (3.4) в уравнение (3.9), получим уравнения для диагональной метрики $g_{jj} = \mathbf{H}_j^2$ (1.10). С помощью коэффициентов вращения

$$\beta_{ij} = \frac{\partial_i \mathbf{H}_j}{\mathbf{H}_i}, \quad i \neq j, \quad (3.10)$$

данные уравнения могут быть приведены к известным уравнениям Ламе [5]

$$\begin{aligned} \partial_k \beta_{ij} &= \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь $i \neq j \neq k$ обозначает, что индексы i, j, k не совпадают.

Конечно, данные уравнения могут быть получены вне связи с представлением Лакса или функцией Бейкера–Ахиезера непосредственно из определения метрики (1.11) и матрицы Штеккеля как производной отображения Абеля с помощью только свойства этого отображения.

Уравнения (3.11) эквивалентны тому, что компоненты тензора кривизны равны нулю [5–7]. Поэтому рассматриваемая диагональная метрика является плоской метрикой на римановом многообразии $(\mathbb{C}^n, g)$ с ортогональными координатами $\{q_j\}$. Налагая дополнительные аналитические условия на функцию $e(\lambda)$ или, что эквивалентно, на оператор Лакса $L(\lambda)$ [15], мы можем описать диагональные метрики [7] для римановых многообразий постоянной кривизны.

Рассмотрим операторы Лакса для гиперэллиптических кривых $\mathcal{C}$ более высоких родов. Начнем с вычисления скобок Пуассона для матрицы Лакса $L(\lambda)$ при движении по геодезическим. Данное вычисление позволит нам отождествить матрицу (3.5) с элементом алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [17] в фундаментальном представлении и затем использовать теорию представлений алгебры $sl(2)$ [18].

ТЕОРЕМА 3. *Скобки Пуассона для матрицы Лакса $L(\lambda)$ (3.5) записываются в виде*

$$\{\overset{1}{L}(\lambda), \overset{2}{L}(\mu)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), \overset{1}{L}(\lambda)] - [r_{21}(\lambda, \mu), \overset{2}{L}(\mu)], \quad (3.12)$$

если и только если $m \leq n$ в определении функции $e(\lambda)$ (3.3). Матрица $r_{ij}(\lambda, \mu)$ – классическая рациональная r -матрица на алгебре петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [19]:

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{\Pi}{\lambda - \mu}, \quad r_{21}(\lambda, \mu) = \Pi r_{12}(\mu, \lambda) \Pi, \quad (3.13)$$

здесь Π – оператор перестановки во вспомогательном пространстве [17] и используются общепринятые тензорные обозначения

$$\overset{1}{L}(\lambda) = L(\lambda) \otimes I, \quad \overset{2}{L}(\mu) = I \otimes L(\mu).$$

Конечно, скобки Пуассона для матрицы Лакса $L(\lambda)$ (3.5) определяются соответствующей симплектической структурой Ω (2.3). Все вычисления сводятся к рассмотрению двух скобок

$$\{e(\lambda), e(\mu)\} = 0 \quad (3.14)$$

и

$$\begin{aligned} \{h(\lambda), e(\mu)\} &= \left\{ e(\lambda) \sum_{j=1}^n \frac{g_{jj}(q_1, \dots, q_n) p_j}{\lambda - q_j}, \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)} \right\} = \\ &= -e(\lambda) e(\mu) \sum_{j=1}^n \frac{g_{jj}}{(\lambda - q_j)(\mu - q_j)} = \\ &= \frac{e(\lambda) e(\mu)}{\lambda - \mu} \sum_{j=1}^n \left(\frac{g_{jj}}{\lambda - q_j} - \frac{g_{jj}}{\mu - q_j} \right) = \frac{1}{\lambda - \mu} [e(\mu) - e(\lambda)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь мы использовали стандартное разложение рациональной функции

$$e^{-1}(\lambda) \equiv g(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{g_{jj}}{\lambda - q_j}, \quad g_{jj} = \text{Res}|_{\lambda=q_j} g(\lambda).$$

Другие скобки вычисляются из этих двух, т.к. все элементы матрицы Лакса $L(\lambda)$ являются производными от единственной функции $e(\lambda)$ (3.5):

$$\begin{aligned} \{h(\lambda), h(\mu)\} &= 0, \\ \{f(\lambda), e(\mu)\} &\equiv \partial_x \{h(\lambda), e(\mu)\} = \frac{2}{\lambda - \mu} [h(\lambda) - h(\mu)], \\ \{f(\lambda), h(\mu)\} &\equiv -\frac{1}{2} \partial_x^2 \{h(\lambda), e(\mu)\} = \frac{1}{\lambda - \mu} [f(\lambda) - f(\mu)], \\ \{f(\lambda), f(\mu)\} &\equiv -\frac{1}{2} \partial_x^3 \{h(\lambda), e(\mu)\} = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

При вычислении первой скобки используется комбинация производных от скобок (3.14) и (3.15), а для вычисления последней скобки применяется уравнение (3.9).

Если, напротив, рациональная функция $e(\lambda)$ не имеет особенностей в выделенной точке Вейерштасса P кривой $\mathcal{C}$ при $\lambda = \infty$, т.е. если $m > n$ в определении метрики (3.5), то обратная функция $e^{-1}(\lambda)$ представляется как

$$e^{-1}(\lambda) = g(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{g_{jj}}{\lambda - q_j} + \xi(\lambda, q_1, \dots, q_n).$$

Здесь остаток $\xi(\lambda)$ — некоторый полином от λ . Подставляя функцию $e(\lambda)$ в уравнения (3.14)–(3.16), получим, что симметрия последних скобок Пуассона (3.16) приводит к следующему ограничению на полиномиальный остаток $\xi(\lambda, q_1, \dots, q_n)$:

$$\frac{\partial \xi(\lambda, q_1, \dots, q_n)}{\partial \lambda} = 0.$$

Алгебра (3.12) — линейная r -матричная алгебра, которая определяется классической r -матрицей и позволяет описывать гамильтоновы системы на дуальном пространстве алгебры Ли $sl(2)$ со стандартной скобкой Ли–Пуассона. При этом r -матрица в уравнении (3.13) — стандартная рациональная r -матрица на алгебре петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [19]. Более общая форма функции $e(\lambda)$ (2.12) приводит к тригонометрическим и эллиптическим r -матрицам [19, 20] и соответствующим скрученным алгебрам петель.

Таким образом, представление Лакса (3.5) с полюсами в точках $\{\delta_k\}_{k=1}^m$ (3.3) для геодезического движения (3.4) можно отождествить с элементом пополненной алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [19] в фундаментальном представлении. Поэтому далее мы будем использовать внешний автоморфизм пространства бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$ [18].

Рассмотрим некоторое бесконечномерное представление алгебры Ли $sl(2)$ в пространстве V . Введем операторы $\{s_3, s_{\pm}\} \in \text{End}(V)$ со стандартными скобками Ли–Пуассона

$$[s_3, s_{\pm}] = \pm s_{\pm}, \quad [s_+, s_-] = 2s_3 \quad (3.17)$$

и единственным оператором Казимира

$$\Delta = s_3^2 + \frac{1}{2}(s_+s_- + s_-s_+). \quad (3.18)$$

Если оператор s_+ обратим в пространстве $\text{End}(V)$, то отображение

$$\begin{aligned} s_3 &\rightarrow s'_3 = s_3, & s_+ &\rightarrow s'_+ = s_+, \\ s_- &\rightarrow s'_- = s_- + f s_+^{-1}, & f &\in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

является внешним автоморфизмом пространства бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$ в линейном пространстве V . Отображение (3.19) сдвигает спектр оператора Δ :

$$\Delta \rightarrow \Delta' = \Delta + f, \quad (3.20)$$

при этом f является свободным параметром отображения.

Применяя данный автоморфизм “подстилающей” конечномерной алгебры $sl(2)$ непосредственно к представлению $L(\lambda)$ (3.5) бесконечномерной алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$, построим новое семейство матриц Лакса [18]

$$\begin{aligned} L'(\lambda) &= L(\lambda) - \sigma_- \cdot [\phi(\lambda)e^{-1}(\lambda)]_N, & \sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A'(\lambda) &= A - \sigma_- \cdot [\phi(\lambda)e^{-2}(\lambda)]_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_N(\lambda) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь параметрическая функция $\phi(\lambda)$ – произвольная функция спектрального параметра λ и $[z]_N$ – проекция элемента z на ad_R^* -инвариантные пуассоновы подпространства начальных r -скобок (3.12) [20, 18]. Для рациональной r -матрицы (3.13) данные проекции являются линейными комбинациями тейлоровских проекций

$$[z]_N = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k \lambda^k \right]_N \equiv \sum_{k=0}^N z_k \lambda^k \quad (3.22)$$

или лорановских проекций [20, 18].

Отображение (3.21) одного представления алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$ в различные представления соответствующей универсальной обертывающей алгебры $U(\mathcal{L})$ можно рассматривать как одевающую процедуру. Эта процедура позволяет создавать матрицы Лакса $L'_N(\lambda)$ для бесконечного семейства интегрируемых систем из одной известной

матрицы Лакса для движения по геодезическим. Отображения (3.21) сохраняют диагональную метрику $g_j(q_1, \dots, q_n)$ в гамильтониане (1.1), изменяя при этом потенциал $U(q_j)$. Поэтому отображения (3.21) “одевают” начальную кривую $\tilde{C}$ (2.18) минимально допустимого рода $g = [(n - 1/2)]$, задающую метрику, для всех потенциальных однородных систем типа систем Штеккеля на фазовом пространстве $\mathbb{C}^{2n}$.

Новая матрица Лакса $L'(\lambda)$ (3.21) удовлетворяет линейным r -скобкам (3.12), если при этом заменить постоянные на фазовом пространстве r_{ij} -матрицы (3.13) динамическими r'_{ij} -матрицами, которые зависят только от половины динамических переменных

$$r_{12}(\lambda, \mu) \rightarrow r'_{12} = r_{12} - \frac{([\phi(\lambda)e^{-2}(\lambda)]_N - [\phi(\mu)e^{-2}(\mu)]_N)}{(\lambda - \mu)} \cdot \sigma_- \otimes \sigma_-. \quad (3.23)$$

Отдельно рассмотрим системы на фазовом пространстве $\mathcal{C}^{(n)}$ при $n > g$ (1.13), т.е. системы, для которых число степеней свободы n больше чем род g соответствующей спектральной кривой $\mathcal{C}$. Для таких систем алгебро-геометрическая симплектическая форма Ω мероморфна [10]. Мы докажем, что однородные системы типа систем Штеккеля с мероморфной симплектической формой являются вырожденными, или суперинтегрируемыми.

ТЕОРЕМА 4. *Полный набор интегралов движения для вырожденных однородных систем Штеккеля с мероморфной симплектической формой Ω_g определяется на алгебраической поверхности вида*

$$\mathcal{C}(y, \lambda, \mu): \quad \det(yI + \Pi L'(\lambda) \otimes L'(\mu)) = 0. \quad (3.24)$$

Здесь мы используем внешнее тензорное произведение двух матриц Лакса $L'(\lambda)$ и $L'(\mu)$, I – единичная (4×4) -матрица и Π – (4×4) -матрица перестановки в $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ [21]. Непосредственные вычисления показывают, что уравнения движения для новой (4×4) -матрицы

$$L(\lambda, \mu) = \Pi L'(\lambda) \otimes L'(\mu)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(\lambda, \mu) &= L(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu) - \Pi A(\lambda, \mu) \Pi^{-1} L(\lambda, \mu), \\ A(\lambda, \mu) &= A(\lambda) \otimes I + I \otimes A(\mu), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $A(\lambda)$ – вторая матрица в представлении Лакса.

Из определения (3.21) следует, что $n > g$, если и только если $n \geq N$, где N – старшая степень в тейлоровской проекции (3.22). В этом случае r -матрица (3.23) сохраняет простой полюс в выделенной точке Вейерштрасса на бесконечности $\lambda = \infty$ и соответствующая вторая матрица Лакса A' не зависит от спектрального параметра [21].

Таким образом, для вырожденных систем имеем

$$A(\lambda, \mu) = \Pi A(\lambda, \mu) \Pi^{-1}$$

и уравнения движения (3.25) принимают форму уравнения Лакса. При этом алгебраическая поверхность (3.24) не зависит от времени, что и доказывает теорему 4 (см. [21]). Набор интегралов движения в инволюции порождается спектральной кривой оператора Лакса (3.8), которая является сечением при $\lambda = \mu$ алгебраической поверхности (3.24). Дополнительные некоммутирующие относительно скобки Пуассона интегралы движения определяются на всей поверхности (3.24), например, по правилу

$$J_{m,k} = \text{Res} \Big|_{\lambda=q_m, \mu=q_k} \det L(\lambda, \mu). \quad (3.26)$$

Для всех систем, как обычно, спектральная кривая $\mathcal{C}$ (3.1) матрицы Лакса $L'(\lambda)$ порождает инволютивное семейство интегралов движения. Подставляя функцию $\phi(\lambda) = \lambda^n Q_m^{-1}(\lambda) U_N(\lambda)$ в определение (3.21), получаем привычную форму спектральной кривой

$$\mathcal{C}: y^2 = F'(\lambda) = \det L'(\lambda) = U_N(\lambda) + \frac{\sum_{j=1}^n I'_j \lambda^{n-j}}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)},$$

где $\{I'_j\}$ — новые интегралы движения. Данная кривая не зависит от времени, и поэтому

$$\frac{dF'(\lambda)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{4} \partial_x^3 + u_N(\lambda) \partial_x + \frac{1}{2} u_{N,x}(\lambda) \right] \cdot e(\lambda) = 0. \quad (3.27)$$

Конечно, это уравнение может быть получено непосредственно методами симплектической геометрии [22] без использования данного представления Лакса.

Рассмотрим, как возникает это же уравнение в теории нелинейных интегрируемых уравнений [23, 24].

Известно, что используемая нами симплектическая форма Ω_g (2.3) возникает при рассмотрении гамильтоновой структуры нелинейных уравнений [25, 11, 10]. Рассмотрим уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) на римановой поверхности (2.1) с одной выделенной точкой P на бесконечности $\lambda = \infty$ [10]. Для конечнозонных решений уравнения КдФ переменные действия s_j (2.2) канонически сопряжены относительно симплектической структуры Гарднера–Фаддеева–Захарова угловым переменным w_j [26, 10]. Таким образом, однородные системы типа систем Штекеля могут быть отождествлены с конечнозонными решениями уравнения КдФ через общий набор переменных действие–угол.

Рассмотрим уравнение для симплектической формы (3.2) в теории нелинейных интегрируемых уравнений. Симплектическая форма Ω_n , скалярная функция Бейкера–Ахиезера ψ и соответствующий дифференциальный оператор Лакса второго порядка на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ (2.1) достаточно полно изучены [26, 25, 11, 10]. Соответствующий оператор Шредингера равен

$$\mathcal{L}(\lambda) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t, \lambda), \quad (3.28)$$

где λ – некий параметр. В некоторых случаях, например для уравнения типа КдФ, λ – собственное значение, а потенциал $u(x, t, \lambda) = u(x, t) - \lambda$ является решением самого нелинейного уравнения [23, 24]. Введем следующий анзац для второго оператора $\mathcal{A}(\lambda)$ в паре Лакса:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda)\psi &= 0, \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\lambda)}{\partial t} + [\mathcal{L}, \mathcal{A}]\right)\psi &= 0,\end{aligned}\tag{3.29}$$

где

$$\mathcal{A}(\lambda) = e(\lambda)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial e(\lambda)}{\partial x}.\tag{3.30}$$

Подставив данный анзац в уравнение Лакса, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\left[\frac{1}{4}\partial_x^3 + u(\lambda)\partial_x + \frac{1}{2}u_x(\lambda)\right] \cdot e(\lambda).\tag{3.31}$$

Таким образом, стационарные решения $\partial u(x, t, \lambda)/\partial t = 0$ данного уравнения связаны с различными однородными системами типа систем Штеккеля (3.27) (при этом переменная x играет роль времени для систем типа систем Штеккеля). При различном выборе функций $e(\lambda)$ и $u(\lambda)$ данная процедура приводит к различным иерархиям нелинейных уравнений, например к уравнению КдФ, нелинейному уравнению Шредингера и уравнению синус-Гордон [23] или к Дум-иерархии [24].

Заметим, что специальный выбор формы второго оператора $\mathcal{A}(\lambda)$ (3.30) в уравнении Лакса (3.29) позволяет перейти от рассмотрения функции Бейкера–Ахизера ψ на кривой $\mathcal{C}$ к рассмотрению функции $e(\lambda)$ на кривой $\mathcal{C}$, которая имеет прозрачную механическую интерпретацию (2.14). Повторим, что функция $e(\lambda)$ определяется своими нулями (переменными разделения), которые дают решение задачи обращения отображения Абеля [11].

4. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Диагональная метрика $g_{jj} = \mathbf{H}_j^2$ является плоской метрикой, поэтому далее встает вопрос об определении соответствующих декартовых координат.

В соответствии с работой [6] ортогональные криволинейные координаты $\{p_j, q_j\}_{j=1}^g$ образуют дивизор простых полюсов скалярной функции Бейкера–Ахизера ψ римановой поверхности $\mathcal{C}$. Главные члены разложения той же функции ψ в особых точках кривой $\mathcal{C}$ определяют коэффициенты Ламе $\mathbf{H}_j$ и плоские декартовы координаты $\{p_j, x_j\}_{j=1}^g$ для соответствующей метрики (1.10) [6].

Таким образом, криволинейные системы координат в плоском пространстве, связанные с кривой $\mathcal{C}$, могут быть введены чисто геометрическими методами. При этом соответствующая гамильтонова динамика и методы разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби совершенно не используются. В соответствии с работой [6] надо только задать необходимые аналитические свойства скалярной функции Бейкера–Ахизера

ψ на кривой $\mathcal{C}$. Однако, задавая конкретные свойства функции ψ , мы тем самым неявно определяем глобальную систему переменных действие–угол [13] и задаем отображение этой системы в систему переменных разделения в уравнении Гамильтона–Якоби. Тем самым, описывая аналитические свойства ψ на кривой $\mathcal{C}$, мы неявно даем полное описание соответствующей конечномерной гамильтоновой интегрируемой системы.

Введем плоские координаты, используя гамильтонову динамику и соответствующее представление Лакса $L(\lambda)$. При этом перейдем от алгебро-геометрического анализа [6] к изучению движения по геодезическим. Основная идея заключается в том, что в декартовых координатах $\{p_j, x_j\}_{j=1}^g$ уравнения движения в плоском пространстве записываются в форме уравнений Ньютона

$$\ddot{x}_j = \xi_j(x_1, \dots, x_g), \quad H = \sum a_{ij} p_i p_j + V(x_1, \dots, x_g), \quad a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

с гамильтонианом H натурального вида. Здесь потенциал $V(x_1, \dots, x_g)$ и функции $\xi_j(x_1, \dots, x_g)$ зависят только от координат.

Определим функцию (см. ссылки в [20])

$$\mathcal{B}^2(\lambda) = e(\lambda) = \mathbf{H}^{-2}(\lambda), \quad (4.2)$$

которая является “обратной” к коэффициентам Ламе $\mathbf{H}_j$ (1.11), и перепишем спектральные кривые в терминах новой функции $\mathcal{B}(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \mathcal{B}^3 \mathcal{B}_{xx}, \quad F'(\lambda) = \mathcal{B}^3 \mathcal{B}_{xx} + \mathcal{B}^4 \left[\frac{\phi(\lambda)}{\mathcal{B}^4} \right]_N. \quad (4.3)$$

Уравнения (3.29) и (3.27) для функции $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{xx} &= F(\lambda) \mathcal{B}^{-3}, \\ \mathcal{B}_{xx} &= F'(\lambda) \mathcal{B}^{-3} - \mathcal{B} \left[\frac{\phi(\lambda)}{\mathcal{B}^4} \right]_N, \end{aligned} \quad (4.4)$$

имеют форму уравнений Ньютона, если рассматривать интегралы движения, входящие в функции $F(\lambda)$ и $F'(\lambda)$, как константы интегрирования. Если разложить функцию

$$\mathcal{B}(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \sum x_{N-j} \lambda^j$$

в ряд по переменной λ , то коэффициенты x_j ряда удовлетворяют ньютоновским уравнениям движения (4.4). Поэтому гамильтониан в этих переменных имеет натуральный вид (4.1). Таким образом декартовы переменные вводятся как коэффициенты в разложении функции $\mathcal{B}$.

Заметим, что в новых переменных x_j одевающее отображение (3.21) действует так же только на потенциальную часть гамильтониана, оставляя кинетическую часть неизменной.

В качестве примера выпишем несколько стандартных криволинейных систем координат в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$ [4, 27, 28, 15]:

эллиптические координаты при $m = n$ в (2.20)

$$e(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^n (\lambda - \delta_k)} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, x_1, \dots, x_n),$$

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n < x_n;$$

параболические координаты при $m = n - 1$ в (2.20)

$$e(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - \delta_k)} = \lambda - x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, x_1, \dots, x_n),$$

$$x_1 < \delta_1 < x_2 < \dots < \delta_{n-1} < x_n;$$

сферические координаты при $m = n + 1$ в (2.20)

$$e(\lambda, q_0, \dots, q_n) = \frac{q_0 \prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{n+1} (\lambda - \delta_k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, x_1, \dots, x_{n+1}).$$

При построении сферических координат используются один мероморфный дифференциал в окрестности выделенной точки Вейерштрасса P при $\lambda = \infty$ [10] и соответствующая ему координата q_0 .

По своему определению криволинейные координаты $\{q_j\}$ являются нулями функции $e(\lambda)$, тогда как плоские координаты $\{x_j\}$ суть вычеты функции $e(\lambda) = \mathcal{B}^2(\lambda)$ в полном соответствии с подходом, основанным на скалярной функции Бейкера–Ахиезера [6, 8].

Все другие ортогональные криволинейные системы координат в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$ могут быть получены предельными переходами из данных систем [28, 15, 27]. В соответствии с работой [29] все гамильтонианы натурального вида с рациональными потенциалами, допускающие точечное разделение переменных в стандартных криволинейных координатах, принадлежат классу однородных систем типа систем Штеккеля. Поэтому мы можем утверждать, что все механические системы данного рода могут быть рассмотрены в рамках предложенного подхода.

Квазиточечные преобразования координат. Рассмотренная выше параметризация $e(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \mathcal{B}^2(\lambda, x_1, \dots, x_n)$ задает точечное каноническое преобразование координат $q_k = f(x_1, \dots, x_n)$. Обсудим другие возможные параметризации функции $e(\lambda)$, которые позволят обобщить применяемый класс точечных канонических преобразований. Очевидно, что уравнение Лакса

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), A(\lambda)]$$

ковариантно относительно следующего преобразования матрицы Лакса:

$$L(\lambda) \rightarrow \phi(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k) L(\lambda), \quad (4.5)$$

с произвольной функцией $\phi(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ от параметров $\{\lambda_j\}$ спектральной кривой $\mathcal{C}$ (2.1) и спектрального параметра λ . Однако данное преобразование существенно изменяет скобки Пуассона (3.12) и параметризацию матрицы Лакса $L(\lambda)$ в декартовых координатах $\{p_j, x_j\}$. Следовательно, в дополнение к рассмотренным выше плоским координатам $\{p_j, x_j\}_{j=1}^n$ та же самая функция $e(\lambda, q_1, \dots, q_n)$ может быть параметризована другими декартовыми координатами в $\mathbb{R}^n$. Далее мы покажем на примерах, что с геометрической точки зрения преобразование (4.5) может быть связано с различными накрытиями алгебраических кривых [30].

Предположим, что абелев тор $J(\mathcal{C}) = T^{2g}$ распадается в прямое произведение нескольких торов

$$T^{2g} = T^{2g_1} \times \dots \times T^{2g_k}, \quad \sum_{j=1}^k g_j = g. \quad (4.6)$$

Тогда $(g \times g)$ -матрица Римана имеет блочный вид $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k$, где B_j — $(g_j \times g_j)$ -матрицы Римана. При этом изоморфная тору $J(\mathcal{C}) = T^{2g}$ кривая $\mathcal{C}$ накрывает K -листно торы T^{2g_j} . Такие накрытия существуют для любого $K > 1$ и для произвольных торов T^{2g_j} [30].

С точки зрения механических систем, решая проблему обращения Якоби (1.8), мы можем ввести переменные разделения $\{q_j\}$ на одном общем торе $J(\mathcal{C}) = T^{2g}$. Соответствующая матрица Лакса — (2×2) -матрица $L(\lambda)$ (3.5).

С другой стороны, мы можем ввести другой набор координат $\{\tilde{q}_j\}$, рассматривая каждый тор T^{2g_j} в разложении (4.6) отдельно. В этом случае матрица Лакса состоит из блоков

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1 & & \\ & \ddots & \\ & & L_k \end{pmatrix} (\lambda), \quad (4.7)$$

где $L_j(\lambda)$ — (2×2) -матрица, определяемая по функции $e_j(\lambda)$ на отдельном торе T^{2g_j} [20]. Два множества координат $\{q_j\}$ и $\{\tilde{q}_j\}$ связаны каноническим преобразованием, которое индуцируется соответствующим накрытием кривых.

В качестве примера рассмотрим несколько двумерных $n = 2$ интегрируемых систем. Задача нахождения переменных разделения (p_1, q_1) и (p_2, q_2) на лагранжевом подмногообразии $\mathcal{C}^{(2)}$ является проблемой обращения Якоби (1.8) с матрицей Штеккеля $\mathbf{S}$ вида (2.10). Проблема разрешается в терминах $\wp$ -функций Клейна, которые равны вторым логарифмическим производным σ -функции Клейна [30, 31]

$$\wp_{ij} = -\frac{\partial \ln \sigma(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \quad \wp_{22} = q_1 + q_2, \quad \wp_{12} = -q_1 q_2.$$

В этом случае функция $e(\lambda)$ (2.13) равна

$$e(\lambda) = \lambda^2 - \wp_{22}\lambda - \wp_{12} = (\lambda - q_1)(\lambda - q_2) = \lambda^2 + 2\lambda x_1 + (2x_2 + x_1^2) \quad (4.8)$$

или

$$e(\lambda) = \frac{(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)}{(\lambda - \delta_1)(\lambda - \delta_2)} = 1 + \frac{x_1'^2}{\lambda - \delta_1} + \frac{x_2'^2}{\lambda - \delta_2}. \quad (4.9)$$

Здесь мы используем произвол (2.20) в определении метрики и декартовы координаты $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ выводятся из “обратной” функции $\mathcal{B}(\lambda)$ (4.2) к коэффициентам Ламе. Применяя внешний автоморфизм пространства бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$, можно построить матрицы Лакса для множества интегрируемых механических систем с гамильтонианами вида

$$\begin{aligned} H &= p_1 p_2 + V_N(x_1, x_2), \\ H &= p_1'^2 + p_2'^2 + V_N'(x_1', x_2'). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Выделим из этого множества системы Энона–Эйлеса при $N = 3$ и системы с потенциалом четвертой степени при $N = 4$. Для этих выделенных систем род соответствующей кривой $\mathcal{C}$ остается равен числу степеней свободы $g = n = 2$.

Функция $e(\lambda)$ (2.11) не зависит от параметров кривой $\mathcal{C}$, и поэтому можно выбрать эти параметры так, что соответствующий тор $J(\mathcal{C}) = T^{2g}$ станет разложимым (4.6). Именно рассмотрим два тора $T_{1,2}^2$ вида

$$T_{1,2}^2: \quad w_{\pm}^2 = \xi(1 - \xi)(1 - k_{\pm}^2 \xi), \quad (4.11)$$

где

$$k_{\pm}^2 = -\frac{(\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta})^2}{(1 - \alpha)(1 - \beta)}.$$

Производя рациональную замену переменных порядка $K = 2$

$$w_{\pm} = -\sqrt{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \frac{\lambda \mp \sqrt{\alpha\beta}}{(\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)^2} y, \quad \xi = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)} \lambda, \quad (4.12)$$

построим гиперэллиптическую кривую

$$\mathcal{C}: \quad y^2 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \alpha\beta), \quad (4.13)$$

которая двулистно накрывает алгебраические кривые $T_{1,2}^2$ (4.11). Данное накрытие представляет собой пример приведения (редукции) гиперэллиптических интегралов к эллиптическим интегралам рациональной заменой переменных (этот пример был построен Лежандром и обобщен Якоби [30]).

Комплексные торы T^2 изоморфны алгебраическим кривым рода $g = 1$, описываемым уравнениями вида $w^2 = f(\xi)$. В рассмотренном выше примере мы построили накрытие кривых при $\deg(f) = 2g + 1 = 3$. В работе [30] приведены аналогичные формулы при $\deg(f) = 2g + 2 = 4$. Обсуждаемые два накрытия тесно связаны с интегрируемыми системами Энона–Эйлеса [31] и системами с потенциалами четвертой степени, соответственно.

Введем две пары новых переменных $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1)$ и $(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2)$, расположенных на торах $T_{1,2}^2$. Соответствующие функции $e_{1,2}(\lambda)$ равны

$$e_1(\lambda) = \lambda - \tilde{q}_1, \quad e_2(\lambda) = \lambda - \tilde{q}_2. \quad (4.14)$$

Переменные $\{\tilde{p}_j, \tilde{q}_j\}$ – плоские переменные разделения для двумерных интегрируемых систем на торе $T_1^2 \times T_2^2$ с гамильтонианами вида

$$H_{3,4} = \tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + V_{3,4}(\tilde{q}_1) + V_{3,4}(\tilde{q}_2). \quad (4.15)$$

Очевидно, что данные двумерные системы распадаются на сумму двух одномерных систем на торах $T_{1,2}^2$, соответственно. Матрица Лакса – блочная (4×4) -матрица вида (4.7), и каждый блок определяется своей функцией $e_{1,2}(\lambda)$ (4.14).

Накрытие (4.12) индуцирует каноническое преобразование переменных $\{\tilde{p}_j, \tilde{q}_j\}_{j=1}^2$ и $\{p_j, q_j\}_{j=1}^2$ [31], расположенных на алгебраических кривых $T_{1,2}^2$ и $\mathcal{C}$. При этом общие параметры α и β этих кривых являются общими интегралами движения для систем (4.10) и (4.15). Ограничение канонического преобразования (4.12) на совместную поверхность уровня интегралов движения ($\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$) является точечным преобразованием. Поэтому будем говорить о квазиточечном каноническом преобразовании [32].

Данное преобразование, индуцируемое накрытием (4.12), можно использовать при построении (2×2) -матрицы Лакса для интегрируемых систем с гамильтонианами вида (4.15). В переменных $\{\tilde{q}_j\}$ матрица Лакса $L(\lambda)$ определяется по функции $e(\lambda)$ вида

$$\begin{aligned} e(\lambda) &= \frac{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \tilde{e}(\lambda), \quad \tilde{e}(\lambda) = (\lambda - \tilde{q}_1)(\lambda - \tilde{q}_2), \\ L(\lambda) &= \frac{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \tilde{L}[\tilde{e}(\lambda)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Очевидно, что функция $e(\lambda)$ имеет два добавочных нуля α и β на кривой $\mathcal{C}$ (4.13) и поэтому достаточно сложную параметризацию в декартовых координатах $\{p_j, x_j\}$ на торе $J(\mathcal{C}) = T^4$. С другой стороны, рассматривая разложение $J(\mathcal{C}) = T_1^2 \times T_2^2$, искомые переменные определить достаточно просто.

Вводя эти новые декартовы координаты, мы можем использовать торы $T_{1,2}^{2g_j}$ произвольного рода $g_{1,2} > 1$ и изучать гамильтоновы системы (4.15) с произвольными одномерными потенциалами $V_{2g_j+1}(q_j)$. При этом стандартная замена переменных на произведении торов

$$\tilde{q}_j = \frac{\tilde{x}_1 \pm \tilde{x}_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{e}(\lambda) = \lambda^2 - \tilde{x}_1 + \frac{\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2}{4} \quad (4.17)$$

сохраняет натуральную форму гамильтониана (4.15) для произвольных потенциалов $V_{2g_j+1}(q_j)$. Вероятно, для данных торов $T_{1,2}^{2g_j}$ можно также построить и аналогичные (4.12) накрытия.

В разобранный выше примере редукции Якоби (4.11) оба независимых гиперэллиптических интеграла приводятся к эллиптическим интегралам одной и той же подстановкой $\xi \rightarrow \lambda$ (4.12). Это обстоятельство связано с наличием автоморфизма второго порядка на соответствующей римановой поверхности [30]:

$$\tau: (\lambda, y) \rightarrow \left(\frac{\alpha\beta}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^3} \sqrt{\alpha^3\beta^3} \right). \quad (4.18)$$

Этот автоморфизм индуцирует третью параметризацию функции $\tilde{e}(\lambda)$ в декартовых координатах, которая сохраняет натуральный вид гамильтониана и при этом соответствующие уравнения движения остаются уравнениями Ньютона. Поскольку параметры α и β в (4.18) являются интегралами движения, то автоморфизм τ индуцирует второе квазиточечное каноническое преобразование переменных. Именно, в дополнение к (4.17) введем каноническое преобразование переменных $\{\tilde{p}_j, \tilde{q}_j\}$ к декартовым координатам $\{\hat{p}_j, \hat{x}_j\}$, используя новую параметризацию функции $\tilde{e}$ (4.16)

$$\tilde{e}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{Q_+ + Q_-}{\hat{x}_1} \lambda + \frac{(Q_+ - Q_-)^2}{4\hat{x}_1}. \quad (4.19)$$

Здесь функции $Q_{\pm}(\hat{p}_j, \hat{x}_j)$ – классические пределы суперзарядов из двумерной суперсимметричной квантовой механики [32], которые наследуют следующие свойства:

$$\{H, Q_{\pm}\} = \pm f(\hat{p}_j, \hat{x}_j) Q_{\pm}, \quad \{H, Q_+ Q_-\} = 0.$$

Для накрытия (4.12) при $N = 3$ или $N = 4$ точный вид функций $Q_{\pm}$ и f в переменных $\{\tilde{p}_j, \tilde{q}_j\}$ или $\{\hat{p}_j, \hat{x}_j\}$ приведен в работе [32].

Квазиточечные канонические преобразования (4.12) и (4.19) для декартовых переменных $\{x'_j\}$, $\{\tilde{x}_j\}$ и $\{\hat{x}_j\}$ связывают вместе все интегрируемые случаи кубической системы Энона–Эйлеса $N = 3$ и три интегрируемых случая системы с потенциалом четвертой степени $N = 4$ [32]. Было бы интересно изучить алгебро-геометрическую природу возникающих в квазиточечных преобразованиях суперсимметричных объектов, появившихся из двумерной суперсимметричной квантовой механики.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ (проект № 96-01-00537).

Список литературы

- [1] *P. Stäckel*. Comptus Rendus (Paris). 1893. V. 116. P. 485, 1284; 1895. V. 121. P. 489.
- [2] *А. М. Переломов*. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
- [3] *В. И. Арнольд*. Математические методы классической механики. Изд. 3-е. М.: Наука, 1989.

- [4] *L. P. Eisenhart*. Ann. Math. 1934. V. 35. P. 284.
- [5] *V. E. Zakharov*. Description of the n -orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of the hydrodynamic type. Part I. Integration of the Lamé' equation. Preprint ITP/96, 1996.
- [6] *I. M. Krichever*. Algebraic-geometrical n -orthogonal curvilinear coordinate systems and solutions to the associativity equations. hep-th/9611158, 1996.
- [7] *A. V. Razumov, M. V. Saveliev*. Riemannian manifolds with diagonal metric. The Lamé' and Bourlet systems. solv-int/9612004, 1996.
- [8] *E. K. Sklyanin*. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35.
- [9] *J. P. Francoise*. Bull. Amer. Math. Soc. (New series). 1987. V. 17. P. 301.
- [10] *I. M. Krichever, D. H. Phong*. On the integrable geometry of soliton equations and $n = 2$ supersymmetric gauge theories. hep-th/9604199, 1996; Symplectic forms in the theory of solitons. hep-th/9708170, 1997.
- [11] *Б. А. Дубровин*. УМН. 1981. Т. 36. С. 11.
- [12] *I. M. Krichever*. Commun. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 40.
- [13] *Н. Н. Непоросев*. Тр. Моск. матем. об-ва. 1972. Т. 26. С. 181; *H. J. Duistermaat*. Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 23. P. 687; *H. Knörrer*. J. Reine Angew. Math. 1985. B. 355. S. 67.
- [14] *Д. Мамфорд*. Лекции по тета-функциям. М.: Мир, 1988.
- [15] *E. G. Kalnins, V. B. Kuznetsov, W. Miller, Jr.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 1710.
- [16] *F. Calogero, J. P. Francoise*. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 211.
- [17] *Л. А. Таштадзян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [18] *A. V. Tsiganov*. Automorphisms of $sl(2)$ and dynamical r -matrices. solv-int/9610003, 1996.
- [19] *А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский*. Теоретико-групповые методы в теории конечномерных интегрируемых систем. В сб.: Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. направления. Т. 16. Динамические системы-VII. М.: ВИНТИ, 1987. С. 119.
- [20] *P. P. Kulish, S. Rauch-Wojciechowski, A. V. Tsiganov*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 3365.
- [21] *А. В. Цыганов*. ТМФ. 1997. Т. 112. С. 428.
- [22] *N. Ercolani*. Commun. Pure Appl. Math. 1989. V. 49. P. 87.
- [23] *S. J. Alber*. Commun. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 252.
- [24] *M. S. Alber, R. Camassa, D. D. Holm, J. E. Marsden*. Lett. Math. Phys. 1995. V. 32. P. 137.
- [25] *С. П. Новиков, А. П. Веселов*. ДАН СССР. 1982. Т. 266. С. 533; Тр. МИАН. 1984. Т. 165. С. 49.
- [26] *В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев*. Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. С. 18.
- [27] *Н. Я. Виленкин*. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
- [28] *E. G. Kalnins*. Separation of Variables for Riemann Spaces of Constant Curvature. In: Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. New York: Longman Scientific & Technical, 1986.
- [29] *E. G. Kalnins, S. Benenti, W. Miller, Jr.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 2345.
- [30] *A. Krazer*. Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig: Teubner, 1903; *H. F. Baker*. Abels theorem and allied theory including the theory of theta functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1897.
- [31] *V. Z. Enolskii, M. Salerno*. J. Phys. A. 1996. V. 17. P. L425.
- [32] *S. Rauch-Wojciechowski, A. V. Tsiganov*. J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 7769.

Поступила в редакцию 17.XI.1997 г.