Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Буринский, Струнные структуры в геометрии Керра–Шильда: $N = 2$ струна, твисторы и комплексно-двумерное многообразие Калаби–Яу, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 2, 247–263

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:51:23

© 2013 г.

А. Я. Буринский*

СТРУННЫЕ СТРУКТУРЫ В ГЕОМЕТРИИ КЕРРА–ШИЛЬДА: $N = 2$ СТРУНА, ТВИСТОРЫ И КОМПЛЕКСНО-ДВУМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ КАЛАБИ–ЯУ

Четырехмерная геометрия Керра–Шильда содержит две струнные структуры. Первая – это замкнутая струна, образованная сингулярным кольцом Керра, а вторая – открытая комплексная струна, обнаруженная в комплексной структуре геометрии Керра–Шильда. Вещественная и комплексная струны Керра вместе образуют мембранный источник “сверхэкстремального” решения Керра–Ньюмана без горизонта, $a = J/m \gg m$. Кроме того, недавно было получено, что главная световая конгруэнция геометрии Керра, которая определяется теоремой Керра как квартика в проективном твисторном пространстве, соответствует вложению комплексно-двумерного многообразия Калаби–Яу в твисторную структуру вещественной геометрии Керра. Подробно описано это вложение и показано, что четыре листа поверхности КЗ представляют собой аналитическое расширение конгруэнции Керра, порожденное антиподальной инволюцией.

Ключевые слова: геометрия Керра–Шильда, комплексный сдвиг, теорема Керра, твисторы, поверхность КЗ, $N = 2$ суперструна.

DOI: 1010.4231/tmf8542

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общепризнано, что черные дыры (ЧД) должны быть связаны с элементарными частицами. Физика ЧД основана на комплексной аналитичности и конформной теории поля, что объединяет теорию ЧД с теорией суперструн и физикой частиц. В нашей предыдущей работе [1] мы рассмотрели возникновение струнных структур в четырехмерной геометрии Керра–Шильда (КШ) без горизонтов. В безразмерных единицах $G = c = \hbar = 1$ это происходит, когда керровский параметр вращения $a = J/m$ превышает массовый параметр m . Соответствующий

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия.
E-mail: burinskii@mail.ru

случай “сверхэкстремальной” геометрии Керра, чрезвычайно важен для применения к элементарным частицам. Поскольку массы элементарных частиц очень малы, а спин может быть очень большим, мы получаем, что для частиц со спином параметр a превышает m на много порядков. В частности, масса электрона в безразмерных единицах $m \sim 10^{-22}$, а спин $J = \hbar/2 = 1/2$. Это дает $a = J/m \sim 10^{22}$, и значение параметра a превышает m почти на 44 порядка.

Основной особенностью сверхэкстремальной геометрии Керра является наличие голого сингулярного кольца Керра, которое представляет собой линию ветвления пространства Керра на два листа, образующую струнный топологический дефект в пространстве-времени. Для соответствия с квантовой теорией и с экспериментально установленной пренебрежимо малой ролью гравитации в феноменологии частиц сингулярную метрику следует регуляризовать, сведя ее к почти плоскому пространству-времени. Эта процедура шаг за шагом уточнялась многими авторами в течение более чем сорока лет и привела в конечном итоге к гладкому и регулярному источнику в виде релятивистски вращающегося и сильно сплюсненного вакуумного пузыря. Структура этого источника и соответствующие литературные ссылки обсуждались в работах [1] и [2].

Вакуумный пузырь покрывает сингулярное кольцо Керра, и сингулярная внутренность пузыря заменяется плоским пространством. При этом электромагнитное поле Керра–Ньюмана (КН) регуляризуется, принимая максимальное значение на ободе сплюсненного пузыря, и образует вокруг пузыря струнную петлю. Очень старое предположение, что сингулярное кольцо Керра играет роль замкнутой струны [3], впоследствии было подкреплено систематическими исследованиями сингулярных струнных решений в низкоэнергетической теории струн как солитонов [4]. В частности, в работе [5] было показано, что структура полей в окрестности сингулярного кольца решения Керра аналогична структуре фундаментальных струнных решений, полученных в работах [6], [7].

Вторая струнная структура была обнаружена в комплексном представлении геометрии Керра, в котором гравитационное и электромагнитное поля КН возникают как запаздывающее по времени поле комплексной частицы, распространяющейся вдоль комплексной мировой линии (КМЛ) [8]–[10]. Однако КМЛ является с вещественной точки зрения мировой поверхностью [11], и поэтому она эквивалентна струне [12], [13]. Комплексная мировая поверхность струны вкладывается в вещественную геометрию Керра, и, как обсуждалось в работе [1], вещественная и комплексная струны Керра вместе образуют мембрану, по аналогии с переходом от теории струн к М-теории [14]. Недавно обе струны Керра были упомянуты в работе [15], и, чтобы описать реакцию авторов, лучше всего привести цитату из этой работы: “... Бог должен оказаться довольно злонамеренным, чтобы составить такую красивую схему и не обеспечить, чтобы за ней было что-нибудь глубокое”.

В дополнение к этой струнной системе в работе [1] получен еще один замечательный факт – показано, что появляется комплексно-двумерное многообразие Калаби–Яу (поверхность К3) в проективном твисторном пространстве геометрии Керра. Это многообразие возникает как квартика на проективном твисторном пространстве $\mathbb{CP}^3$, которое в соответствии с теоремой Керра определяет керровскую главную световую конгруэнцию (ГСК). В работе [1] мы пришли к заключению, что возникаю-

щая тесная аналогия с теорией суперструн не случайна и может являться следствием наличия некоторой фундаментальной структуры, лежащей за пределами этих соотношений. В частности, мы предположили, что такое соответствие может быть связано с загадочной комплексной $N = 2$ струной, которая имеет критическую вещественную размерность четыре [16] и тесно связана с твисторами [11], [17].

В настоящей работе мы расширяем и уточняем рассмотрение пространства Калаби–Яу (поверхности КЗ), вложенного в четырехмерную геометрию КШ, а также приводим дополнительные аргументы в пользу предположения, что источником удивительной аналогии с теорией суперструн является критическая $N = 2$ суперструна, структура которой согласуется с твисторной структурой геометрии КШ. Мы будем работать в формализме КШ [18], который аналогичен формализму Ньюмана–Пенроуза, однако имеет преимущество, связанное с тем, что в формализме КШ справедлива теорема Керра, позволяющая описывать геодезическую бессдвиговую конгруэнцию на фоне вспомогательного пространства Минковского в терминах твисторов.

2. ОСНОВЫ ФОРМАЛИЗМА КШ

Структура решения КН. Метрика КН представляется в форме КШ [18] как

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2he_\mu^3 e_\nu^3, \quad (1)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – вспомогательное фоновое пространство Минковского с декартовыми координатами $x = x^\mu = (t, x, y, z)$ и сигнатурой $(-+++)$. В этом выражении

$$h = P^2 \frac{mr - e^2/2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad P = \frac{1 + Y\bar{Y}}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

и $e^3(x)$ – направление, касательное к ГСК, которое определяется уравнением

$$e_\mu^3 dx^\mu = du + \bar{Y} d\zeta + Y d\bar{\zeta} - Y\bar{Y} dv, \quad (3)$$

где

$$\zeta = \frac{x + iy}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\zeta} = \frac{x - iy}{\sqrt{2}}, \quad u = \frac{z + t}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{z - t}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

– световые декартовы координаты, а функции $Y(x^\mu)$ получены из теоремы Керра [9], [10], [19]–[23]. Координаты Керра r , θ , ϕ сплюсненного сфероида связаны с декартовыми координатами следующим образом:

$$x + iy = (r + ia)e^{i\phi} \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad \rho = t - r. \quad (5)$$

Сингулярное кольцо Керра соответствует каустике ГСК при $r = \cos \theta = 0$. Видно, что метрика (1) и электромагнитный потенциал решения КН

$$A_\mu = -P^{-2} \operatorname{Re} \frac{e}{r + ia \cos \theta} e_\mu^3 \quad (6)$$

коллинеарны со световым направлением e_μ^3 . При регуляризации решения КН сингулярное кольцо Керра вырезается вдоль некоторой поверхности, и вся внутренняя область заменяется плоским пространством. В результате образуется вакуумный пузырь, граница которого определяется условием $h = 0$ в соответствии с требуемой метрикой Минковского внутри пузыря и на границе. Из формул (2) видно, что эта граница соответствует координате $r = r_e = e^2/2m$, а из соотношений (5) видно, что она образует сильно сплюснутую эллипсоидную мембрану. Электромагнитное поле КН сосредоточено на остром крае этой мембраны и регуляризовано обрезанием при $r = r_e$.

Теорема Керра. Теорема Керра определяет бессдвиговые световые конгруэнции [18], [19] с касательным направлением, заданным уравнением (3), посредством комплексной функции $Y(x^\mu)$, которая является решением уравнения

$$F(T^A) = 0, \quad (7)$$

где $F(T^A)$ – любая голоморфная функция проективных твисторных координат

$$T^A = \{Y, \lambda^1 = \zeta - Yv, \lambda^2 = u + Y\bar{z}\}, \quad A = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Используя декартовы координаты x^μ , можно переупорядочить структуру твисторных координат и привести функцию $F(T^A)$ к виду $F(Y, x^\mu)$, что позволяет получить явное решение уравнения (7) в виде комплексной функции $Y(x^\mu)$.

Для решений Керра и КН производящая функция $F(Y, x^\mu)$ квадратична по Y ,

$$F = A(x^\mu)Y^2 + B(x^\mu)Y + C(x^\mu), \quad (9)$$

а уравнение (7) описывает *квадрику* в проективном твисторном пространстве $\mathbb{CP}^3$. Если определитель $\Delta = B^2 - 4AC$ невырожден, то он соответствует комплексному радиальному расстоянию Керра [9], [10]

$$\tilde{r} \equiv r + ia \cos \theta = -\Delta^{1/2},$$

и два решения уравнения (7)

$$Y^\pm(x^\mu) = -\frac{B \mp \tilde{r}}{2A} \quad (10)$$

определяют две различные конгруэнции Керра посредством выражения (3). Другое выражение для комплексного радиального расстояния, $\tilde{r} = -dF/dY$, можно получить из соотношений (9) и (10). Оно показывает, что сингулярное кольцо Керра $\tilde{r} = 0$ является каустикой конгруэнции Керра: $dF/dY = 0$.

Из формул Виета следует, что квадратичную по Y функцию (9) также можно выразить с помощью решений $Y^\pm(x^\mu)$ в виде

$$F(Y, x^\mu) = A(Y - Y^+(x^\mu))(Y - Y^-(x^\mu)). \quad (11)$$

Стационарные геометрии КШ. Решения Керра и КН являются стационарными решениями полевых уравнений Эйнштейна–Максвелла. Имеются также более общие стационарные решения КШ, для которых

$$A_\mu = -P^{-2} \operatorname{Re} \frac{\psi(Y)}{r + ia \cos \theta} e_\mu^3, \quad h = P^2 \frac{mr - |\psi(Y)|^2/2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta},$$

где $\psi(Y)$ – произвольная аналитическая функция. Полюсы функции $\psi(Y)$ соответствуют сингулярным лучам с носителем на твисторных световых линиях конгруэнции Керра [24]. Стационарные решения характеризуются постоянным вещественным направлением Киллинга K^μ , которое соответствует инвариантности метрики $g_{\mu\nu}$ относительно действия оператора Киллинга $\hat{K} = K^\mu \partial_\mu$,

$$\hat{K} g^{\mu\nu} = 0.$$

Это условие налагает ограничения на конгруэнцию Керра и на функции $Y^\pm(x)$ и $\bar{Y}^\pm(x)$,

$$\hat{K} e^3 = 0, \quad \hat{K} Y = \hat{K} \bar{Y} = 0,$$

и, как следствие, на производящую функцию $F(Y, x^\mu)$ теоремы Керра и на коэффициенты, $\hat{K} A = \hat{K} B = \hat{K} C = 0$.

3. КОМПЛЕКСНАЯ СТРУКТУРА ГЕОМЕТРИИ КЕРРА

Комплексное радиальное расстояние $\tilde{r} = r + ia \cos \theta$ в декартовых координатах (5) принимает вид $\tilde{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}$, и поэтому скалярную компоненту векторного потенциала (6) можно получить из кулоновского решения

$$\phi(\vec{x}) = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

комплексным сдвигом $z \rightarrow z + ia$ или сдвигом сингулярного начала координат $\vec{x}_L = (0, 0, 0)$ в комплексном направлении: $\vec{x}_L \rightarrow (0, 0, -ia)$. Комплексный сдвиг был впервые рассмотрен Аппелем в 1898 г. (см. книгу [25]). Аппель заметил, что кулоновское решение инвариантно относительно вещественного сдвига координат и, вследствие линейности уравнения Лапласа, должно быть также инвариантно относительно комплексного сдвига начала координат, что представляет собой тривиальное калибровочное преобразование. В результате этой тривиальной процедуры получаются нетривиальные следствия для вещественного сечения решения. В частности, сингулярная точка кулоновского решения $\vec{x}_L = (0, 0, 0)$ превращается в сингулярное кольцо $x^2 + y^2 + (z + ia)^2 = 0$ (пересечение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и плоскости $z = 0$), которое становится линией ветвления пространства, образуя двулистное пространство-время.

Как было показано в работах [8], [26], электромагнитное поле КН можно получить из кулоновского решения комплексным сдвигом. В работе [8] была предложена

комплексная конструкция запаздывающего времени, в которой линейаризованное решение КН представляется как поле, порожденное комплексным источником, распространяющимся вдоль КМЛ. Позднее в работах [9], [10] было показано, что конструкция запаздывающего времени дает точное представление в формализме КШ. Такая точность возникает как следствие специфической линейаризации гравитации КШ и аналитичности твисторной структуры, определяемой теоремой Керра.

Основным элементом комплексной конструкции запаздывающего времени является семейство комплексных световых конусов $\mathcal{K}$, присоединенных к каждой точке КМЛ. Если взять левую КМЛ как основу для рассмотрения, то можно представить семейство присоединенных комплексных световых конусов в спинорном виде:

$$\mathcal{K}_L = \{x: x = x_L^i(\tau_L) + \psi_L^A \sigma_{AA}^i \tilde{\psi}_R^{\dot{A}}\}. \quad (12)$$

Конусы расщепляются на два семейства световых плоскостей: “левые” ($\psi_L = \text{const}$ и $\tilde{\psi}_R$ переменные) и “правые” ($\psi_R = \text{const}$ и $\tilde{\psi}_L$ переменные). Световые лучи конгруэнции Керра возникают как вещественное сечение левых (или правых) комплексных световых плоскостей на вспомогательном фоновом пространстве Минковского метрики КШ. Вещественное световое направление e_μ^3 в равенстве (3) является проективной формой спинорного выражения $\psi_L^A \sigma_{\mu A \dot{A}} \tilde{\psi}_L^{\dot{A}}$, в котором спинор ψ_L^A заменяется первой проективной твисторной координатой $T^1 \equiv Y = \psi_L^2 / \psi_L^1$. Вещественная форма e^3 дополняется двумя комплексно-сопряженными световыми формами

$$e^1 = d\zeta - Y dv, \quad e^2 = d\bar{\zeta} - \bar{Y} dv.$$

Видно, что вторая проективная твисторная координата

$$T^2 \equiv \lambda^1 = \zeta - Y v = x^\mu e_\mu^1$$

представляет собой проекцию точки пространства-времени x^μ на световое направление e^1 , а третья проективная твисторная координата

$$T^3 \equiv \lambda^2 = u + Y \bar{z} = x^\mu (e_\mu^3 - \bar{Y} e_\mu^1)$$

является линейной комбинацией проекций на световые направления e^3 и e^1 . Определяемая теоремой Керра функция $Y(x)$ позволяет восстановить в каждой точке x остальные твисторные координаты λ^1 и λ^2 и фиксировать инцидентную левую световую плоскость, порожденную световыми направлениями e^3 и e^1 . Следует упомянуть аналитичность такого построения.

Левая световая плоскость соединяет вещественные точки x^μ с комплексной точкой x_L^μ левой КМЛ. Она принадлежит входящему листу светового конуса, присоединенного к точке x^μ , и одновременно исходящему листу светового конуса, излучаемого левой КМЛ из точки x_L^μ . Точка x_L^μ пересечения левой световой плоскости с КМЛ задает значение левого запаздывающего времени τ_L , которое становится комплексно-аналитической скалярной функцией $\tau_L(x^\mu)$ на вещественном пространстве-времени. В работе [10] такая инцидентность была названа L-проекцией.

Рис. 1. Конгруэнция Керра твисторных световых линий ГСК имеет фокус на сингулярном кольце Керра, образуя линию ветвления пространства КШ на два листа.

Аналогичная система правых световых плоскостей, порожденных световыми направлениями e^3 и e^2 , соединяет вещественные точки x^μ с правой КМЛ и определяет антианалитическую R-проекцию и запаздывающие времена $\tau_R(x^\mu)$. Для вещественных x^μ функции $Y(x^\mu)$ и $\bar{Y}(x^\mu)$ являются комплексно-сопряженными и определяют сопряженные правые и левые световые плоскости. Аналитичность производящей функции $F(T^A)$ и определяемые теоремой Керра соответствующие решения $Y^\pm(x^\mu)$ обуславливают независимость аналитических и антианалитических L- и R-структур, допуская комплексно-аналитическое расширение вещественной геометрии КШ. В соответствии с аналитичностью теоремы Керра L-проекция расслаивает комплексифицированное пространство-время Минковского CM^4 на левые световые плоскости. С учетом алгебраически специфической структуры метрики КШ (1) и калибровочного поля (6) нелинейные члены выпадают, и аналитическое левое расслоение на световые плоскости приводит к специфической линеаризации пространства КШ. В результате в этой теории, несмотря на нелинейность, работает твисторный вариант преобразования Фурье (введенный Виттеном в работе [27]), образуя мост между гравитацией КШ и квантовой теорией.

Стационарное решение КН представляется как запаздывающее по времени поле, порожденное комплексным источником, движущимся вдоль прямой КМЛ [9], [10]:

$$x_L^\mu(\tau_L) = x_0^\mu(0) + u^\mu \tau_L + \frac{ia}{2}(k_L^\mu - k_R^\mu), \quad (13)$$

где $u^\mu = (1, \vec{v})$ – вещественная 4-скорость, $k_R = (1, 0, 0, 1)$, $k_L = (1, 0, 0, -1)$, а $\tau_L = t_L + i\sigma_L$ – комплексный параметр запаздывания по времени. Индекс L обозначает

левую комплексную структуру; кроме того, нужно добавить комплексно-сопряженную правую:

$$x_R^\mu(\tau_R) = x_0^\mu(0) + u^\mu \tau_R - \frac{ia}{2}(k_L^\mu - k_R^\mu). \quad (14)$$

Комплексный сдвиг превращает пучок шварцшильдовских радиальных направлений $\vec{n} = \vec{r}/|r|$ в твисторные направления конгруэнции Керра, как показано на рис. 1.

4. КОМПЛЕКСНАЯ ОТКРЫТАЯ СТРУНА

Комплексная мировая линия $x_0^\mu(\tau)$, параметризованная комплексным временем τ , представляет собой двумерную поверхность, которая занимает промежуточное положение между частицами и струнами [11], [12]. Соответствующее уравнение “гиперболической струны” [11],

$$\partial_\tau \partial_{\bar{\tau}} x_0(t, \sigma) = 0,$$

отвечает бозонной части комплексной $N = 2$ струны [16]. Общее решение

$$x_0(t, \sigma) = x_L(\tau) + x_R(\bar{\tau})$$

представляет собой сумму аналитических и антианалитических мод $x_L(\tau)$, $x_R(\bar{\tau})$, которые не обязательно являются комплексно-сопряженными. Для каждой вещественной точки x^μ параметры $\tau = \tau_L$ и $\bar{\tau} = \tau_R$ должны определяться комплексной конструкцией запаздывающего времени – комплексным аналогом вещественной конструкции запаздывающих потенциалов. Комплексный источник вещественного решения КН соответствует двум комплексно-сопряженным прямым мировым линиям (13) и (14). Комплексный световой конус (12) расщепляется на левые и правые комплексные световые плоскости. В соответствии с запаздывающими (опережающими) по времени уравнениями $\tau^\mp = t \mp \tilde{r}$ пересечения левых световых плоскостей с левой КМЛ, а также с сопряженной правой структурой определяют четыре запаздывающе-опережающих комплексных временных параметра [9], [10]

$$\tau_L^\mp = t \mp (r_L + ia \cos \theta_L), \quad \tau_R^\mp = t \mp (r_R + ia \cos \theta_R).$$

Вещественное сечение геометрии Керра генерируется комплексно-сопряженными корнями $\tau_L = t_L + i\sigma_L$ и $\tau_R = t_R + i\sigma_R$, что задает связь $\sigma_L = -\sigma_R = \sigma = a \cos \theta$, приводящую к зависимости угловых направлений световых лучей θ от параметра σ на мировом листе. Поскольку $|\cos \theta| \leq 1$, получаем $\sigma \in [-a, a]$, следовательно, у комплексной струны должны быть концы $\sigma = \pm a$ и она должна быть открытой. Комплексные концы струны отображаются в “северную” и “южную” линии конгруэнции Керра, соответствующие $\theta = 0, \pi$, как показано на рис. 2.

Ориентифолд в качестве мирового листа. Граничные условия для комплексной открытой струны требуют введения структуры *ориентифолда* [12], [16], [28], которая превращает открытую струну в замкнутую, но сложенную. Преобразование четности на мировой поверхности $\sigma \rightarrow -\sigma$ обращает ориентацию мировой поверхности и повторно накрывает ее в зеркальном направлении. Одновременно нужно поменять левую моду на правую. Две ориентированные копии $\Sigma^+ = [-a, a]$ и $\Sigma^- = [-a, a]$ интервала $\Sigma = [-a, a]$ соединяются, образуя окружность

Рис. 2. Комплексно-сопряженные левая и правая световые плоскости порождают четыре корня для левого и правого запаздывающего и опережающего времен.

$S^1 = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, параметризованную переменной θ , а отображение $\theta \rightarrow \sigma = a \cos \theta$ дважды накрывает мировую поверхность. Струнные моды $x_L(\tau)$ и $x_R(\bar{\tau})$ продолжаютс на вторую полуокружность путем известной экстраполяции [16], [28]

$$x_L(\tau^+) = x_R(\tau^-), \quad x_R(\tau^+) = x_L(\tau^-), \quad (15)$$

образуя сложенную струну, в которой запаздывающая и опережающая моды меняются через каждую половину цикла. Обращение σ действует на комплексную радиальную координату $\tilde{r} = r + ia \cos \theta$ как антианалитическая инволюция

$$C: r + ia \cos \theta \rightarrow r - ia \cos \theta.$$

Другая антианалитическая инволюция появляется при отражении вещественной радиальной координаты, $R: r \rightarrow -r$. Аналитичность мирового листа восстанавливается при применении двойной антианалитической инволюции $T = CR$. Применяя $T\tilde{r} = -\tilde{r}$ к левой КМЛ, получаем

$$T: \tau_L^\pm \rightarrow \tau_L^\mp, \quad (16)$$

что задает ориентифолдную симметрию между запаздывающим и опережающим временами одной и той же левой КМЛ и позволяет не обращать внимания на антианалитическую правую структуру.

5. ВЛОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУНЫ В ВЕЩЕСТВЕННУЮ ГЕОМЕТРИЮ КШ

Комплексные параметры на мировой поверхности $\tau^\pm = t \pm r + ia \cos \theta$ отображаются в вещественную геометрию КШ как координаты $\rho^\pm = t \pm r$ и θ , поэтому преобразование Керра для координат (5) можно рассматривать как вложение мировой поверхности в тело вещественной геометрии КШ. В то же время это является

вложением твисторных координат левых световых плоскостей. Первая твисторная координата $Y = \psi_L^1/\psi_L^0$ определяет направления световых лучей $Y = e^{i\phi} \operatorname{tg}(\theta/2)$ в соответствии с (3). Координата ϕ добавляет мировому листу дополнительную размерность, расширяя его до мембраны, которая образуется при слиянии вещественной замкнутой струны Керра с комплексной открытой струной, аналогично модели объединения теории струн и М-теории [1], [28].

Два решения $Y^\pm(x)$ из теоремы Керра имеют различные вложения в вещественную геометрию КШ. Для простоты рассмотрим покоящийся источник Керра со стандартной ориентацией углового момента вдоль оси z . Предполагая, что комплексный источник расположен в точке $\vec{x}_L = (0, 0, -ia)$ и полагая в (13) $x_0^\mu(0) = 0$ и $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, перепишем левую КМЛ и ее производную по времени в световых координатах (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} x_L(\tau_L) &= \{u_L, v_L, \zeta_L, \bar{z}_L\} = 2^{-1/2}\{-ia + \tau_L, -ia - \tau_L, 0, 0\}, \\ \dot{x}_L &= \{\dot{u}_L, \dot{v}_L, \dot{\zeta}_L, \dot{\bar{z}}_L\} = 2^{-1/2}\{1, -1, 0, 0\}. \end{aligned}$$

Коэффициенты A , B , C для этого случая были получены в работах [9], [10]; они имеют вид

$$\begin{aligned} A_L &= (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_L(\tau))\dot{v}_L(\tau) - (v - v_L(\tau))\dot{\zeta}_L(\tau), \\ B_L &= (u - u_L(\tau))\dot{v}_L(\tau) + (\zeta - \zeta_L(\tau))\dot{\bar{z}}_L(\tau) - (\bar{z} - \bar{z}_L(\tau))\dot{\zeta}_L(\tau) - (v - v_L(\tau))\dot{u}_L(\tau), \\ C_L &= (\zeta - \zeta_L(\tau))\dot{u}_L(\tau) - (u - u_L(\tau))\dot{\zeta}_L(\tau), \end{aligned}$$

что для левой КМЛ приводит к выражениям

$$A_L = -\frac{x - iy}{2}, \quad B_L = -z - ia, \quad C_L = \frac{x + iy}{2}. \quad (17)$$

Отсюда, используя производящую функцию $F_L(T^A) = A_L Y^2 + B_L Y + C_L$, получаем

$$Y_L^\pm = \frac{-z - ia \pm \tilde{r}_L}{x - iy}, \quad (18)$$

где

$$\tilde{r}_L = (B_L^2 - 4A_L C_L)^{1/2} = [x^2 + y^2 + (z + ia)^2]^{1/2} \quad (19)$$

соответствует комплексному радиальному расстоянию от источника в решении Апеля. Далее будем опускать индекс L , когда мы работаем только с левой КМЛ. Представляя комплексное радиальное расстояние в виде $\tilde{r} = r + i\eta$ и возводя равенство (19) в квадрат, получаем два вещественных уравнения. Первое уравнение $r\eta = az$ можно интерпретировать как аналог соотношения $z = r \cos \theta$. Полагая $\eta = a \cos \theta$, получаем

$$\tilde{r} = r + ia \cos \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (20)$$

Второе уравнение, вытекающее из соотношения (19), можно скомбинировать с уравнением (20), что дает $x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta$. Это уравнение можно разбить на

четыре различных линейных соотношения $x + iy = (r \pm ia)e^{\pm i\phi} \sin \theta$, которые определяются различными комбинациями знаков $\pm ia$ и $\pm i\phi$. Получаем четыре листа, соответствующих четырем различным вложениям мировой поверхности комплексной струны.

Ориентифолдизация в вещественном пространстве Керра. Вложение мировой поверхности фиксирует также отображение левых световых плоскостей в вещественные лучи конгруэнции Керра в соответствии с (3). Рассматривая соотношения для координат Керра (5) как аналитические, можно представить приведенное в (18) решение Y^+ в виде

$$Y^+ = \frac{e^{i\phi}(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} = e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Это есть не что иное, как исходный вид функции Y , приведенный в работе [18]. В то же время для Y^- получаем сложное выражение

$$Y^- = \frac{-(r + ia)(1 + \cos \theta)}{x - iy},$$

которое показывает, что “аналитическое” вложение (5) не согласуется с Y^- и, следовательно, связано с “антианалитическими” преобразованиями

$$x + iy = (r - ia)e^{i\phi} \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

которые приводят к простому соотношению

$$Y^- = \frac{-e^{i\phi}(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} = -e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{Y^+}.$$

Мы обнаружили, что решения Y^+ и Y^- связаны антиподальной инволюцией

$$I^*: Y^+ \rightarrow Y^- = -\frac{1}{Y^+}, \quad (21)$$

которая коррелируется с кросс-симметрией левой и правой структур мирового листа (15), как показано на рис. 3. Антиподальная инволюция

$$I^*: \theta \rightarrow \tilde{\theta} = \pi - \theta, \quad \phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi + \pi \quad (22)$$

исследовалась в случае невращающихся ЧД в работе [29], где рассмотрено, как получаются решения для неориентируемых ЧД или ЧД с единственной внешней стороной.

Двумерное многообразие Калаби–Яу из теоремы Керра. Как следует из формулы (18), координаты $x_L^\mu(\tau^-)$ и 4-скорость $u^\mu(\tau^-)$ левой КМЛ, определяемые левым комплексным запаздывающим временем τ_L^- , приводят к двум решениям $Y^\pm(x^\mu, \tau_L^-)$. Из формул (10) видно, что Y^+ и Y^- отличаются только знаком перед

Рис. 3. Концы открытой комплексной струны, связанные с квантовыми числами пары кварк–антикварк, отображаются на вещественные полубесконечные аксиальные струны z^+ , z^- . Штриховые линии показывают ориентифолдную проекцию.

членом $\tilde{r}$. В соответствии с (16) это различие соответствует замене левого запаздывающего времени τ_L^- на левое опережающее время τ_L^+ , и поэтому второе решение должно отождествляться с левым опережающим решением $Y^-(x^\mu, \tau_L^+)$.

Оба левых решения являются аналитическими, поскольку переход к $Y^-(x^\mu, \tau_L^+)$ можно представить как результат двух антианалитических преобразований, комплексного сопряжения C и антиподального отображения I^* , аналогично двухшаговому преобразованию мирового листа (16). На вещественном сечении как левое и правое запаздывающие решения $Y^+(x^\mu, \tau_L^-)$ и $\bar{Y}^+(x^\mu, \tau_R^-)$, так и соответствующие запаздывающие времена τ_R^- и τ_L^- являются комплексно-сопряженными. Антиподальное отображение (21) связывает левое опережающее решение $Y^-(x^\mu, \tau_L^+)$ с правым запаздывающим решением $\bar{Y}^+(x^\mu, \tau_R^-)$, формируя кросс-симметрию, как показано на рис. 3.

На вещественном сечении левые запаздывающее и опережающее решения строго коррелированы. Однако эта корреляция разрушается, если x^μ выходит в комплексную область. Комплексная аналитичность теоремы Керра активно используется при интегрировании полевых уравнений в работе [18], что предполагает независимость левых производящих функций $F_{\text{ret}} \equiv F\{T^A, \tau^+\}$ и $F_{\text{adv}} \equiv F\{T^A, \tau^-\}$ и соответствующих решений $Y_{\text{ret}}^-(x^\mu) \equiv Y^-(x^\mu, \tau_L^-)$ и $Y_{\text{adv}}^+ \equiv Y^+(x^\mu, \tau_L^+)$.

Каждая из функций $F_{\text{ret}}\{T^A\}$ и $F_{\text{adv}}\{T^A\}$ порождает два листа геометрии КШ. Пространство-время, определенное двумя независимыми производящими функциями, оказывается четырехлистным, и должно определяться многочастичным вариантом теоремы Керра, рассмотренным в работах [22], [23]. В частности, аналитическая “двойная” производящая функция $F_2(T^A)$ должна иметь вид

$$F_2(T^A) = F_{\text{ret}}(T^A)F_{\text{adv}}(T^A).$$

Рис. 4. Один лист поверхности КЗ при $r > 0$ и $\phi = \text{const}$. Конгруэнция Керра касательна к сингулярности при $\theta = \pi/2$.

Как следствие выражений (11) получаем

$$F_2(T^A) = A_{\text{ret}} A_{\text{adv}} (Y - Y_{\text{ret}}^+(x^\mu)) (Y - Y_{\text{ret}}^-(x^\mu)) (Y - Y_{\text{adv}}^+(x^\mu)) (Y - Y_{\text{adv}}^-(x^\mu)),$$

и уравнение (7) приобретает четвертый порядок по Y , образуя кватрику в пространстве $\mathbb{CP}^3$, что представляет собой канонический вид комплексно-двумерного многообразия Калаби–Яу, известного как гиперповерхность КЗ [16], [28].

Для каждой точки $x^\mu \in M^4$ решения $Y(x^\mu)$ можно преобразовать к твисторным координатам T^A , используя соотношения (8) и (4).

Четыре решения $Y(x^\mu)$ соответствуют различным листам поверхности КЗ и осуществляют различные вложения конгруэнции Керра в вещественную геометрию Керра в соответствии с (3). Антиподальное отображение действует на вещественных световых направлениях $e^{3\mu}$ как инверсия пространственноподобной части, поэтому конгруэнции, которые порождены функциями F_{ret} и F_{adv} , не эквивалентны. В частности, касательный к конгруэнции Керра нормированный световой вектор $k^\mu(x) = e^{3\mu}(x)/|e^{30}|$ преобразуется следующим образом:

$$I^*: k_{\text{out}}^\mu = \{k^0, \vec{k}\} \rightarrow k_{\text{in}}^\mu = \{k^0, -\vec{k}\}.$$

Сечение поверхности КЗ, соответствующее $\phi = \text{const}$ и $r > 0$, представлено на рис. 4. Видно, что этот лист является линейчатой поверхностью, порожденной твисторными световыми линиями, которые параметризованы аффинным параметром $r \in [0, \infty]$. При изменении θ от 0 до π линии поворачиваются на угол θ . В эква-

Рис. 5. Область поверхности КЗ вблизи кольца Керра, соответствующего $\phi = \text{const}$. Два листа, $r > 0$ и $r < 0$, образуют ленту Мёбиуса, дважды накрывающую пространство-время.

ториальной плоскости $\theta = \pi/2$ световые лучи касательны к кольцу Керра. Аналитическое расширение поверхности $\phi = \text{const}$ в область отрицательных $r \in [0, -\infty]$, как показано на рис. 1 и рис. 5, дает второй лист поверхности КЗ, который соответствует “отрицательному” листу геометрии Керра. Суммарная поверхность образует лист Мёбиуса, поскольку граничные линии при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ ориентированы противоположно. Антиподальное отображение I^* создает два дополнительных листа поверхности КЗ, которые являются опережающими складками конгруэнции Керра.

Глобальная антиподальная инволюция (22) преобразует поверхность $\phi = \text{const}$ в поверхность $\phi + \pi = \text{const}$ с одновременной инволюцией световых генераторов. Хотя поверхности $\phi = \text{const}$ и $\phi + \pi = \text{const}$ гладко сшиты, северная и южная граничные линии этих поверхностей ориентированы противоположно. Коль скоро ориентация изменяется с переходом от $r > 0$ к $r < 0$, можно видеть, что аналитическое склеивание четырех листов поверхности КЗ получится при кросс-симметричном отождествлении границ запаздывающих и опережающих складок конгруэнции Керра. Четыре листа поверхности КЗ определяют ориентирующую симметрию геометрии Керра, при которой главные световые направления e^3 дублируются присоединенными входящими и исходящими световыми лучами.

Струнные возбуждения. Направление Киллинга K^μ можно выразить в декартовых координатах через координаты КМЛ: $K^\mu = \partial_t x_L^\mu(\tau)$, при этом коэффициенты A, B, C в (17) становятся функциями координат и 4-скорости КМЛ u^μ . Струнные возбуждения в классической системе связаны с излучением энергии и отдачей, что ведет к нестационарности решения. Точные нестационарные решения КШ неизвестны, однако нестационарные решения без учета отдачи были получены в работах [24], [30]. Отдача предполагает отклонение 4-скорости $\delta \dot{x}_L^\mu(\tau)|_{\tau^-}$ для моментов

времени $t > 0$, что влечет различие между параметрами A , B , C , определенными для запаздывающего и опережающего времен τ^- и τ^+ . В результате мы получаем две независимые производящие функции $F_{\text{ret}}(T^A)$ и $F_{\text{adv}}(T^A)$. Такое удвоение конгруэнции Керра порождает четыре листа поверхности КЗ. Независимость запаздывающего и опережающего решений создает нарушение ориентифолдной четности конгруэнции Керра. Северная и южная границы листов Керра расщепляются, однако сохраняется гладкое попарное соответствие четырех листов, результатом чего является сохранение аналитичности поверхности КЗ.

6. ПЕРСПЕКТИВЫ

В работе [1] обсуждалось, что геометрия КШ демонстрирует поразительную аналогию с основными структурами теории суперструн. Однако одновременно с этой замечательной аналогией геометрия КН имеет также несколько отличительных особенностей.

Главная особенность состоит в том, что вещественные и комплексные струны Керра, а также связанные с ними струнные структуры такие, как ориентифолд и М2-брана, живут в четырехмерном пространстве-времени. Здесь появляется замечательная возможность, заключающаяся в том, что компактификацию высших размерностей можно заменить комплексификацией. Вторая особенность связана с характерным параметром струны Керра $a = \hbar/m$, который соответствует комптоновскому масштабу, и этот новый параметр приближает комплексный вариант теории суперструн к физике частиц.

Наконец, заметим, что, кроме непротиворечивых критических струн в размерностях $d = 26$ и $d = 10$, существует также комплексная $N = 2$ струна [16], [17], которая имеет вещественную критическую размерность $d = 4$ и которая могла бы быть использована как основа для некоторой четырехмерной теории струн [31]. Ключевое препятствие для ее применения проистекает из ее сигнатуры, которая может быть только $(2,2)$ или $(4,0)$, что не согласуется с вложением в вещественное пространство-время Минковского. Насколько нам известно, эта проблема до сих пор не решена, и первоначально колоссальный интерес к этой струне постепенно затих.

Мы обнаружили, что $N = 2$ струна имеет естественное вложение в комплексифицированную четырехмерную геометрию Керра. Эрмитово действие для комплексной мировой линии Керра

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\tau d\bar{\tau} g_{\mu\nu} \partial_\tau x^\mu \partial_{\bar{\tau}} \bar{x}^\nu$$

соответствует бозонной части действия $N = 2$ струны [11], [16], [17]. Обобщение времени τ до комплексного супервремени $\mathcal{T}$ превращает КМЛ в супер-КМЛ $X^\mu(\mathcal{T})$ [12], [32] и приводит к действию $N = 2$ суперструны [16]. Дополнительное спинорное поле $\psi(\tau)$ на мировой поверхности соответствует левым световым плоскостям комплексной геометрии Керра, генераторам поверхности КЗ и конгруэнций Керра. Подробная интерпретация такой структуры выходит за рамки настоящей работы, и ее следует рассмотреть отдельно.

Благодарности. Автор благодарит Тео Ниувенхойзена за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения, а также Дирка Боумистера за приглашение в Лейденский университет, где идеи настоящей работы подробно обсуждались с ним и с членами его группы Яном Вильямом Далхойзеном, Эмми Томпсон и Джо Шверджином. Автор также благодарит Лаура Йерва за полезные обсуждения на Таллинской конференции “3Quatum” и за указание на работу [14]. Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00602).

Список литературы

- [1] A. Burinskii, *Adv. High Energy Phys.*, **2013** (2013), 509749, 6 pp., arXiv: 1211.6021.
- [2] A. Burinskii, *J. Phys. A*, **43**:39 (2010), 392001, 10 pp., arXiv: 1003.2928.
- [3] Д. Д. Иваненко, А. Я. Буринский, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия*, **5** (1975), 135–137.
- [4] A. Dabholkar, J. P. Gauntlett, J. A. Harvey, D. Waldram, *Nucl. Phys. B*, **474**:1 (1996), 85–121, arXiv: hep-th/9511053.
- [5] A. Burinskii, *Phys. Rev. D*, **52**:10 (1995), 5826–5831, arXiv: hep-th/9504139.
- [6] A. Sen, *Nucl. Phys. B*, **388**:2 (1992), 457–473, arXiv: hep-th/9206016.
- [7] A. Sen, *Phys. Rev. Lett.*, **69**:7 (1992), 1006–1009, arXiv: hep-th/9204046.
- [8] R. W. Lind, E. T. Newman, *J. Math. Phys.*, **15**:7 (1974), 1103–1112.
- [9] A. Burinskii, R. P. Kerr, *Nonstationary Kerr congruences*, arXiv: gr-qc/9501012.
- [10] A. Burinskii, *Phys. Rev. D*, **67**:12 (2003), 124024, 11 pp., arXiv: gr-qc/0212048.
- [11] H. Ooguri, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **361**:2 (1991), 469–518; **367**:1 (1991), 83–104.
- [12] A. Ya. Burinskii, “String-like structures in complex Kerr geometry”, *Relativity Today* (Gárdony, Hungary, 12–17 July 1992), eds. R. P. Kerr, Z. Perjés, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1994, 149–158, arXiv: gr-qc/9303003.
- [13] A. Burinskii, *Phys. Rev. D*, **70**:8 (2004), 086006, 6 pp., arXiv: hep-th/0406063.
- [14] L. M. Dyson, L. Järv, C. V. Johnson, *JHEP*, **05** (2002), 019, 33 pp., arXiv: hep-th/0112132.
- [15] T. M. Adamo, E. T. Newman, *Phys. Rev. D*, **83**:4 (2011), 044023, 20 pp., arXiv: 1101.1052.
- [16] M. B. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, v. 1: *Introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [17] J. Barrett, G. W. Gibbons, M. J. Perry, C. N. Pope, P. Ruback, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:09 (1994), 1457–1493, arXiv: hep-th/9302073.
- [18] G. C. Debney, R. P. Kerr, A. Schild, *J. Math. Phys.*, **10**:10 (1969), 1842–1854.
- [19] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, **6**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.
- [20] R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **8**:2 (1967), 345–366.
- [21] R. Penrose, W. Rindler, *Spinors and Space-Time*, v. 2: *Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [22] A. Burinskii, *Gravit. Cosmol.*, **11**:4 (2005), 301–304, arXiv: hep-th/0506006.
- [23] A. Burinskii, *Internat. J. Geom. Meth. Modern Phys.*, **4**:3 (2007), 437–456, arXiv: hep-th/0510246.
- [24] A. Burinskii, *Gen. Rel. Grav.*, **41**:10 (2009), 2281–2286, arXiv: 0903.3162.
- [25] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Физматгиз, М., 1963.

- [26] А. Я. Буринский, *ЖЭТФ*, **66**:2 (1974), 406–411.
- [27] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 189–258, arXiv: hep-th/0312171.
- [28] K. Becker, M. Becker, J. Schwarz, *String Theory and M-Theory. A Modern Introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [29] A. Chamblin, G. W. Gibbons, *Phys. Rev. D*, **55**:4 (1997), 2177–2185, arXiv: gr-qc/9607079.
- [30] А. Я. Буринский, *ТМФ*, **163**:3 (2010), 467–474, arXiv: 0911.5499.
- [31] A. D’Adda, F. Lizzi, *Phys. Lett. B*, **191**:1–2 (1987), 85–90.
- [32] A. Ya. Burinskii, *Phys. Rev. D*, **57**:4 (1998), 2392–2396, arXiv: hep-th/9704102.

Поступила в редакцию 18.04.2013