Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, Квазиштеккелевы системы и двумерные уравнения Шредингера в электромагнитном поле, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 1, 83–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:02:43

© 2013 г.

В. Г. Марихин*

КВАЗИШТЕККЕЛЕВЫ СИСТЕМЫ И ДВУМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получена полная классификация двумерных уравнений Шредингера в электромагнитном поле с дополнительным квадратичным по импульсам интегралом. Для этого надо произвести замену переменных типа Ковалевской и привести гамильтонианы к квазиштеккелевой форме; в этой форме провести классификацию в смысле Пенлеве, а затем вернуться к оригинальным переменным.

Ключевые слова: квантовые волчки, интегрируемость, уравнение Шредингера.

DOI: 10.4213/tmf8540

1. ПАРЫ КОММУТИРУЮЩИХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Проблема интегрируемых случаев двумерного уравнения Шредингера в электромагнитном поле изучается довольно давно (см., например, работу [1] и ссылки в ней), но до сих пор не исследована до конца. С появлением современных методов анализа интегрируемых систем были рассмотрены разные аспекты исследуемой задачи, например, в работе [2] изучался класс (конечнозонных) решений уравнения Шредингера с магнитным полем (см. также работу [3]). В статье [1] для решения данной задачи применялся метод факторизации (см. также ссылки в этой работе). Уравнение Шредингера в магнитном поле с дополнительными линейным и квадратичным интегралами движения рассматривалось, например, в работе [4] (см. также цитированные там работы), где был получен ряд интересных примеров таких уравнений в различных системах координат, но использованный в [4] подход не претендует на полную классификацию таких систем.

В настоящей работе мы следуем схеме, изложенной в статье [5], основные положения которой мы повторим в настоящей статье, но, в отличие от работы [5], мы получим полную классификацию в оригинальных переменных, используя алгебраический факт факторизуемости уравнений, определяющих основные функции в квазиштеккелевой форме, т. е. в форме, в которой к штеккелеву гамильтониану

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: mvvg@itp.ac.ru

добавляются дополнительные члены, линейные по производным (в квантовом случае) или по импульсам в (классическом случае), подробнее см. ниже. Мы перейдем к переменным типа Ковалевской и получим квазиштеккелеву (каноническую) форму квадратичных коммутирующих операторов. Произведя полную классификацию (в смысле Пенлеве) пар коммутирующих операторов этого вида и введя ограничение для одной из функций от одной переменной (как следствие того, что один из первоначальных гамильтонианов был оператором Шредингера), мы перейдем обратно к уравнению Шредингера.

Рассмотрим сначала общую задачу о коммутирующих парах квантовых операторов в электромагнитном поле, квадратичных по операторам импульса. Наиболее общий вид таких пар следующий:

$$\begin{aligned} H &= a_1(q_1, q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_1(q_1, q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_1(q_1, q_2)\hat{p}_2^2 + \\ &\quad + d_1(q_1, q_2)\hat{p}_1 + e_1(q_1, q_2)\hat{p}_2 + f_1(q_1, q_2), \\ K &= a_2(q_1, q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_2(q_1, q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_2(q_1, q_2)\hat{p}_2^2 + \\ &\quad + d_2(q_1, q_2)\hat{p}_1 + e_2(q_1, q_2)\hat{p}_2 + f_2(q_1, q_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\hat{p}_1 = -i\hbar\partial_{q_1}$, $\hat{p}_2 = -i\hbar\partial_{q_2}$. Мы удерживаем во всех формулах постоянную Планка $\hbar$, чтобы иметь возможность перейти к классическому случаю, который был рассмотрен в работе [6] (см. также цитируемые там работы) и в работе [7] в применении к движению заряженной частицы в электромагнитном поле. В некоторых случаях это также позволит нам строить решения получающихся уравнений в виде ряда по степеням $\hbar$.

Диагонализуем одновременно пару H и K , т. е. оператор $K - sH$, где s – параметр [6], [8]. Нетрудно видеть, что для этого должно быть выполнено следующее уравнение относительно s :

$$\Phi(q_1, q_2, s) \equiv (b_2 - sb_1)^2 - (a_2 - sa_1)(c_2 - sc_1) = 0. \quad (2)$$

Решая это квадратное уравнение, получаем в общем случае два корня $s_1(q_1, q_2)$ и $s_2(q_1, q_2)$. Будем называть систему (1) невырожденной, если якобиан $\frac{D(s_1, s_2)}{D(q_1, q_2)} \neq 0$. Любая невырожденная система вида (1) путем замены переменных $(q_1, q_2) \rightarrow (s_1, s_2)$ и калибровочного преобразования $H \rightarrow g^{-1}Hg$, $K \rightarrow g^{-1}Kg$ может быть приведена к каноническому (квазиштеккелеву) виду (для упрощения обозначений мы делаем замену $s_1 = x$, $s_2 = y$):

$$H = \hat{\pi}_1 \frac{S_1(x)}{x-y} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 \frac{S_2(y)}{x-y} \hat{\pi}_2 + \frac{U_1 - U_2}{x-y}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} K &= \hat{\pi}_1 \frac{yS_1(x)}{x-y} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 \frac{xS_2(y)}{x-y} \hat{\pi}_2 - \\ &\quad - S_1(x)A_1\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1S_1(x)A_1 - S_2(y)A_2\hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_2S_2(y)A_2 - \\ &\quad - S_1(x)A_1^2 - S_2(y)A_2^2 + \frac{yU_1 - xU_2}{x-y}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\pi_1 &= -i\hbar\partial_x - A_1, & \pi_2 &= -i\hbar\partial_y - A_2, \\ A_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{S_2(y)}}{\sqrt{S_1(x)}} \frac{Z_y}{x-y}, & A_2 &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S_1(x)}}{\sqrt{S_2(y)}} \frac{Z_x}{x-y}.\end{aligned}$$

Здесь $Z = Z(x, y)$ – функция двух переменных и

$$\begin{aligned}U_1 &= V_1 + \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} S_1''(x) + \frac{1}{16} \frac{(S_1'(x))^2}{S_1(x)} + \frac{1}{2} \frac{S_1'(x)}{x-y} - \frac{3}{4} \frac{S_1(x)}{(x-y)^2} \right], \\ U_2 &= V_2 + \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} S_2''(y) + \frac{1}{16} \frac{(S_2'(y))^2}{S_2(y)} - \frac{1}{2} \frac{S_2'(y)}{x-y} - \frac{3}{4} \frac{S_2(y)}{(x-y)^2} \right],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{S_1(x)} \partial_x \left[\sqrt{S_1(x)} \frac{Z_x^2}{x-y} \right] + f_1(x), \\ V_2 &= -\frac{1}{2} \sqrt{S_2(y)} \partial_y \left[\sqrt{S_2(y)} \frac{Z_y^2}{x-y} \right] + f_2(y).\end{aligned}$$

Введем также функцию $Q = (V_1^q - V_2^q)/(x-y)$, где

$$\begin{aligned}V_1^q &= V_1 + \hbar^2 \left[\frac{1}{8} \frac{S_1'(x)}{x-y} - \frac{5}{16} \frac{S_1(x)}{(x-y)^2} \right], \\ V_2^q &= V_2 + \hbar^2 \left[-\frac{1}{8} \frac{S_2'(y)}{x-y} - \frac{5}{16} \frac{S_2(y)}{(x-y)^2} \right],\end{aligned}$$

и функции

$$\begin{aligned}R_1 &= \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} \partial_x \frac{\sqrt{S_1(x)}}{x-y} \partial_x \frac{\sqrt{S_1(x)}}{x-y} \partial_x Z + \frac{3}{8} \partial_x \frac{S_1(x)}{(x-y)^3} \partial_x Z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{16} \frac{4S_1(x) - (x-y)S_1'(x)}{(x-y)^4} \partial_x Z \right], \\ R_2 &= \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} \partial_y \frac{\sqrt{S_2(y)}}{x-y} \partial_y \frac{\sqrt{S_2(y)}}{x-y} \partial_y Z - \frac{3}{8} \partial_y \frac{S_2(y)}{(x-y)^3} \partial_y Z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{16} \frac{4S_2(y) + (x-y)S_2'(y)}{(x-y)^4} \partial_y Z \right].\end{aligned}$$

Тогда пара (3), (4) коммутирует, если и только если выполнены два следующих условия:

$$Z_{x,y} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)}, \quad (5)$$

$$Z_x Q_y - Z_y Q_x + R_1 - R_2 = 0, \quad (6)$$

Докажем это утверждение прямым вычислением.

Для начала заметим, что производные преобразуются следующим образом:

$$(q_1, q_2) \rightarrow (s_1, s_2) : \quad \partial_{q_1} = -\left(\frac{\Phi_{q_1}^1}{\Phi_{s_1}^1} \partial_{s_1} + \frac{\Phi_{q_1}^2}{\Phi_{s_2}^2} \partial_{s_2}\right), \quad \partial_{q_2} = -\left(\frac{\Phi_{q_2}^1}{\Phi_{s_1}^1} \partial_{s_1} + \frac{\Phi_{q_2}^2}{\Phi_{s_2}^2} \partial_{s_2}\right),$$

где $\Phi^i = \Phi(s_i, q_1, q_2)$, $i = 1, 2$. Нетрудно убедиться, что при таком преобразовании перекрестных членов с $\partial_{s_1} \partial_{s_2}$ в преобразованных операторах H , K нет, а главные (квадратичные) члены имеют такой же вид, как в (3). Функции S_i можно вычислить по формуле (в которой переменные q_i нужно выразить через s_i)

$$S_i(s_i) = \frac{1}{(\Phi_{s_i}^i)^2} [(a_1 s_i - a_2)(\Phi_{q_1}^i)^2 + 2(b_1 s_i - b_2)\Phi_{q_1}^i \Phi_{q_2}^i + (c_1 s_i - c_2)(\Phi_{q_2}^i)^2].$$

Линейные по производным члены можно привести к виду (3) выбором калибровки, остальные члены фиксируются, как и уравнения для функций $S_1(s_1)$, $S_2(s_2)$, $Z(s_1, s_2)$, $f_1(s_1)$, $f_2(s_2)$. Снова сделаем замену $s_1 = x$, $s_2 = y$, и тем самым утверждение будет доказано.

Конечно, функции $Z(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ можно выразить через коэффициенты начальной пары H , K , заданной соотношениями (1), однако получающиеся выражения слишком громоздки и мало пригодны для явных вычислений, т. е. целесообразно проводить их отдельно в каждом конкретном случае. Сформулированное утверждение гарантирует, что любую невырожденную пару можно преобразовать к каноническому виду (3), (4). Поэтому в дальнейшем мы будем исследовать именно пары вида (3), (4).

Остановимся еще раз на терминологии: квазиштеккелевой (квантовой) системой мы называем пару (3), (4). Действительно, при переходе к классическому пределу мы получаем классические квазиштеккелевы гамильтонианы, причем при условии $Z(x, y) = 0$ эти гамильтонианы переходят в хорошо известные штеккелевы гамильтонианы (заметим, что в этом случае векторные потенциалы, а значит, и магнитное поле равны нулю).

2. ПЕРЕХОД К КВАЗИШТЕККЕЛЕВЫМ ГАМИЛЬТониАНАМ

Вернемся к гамильтонианам (1). Отметим, что в случае уравнения Шредингера

$$a_1(q_1, q_2) = 1, \quad b_1(q_1, q_2) = 0, \quad c_1(q_1, q_2) = 1.$$

Коммутируя гамильтонианы (1) и следя за уравнениями при старших производных, получим, что с точностью до сдвигов и растяжений главные коэффициенты оператора K могут быть выбраны в виде

$$a_2(q_1, q_2) = q_2^2 + \mu^2, \quad b_2(q_1, q_2) = -q_1 q_2 + \kappa, \quad c_2 = q_1^2 + \nu^2. \quad (7)$$

Вычисляя S_i , получим, что в этом случае $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$, где

$$S(t) = 4(t - x_1)(t - x_2), \quad x_1 = \nu^2 - \lambda^2, \quad x_2 = \lambda^2 + \mu^2, \quad \kappa^2 = \lambda^2(\mu^2 - \nu^2 + \lambda^2).$$

Таким образом, в случае уравнения Шредингера функция $S(t)$ есть квадратичный полином, а старшие коэффициенты оператора K и корни этого полинома представляют собой целые функции от трех параметров λ , μ , ν , за исключением коэффициента $b_2(q_1, q_2)$, содержащего дополнительный параметр κ , который зависит от параметров λ , μ , ν через радикал.

Дальнейшая процедура состоит в следующем. Необходимо при фиксированном полиноме $S(x)$ найти функцию $Z(x, y)$ от двух переменных и функцию $f(x)$ от одной переменной (в нашем случае $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$), решая систему (5), (6).

Общее решение уравнения Эйлера–Дарбу (5) можно разложить в ряд по степеням $x - y$:

$$Z(x, y) = (x + y)\delta + (x - y)^2 \sum_{k=0}^{\infty} g^{(2k)} \left(\frac{x + y}{2} \right) \frac{(x - y)^{2k}}{2^{2k} k! (k + 1)!}. \quad (8)$$

Мы опустили несущественную константу, а также ветвь, содержащую $\ln(x - y)$, которая несовместна с уравнением (6) (подробнее см. работу [6]). Подставляя разложение (8) в уравнение (6), разлагая по степеням $x - y$ получившееся уравнение, получаем набор уравнений для f и g . Вычисляя вторую производную от f и подставляя ее и старшие производные $f^{(k)}$ в последующие уравнения (они не содержат саму функцию f и ее производную f'), получаем уравнения только относительно g , в которые входит также функция S .

Оказывается, что первые два нетривиальных уравнения имеют вид

$$B_2 \partial_x^4(g(x)S(x)) = 0, \quad B_3 \partial_x^4(g(x)S(x)) = 0,$$

где B_2, B_3 – дифференциальные операторы второго и третьего порядка, которые зависят только от функции g и ее производных, но не зависят от S !

Возможны два варианта:

1) имеют место соотношения

$$\partial_x^4(g(x)S(x)) = 0 \iff g(x) = \frac{P_3(x)}{S(x)},$$

где P_3 – произвольный полином третьей степени;

2) одновременно выполняются уравнения $B_2\psi(x) = 0$ и $B_3\psi(x) = 0$.

Во втором случае, исключая последовательно ψ''' , ψ'' , ψ' , получаем уравнение совместности на функцию g вида

$$g^{VI} = F(g^V, g^{IV}, g''', g'', g', g).$$

Применяя к этому уравнению тест Пенлеве, получаем (с точностью до сдвигов), что оно имеет только изолированные решения

$$g(t) = -\frac{1}{8} \frac{z}{t}, \quad z = 0, \delta, 2\delta, \pm i\hbar, 2\delta \pm i\hbar, \delta \pm \frac{1}{2}i\hbar,$$

или $\delta = \pm 7\hbar/2$.

По данной функции $g = -z/8t$ легко восстановить и функцию $Z(x, y)$:

$$Z(x, y) = (x + y) \left(\delta - \frac{z}{2} \right) + z\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Конечно, не все полученные решения с данным z являются решениями уравнения (6), но достаточно подставить полученное выражение для Z в (6), найти функцию f и проверить выполнение уравнения (6) точно (без разложения в ряд).

Рассмотрим подробнее возможные случаи.

СЛУЧАЙ 1. Решение с двумя корнями: имеем

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= \left(\delta - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \right) (x + y) + \frac{1}{2} z_m (x - y)^2 (x + y) + z_c (x - y)^2 + \\ &\quad + z_1 \sqrt{x - x_1} \sqrt{y - x_1} + z_2 \sqrt{x - x_2} \sqrt{y - x_2}, \\ S(x) &= 4(x - x_1)(x - x_2), \\ f(x) &= -4z_m^2 x^2 S(x) + 4z_m x^2 (z_1 + z_2 - 2\delta) - 16z_c x^2 (2z_m (x - x_1 - x_2) + z_c) - \\ &\quad - \frac{z_1^2}{4} \frac{x_1 - x_2}{x - x_1} - \frac{z_2^2}{4} \frac{x_2 - x_1}{x - x_2}, \end{aligned}$$

где z_m , z_c и далее f_m , q_m , q_c — константы.

СЛУЧАЙ 2. Решение с одним корнем: имеем

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= (x + y) \left(\delta - \frac{z}{2} \right) + z \sqrt{x} \sqrt{y}, \\ S(x) &= 4(x - x_1)(x - x_2); \end{aligned}$$

при $z = 0$

$$f(x) = f_2 x^2;$$

при $z = \delta$, $x_1 = 0$

$$f(x) = f_m \sqrt{x} + \frac{\delta^2}{4x} x_2;$$

при $z = \delta$, $\delta = \pm i\hbar$

$$f(x) = f_m \sqrt{x} + \hbar^2 \frac{x_1 x_2}{2x^2} - \frac{\hbar^2}{4x} (x_1 + x_2);$$

при $z = 2\delta$

$$f(x) = \frac{f_m}{x} - \frac{x_1 x_2}{4x^2} (3\hbar^2 + 8\delta^2);$$

при $z = 2\delta \pm i\hbar$

$$f(x) = -(2\delta \pm i\hbar)^2 \left(\frac{x_1 x_2}{2x^2} - \frac{x_1 + x_2}{4x} \right).$$

Остальные решения, получающиеся из возможных вариантов ответов теста Пен-леве, являются частными случаями вышеперечисленных.

3. ПЕРЕХОД К УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА. ПРИМЕРЫ.

Рассмотрим оператор Шредингера в магнитном поле:

$$H = \tilde{\pi}_1^2 + \tilde{\pi}_2^2 + u(q_1, q_2), \quad (9)$$

где

$$\tilde{\pi}_1 = -i\hbar \partial_{q_1} - \mathcal{A}_1(q_1, q_2), \quad \tilde{\pi}_2 = -i\hbar \partial_{q_2} - \mathcal{A}_2(q_1, q_2).$$

Дополнительный эрмитов интеграл K , коммутирующий с H , имеет вид

$$K = \tilde{\pi}_1 a_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_1 b_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_2 b_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 c_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_2 + \\ + w_1(q_1, q_2) \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_1 w_1(q_1, q_2) + w_2(q_1, q_2) \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_2 w_2(q_1, q_2) + U(q_1, q_2). \quad (10)$$

Эта пара является канонической формой пары (1), переписанной через операторы скорости. Чтобы перейти от квазиштеккелевой системы (3), (4) к паре (9), (10), необходимо обратить производные и сделать замену переменных. В явном виде это выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\Phi_x^1}{J} \left(\Phi_{q_2}^2 \frac{\partial}{\partial q_1} - \Phi_{q_1}^2 \frac{\partial}{\partial q_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\Phi_y^2}{J} \left(\Phi_{q_2}^1 \frac{\partial}{\partial q_1} - \Phi_{q_1}^1 \frac{\partial}{\partial q_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\substack{x=s_1, \\ y=s_2}}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\substack{x=s_1, \\ y=s_2}},$$

где $J = \Phi_{q_1}^1 \Phi_{q_2}^2 - \Phi_{q_2}^1 \Phi_{q_1}^2$, при этом $\Phi^1 = \Phi(x, q_1, q_2)$ и $\Phi^2 = \Phi(y, q_1, q_2)$, а нижние индексы обозначают производные по соответствующим переменным.

Для упрощения выражений введем новый элемент Q_0 и запишем s_1, s_2 в виде

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + \mu^2 + \nu^2 \pm Q_0),$$

делая замену $Q_0 \rightarrow \tilde{Q}(q_1, q_2)$, где

$$\tilde{Q}(q_1, q_2) = \\ = \sqrt{q_2^4 + 2q_2^2\mu^2 + 2q_1^2q_2^2 - 2q_2^2\nu^2 + \mu^4 - 2\mu^2q_1^2 + 2\mu^2\nu^2 + q_1^4 + 2q_1^2\nu^2 + \nu^4 - 8q_1q_2\mu\nu}.$$

Например, замену производных можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = -\frac{1}{4} \frac{2q_1\kappa + q_2\nu^2 - q_1^2q_2 - q_2^3 - q_2\mu^2 + q_2Q_0}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_1} + \\ + \frac{1}{4} \frac{2q_2\kappa + \mu^2q_1 - q_1q_2^2 - q_1^3 - \nu^2q_1 + q_1Q_0}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial Q_0}, \\ \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{4} \frac{q_1^2q_2 - 2q_1\kappa - q_2\nu^2 + q_2^3 + q_2\mu^2 + q_2Q_0}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_1} - \\ - \frac{1}{4} \frac{q_1q_2^2 - 2q_2\kappa - \mu^2q_1 + q_1^3 + \nu^2q_1 + q_1Q_0}{q_1q_2\mu^2 - q_1q_2\nu^2 - q_1^2\kappa + q_2^2\kappa} \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial Q_0}.$$

Дальнейшая процедура является чисто технической и заключается в замене производных, окончательной замене переменных $(s_1, s_2) \rightarrow (q_1, q_2)$ в паре (3), (4) и приведении получившихся выражений к каноническому виду (9), (10).

Следует отметить, что описанная процедура позволяет получить все двумерные уравнения Шредингера (невырожденные в смысле раздела 1), однако получающиеся выражения чрезвычайно громоздки. В случае полной (λ, μ, ν) -параметризации вычислительной мощности не хватает для всех пар, поэтому в настоящей статье мы приведем лишь несколько примеров.

ПРИМЕР 1. В случае полной (λ, μ, ν) -параметризации наиболее компактным является случай с одним корнем, который уже рассматривался в работе [5]. Мы рассмотрим его здесь в другой параметризации и с вещественной структурой:

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= 2i\delta\sqrt{x}\sqrt{y}, \\ S(t) &= 4(t - x_1)(t - x_2), \\ f(t) &= -\alpha\frac{3\hbar^2 - 8\delta^2}{4t^2} + \frac{f_m - 2\delta^2(\mu^2 + \nu^2)}{t}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(x, y) &= -\delta\frac{R_y G - G_y R}{G^2 - 4R^2}, & \mathcal{A}_2(x, y) &= \delta\frac{R_x G - G_x R}{G^2 - 4R^2}, & B(x, y) &= \delta\frac{\alpha}{R^3}, \\ u(x, y) &= -\frac{f_m}{2R^2} + \frac{3}{4}\hbar^2\alpha\frac{G}{R^4}, & w_1(x, y) &= \delta R_y, & w_2(x, y) &= -\delta R_x, \\ U(x, y) &= -f_m\frac{G}{2R^2} + \frac{3}{4}\hbar^2\frac{\alpha}{R^2} + \frac{3}{4}\hbar^2\alpha\frac{G^2}{R^4}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = x_1 x_2 = \mu^2 \nu^2 - \kappa^2, \quad R = \sqrt{\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 + 2\kappa xy + \alpha}, \quad G = x^2 + y^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

ПРИМЕР 2. Для (μ, ν) -параметризации вычисления дают, что системы, рассмотренные в случае 2 предыдущего раздела, приводят к тривиальным системам с уже разделенными переменными и легко интегрируются. Поэтому рассмотрим случай 1 с максимально возможным числом параметров: наложим единственное ограничение $z_2 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= -i\delta\left(\frac{1}{2}(x + y) + \sqrt{x}\sqrt{y}\right) + (x - y)^2\left(\frac{1}{2}q_m(x + y) + q_c\right), \\ S(x) &= 4x(x - (\mu^2 + \nu^2)), \\ f(x) &= 16q_m^2 x^3(x - \mu^2 - \nu^2) + 4q_m x^2 \delta + 16q_c x^2(2q_m(x - \mu^2 - \nu^2) + q_c) - \\ &\quad - \frac{1}{4}(\mu^2 + \nu^2)\frac{\delta^2}{x}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(x, y) &= -\frac{1}{2}q_m(\nu^2 y - 2x\nu\mu + 3y\mu^2 + 3x^2 y + 3y^3) - 2q_c y, \\ \mathcal{A}_2(x, y) &= \frac{1}{2}q_m(3\nu^2 x + 3x^3 + \mu^2 x - 2\mu\nu y + 3y^2 x) + 2q_c x, \\ B(x, y) &= 2q_m(3(x^2 + y^2)\mu^2 + \nu^2) + 4q_c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2(-q_m^2(y^2 + \mu^2 + x^2 + \nu^2) - 2q_m q_c) \times \\ &\quad \times (\nu^2 + \mu^2 - 2\mu x + x^2 - 2y\nu + y^2)(\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x + x^2 + 2y\nu + y^2) - \\ &\quad - q_m \delta(-2\mu^2 - 2\nu^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4y\nu + 4\mu x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1(x, y) = & -\frac{1}{2}q_m(3\mu^4y - 4\mu^3\nu x + 2\mu^2\nu^2y + 2\mu^2x^2y + 6\mu^2y^3 - 4\mu\nu^3x - 4\mu\nu x^3 - \\
 & - 12\mu\nu xy^2 - \nu^4y + 2\nu^2x^2y - 2\nu^2y^3 + 3x^4y + 6x^2y^3 + 3y^5) - \\
 & - 2q_c(y\mu^2 - 2x\nu\mu - \nu^2y + x^2y + y^3) - \frac{1}{2}\delta(y + \nu), \\
 v_2(x, y) = & -\frac{1}{2}q_m(\mu^4x + 4\mu^3\nu y - 2\mu^2\nu^2x + 2\mu^2x^3 - 2\mu^2xy^2 + 4\mu\nu^3y + 4\mu\nu y^3 + \\
 & + 12\mu\nu x^2y - 3\nu^4x - 6\nu^2x^3 - 2\nu^2xy^2 - 3x^5 - 6x^3y^2 - 3xy^4) - \\
 & - 2q_c(\mu^2x + 2\mu\nu y - \nu^2x - x^3 - y^2x) + \frac{1}{2}\delta(x + \mu), \\
 U(x, y) = & \left(\frac{1}{4}q_m^2(\nu^4 + 10x^2\nu^2 + 6y^2\nu^2 + 2\mu^2\nu^2 - 8\nu xy\mu + 9x^4 + 9y^4 + \mu^4 + \right. \\
 & + 18x^2y^2 + 10y^2\mu^2 + 6\mu^2x^2) + 4q_c^2 + 2q_cq_m(\nu^2 + \mu^2 + 3(x^2 + y^2)) \Big) \times \\
 & \times (\nu^2 + \mu^2 - 2\mu x + x^2 - 2y\nu + y^2)(\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x + x^2 + 2y\nu + y^2) - \\
 & - \frac{1}{2}q_m\delta(\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x - 3x^2 + 2y\nu - 3y^2)(\nu^2 + \mu^2 + 2\mu x + x^2 + 2y\nu + y^2) - \\
 & - q_c\delta(-2y^2 - 2x^2 - 4y\nu - 4\mu x + 2\mu^2 + 2\nu^2).
 \end{aligned}$$

Попытка найти все пары вида (1), непосредственно коммутируя их, приводит к тому, что при фиксированных коэффициентах $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$ (в случае уравнения Шредингера) можно определить старшие коэффициенты дополнительного интеграла K (7). Остальные коэффициенты гамильтонианов H , K определяются дифференциальными уравнениями с частными производными, которые не решаются в общем виде. Поэтому необходимо найти все коммутирующие пары квазиштеккелевых систем (3), (4) и провести замену переменных $(s_1, s_2) \rightarrow (q_1, q_2)$. Таким образом можно получить полную классификацию уравнений Шредингера в электромагнитном поле с дополнительным (квадратичным) интегралом движения.

Остаются нерешенными вопросы о разделении переменных в рассматриваемых системах и решении получающихся уравнений Шредингера. Возможно, для этого потребуется решать квазиштеккелевы квантовые уравнения $H\psi = \lambda\psi$, $K\psi = \mu\psi$, а затем проводить замену переменных. Следует отметить, что штеккелевы квантовые системы позволяют простым образом найти разделение переменных и проинтегрировать уравнения. В общем (квазиштеккелевом) виде может помочь квазиклассическое разложение. Например, квазиклассическая волновая функция имеет вид

$$\psi \sim e^{J/i\hbar} \frac{(x - y)^{3/2}}{\sqrt{[(x - y)^2(\partial_x J)(\partial_y J) + (\partial_x Z)(\partial_y Z)]S(x)S(y)}},$$

где $J = J(x, y)$ – функция Гамильтона–Якоби квазиштеккелевой системы.

Благодарности. Автор признателен В. Е. Адлеру, В. В. Соколову и А. Б. Шабату за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00088).

Список литературы

- [1] E. V. Ferapontov, A. P. Veselov, *J. Math. Phys.*, **42**:2 (2001), 590–607.
- [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **229** (1976), 15–18.
- [3] S. P. Novikov, A. P. Veselov, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **179** (1997), 109–132.
- [4] J. Berube, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **45**:5 (2004), 1959–1973.
- [5] В. Г. Марихин, *Письма в ЖЭТФ*, **94**:3 (2011), 262–266.
- [6] В. Г. Марихин, В. В. Соколов, *ТМФ*, **149**:2 (2006), 147–160.
- [7] В. Г. Марихин, *Письма в ЖЭТФ*, **97**:7 (2013), 491–495.
- [8] L. P. Eisenhart, *Ann. Math.*, **35**:2 (1934), 284–305.

Поступила в редакцию 14.04.2013