Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Зеленов, Качественная теория p -адических динамических систем, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 2, 220–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:27:33

© 2014 г.

Е. И. Зеленов*

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ p -АДИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрен класс динамических систем над полем p -адических чисел – иерархические динамические системы. Доказан усиленный вариант теоремы Пуанкаре о числе возвращений для таких систем. Показано, что иерархические системы не обладают свойством перемешиваемости. Дано описание иерархических динамических систем над проективной прямой. Приведен пример неиерархической p -адической системы, которая обладает перемешиванием – p -адическое преобразование пекаря.

Ключевые слова: p -адические динамические системы, эргодичность, перемешиваемость, p -адическое преобразование пекаря.

DOI: 10.4213/tmf8543

1. ВВЕДЕНИЕ

С момента выхода в свет работы [1] неархимедов анализ активно применяется для построения физических моделей. Возникло целое направление в математической физике – p -адическая математическая физика. Библиографию по этому вопросу можно найти в книге [2] и в обзоре [3].

В ряде моделей, построенных с применением аппарата p -адической математической физики (см., например, модель динамики белка [4]), было отмечено явление медленной релаксации к равновесному состоянию. Причиной является наличие иерархической структуры в пространстве состояний системы.

В настоящей работе делается попытка построить качественную теорию таких иерархических динамических систем. В частности, показано, что иерархические динамические системы не обладают свойством перемешиваемости. С качественной точки зрения именно свойство перемешиваемости обеспечивает быструю релаксацию к равновесному состоянию динамической системы, отсутствие же этого свойства у иерархических систем объясняет явление медленной релаксации.

Динамические системы над неархимедовыми полями исследовались в работах многих авторов. Библиографию по этому вопросу можно найти в монографии [5].

*E-mail: evgeny.zelenov@gmail.com

2. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Мы будем рассматривать обратимые динамические системы с дискретным временем.

2.1. Фазовое пространство и динамическое отображение. В качестве фазового пространства изучаемых динамических систем будет выступать p -адическое аналитическое компактное многообразие в смысле Серра [6]. Структура таких многообразий дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – локально-компактное ультраметрическое поле, q – количество элементов поля вычетов поля k , X – аналитическое, компактное, непустое многообразие, имеющее всюду одинаковую размерность $d \geq 1$ над полем k . Тогда X – несвязное объединение конечного числа N шаров. Число

$$n(X) = N \bmod (q - 1)$$

является инвариантом многообразия X .

Число $n(X)$ будем называть индексом многообразия X . Далее мы рассмотрим случай $k = \mathbb{Q}_p$, тогда $q = p$, хотя результаты верны и для общего случая поля k .

ПРИМЕР 1. Пусть $X = \mathbb{Z}_p$. В этом случае $n(X) = 1$.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = S = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$. В этом случае $n(X) = 0$.

ПРИМЕР 3. Пусть $X = P^1$ – проективная прямая над $\mathbb{Q}_p$. Тогда $n(X) = 2$.

В качестве динамических отображений будут выступать аналитические автоморфизмы фазового пространства.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В действительности будет рассматриваться более общий случай, когда от динамического преобразования T мы будем требовать, чтобы шар отображался в шар и при отображении T сохранялась иерархия вложенных шаров. Такого типа отображения рассматривались, например, в работе [7].

Всюду далее под динамической системой будем понимать иерархическую динамическую систему, если явно не указано обратное.

2.2. Геометрическое представление. Существует удобное геометрическое представление иерархических динамических систем в виде древесного графа шаров. Вершинами этого графа являются шары фазового пространства. Два шара $A, B \subset X$ являются соседними (образуют ребро графа), если один из них строго содержится в другом (например, $A \subset B$) и не существует такого шара $C \subset X$, который бы строго содержал вложенный шар и при этом строго содержался в большем шаре: $A \subset C \subset B$. Два полубесконечных пути без возвратов на таком графе будем считать эквивалентными, если они отличаются не более чем конечным числом вершин. Классы эквивалентности полубесконечных путей находятся во взаимно однозначном соответствии с точками фазового пространства X . Сохранение иерархии шаров при динамическом отображении T эквивалентно условию продолжимости автоморфизма T до автоморфизма графа.

3. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

Поскольку наше фазовое пространство есть объединение конечного числа шаров, на нем естественным образом определена мера μ (мера шара равна его радиусу). Рассмотрим класс иерархических динамических систем, сохраняющих эту меру. К такого рода системам, например, относятся обратимые иерархические системы над $\mathbb{Z}_p$, т. е. системы вида $(\mathbb{Z}_p, T)$, где T – автоморфизм. Это легко увидеть из геометрического представления такой динамической системы.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим динамическую систему $(\mathbb{Z}_p, T)$, где динамическое преобразование T – единичный сдвиг, $Tx = x + 1, x \in \mathbb{Z}_p$. Эта система является эргодической, топологически транзитивной и минимальной. Топологическая транзитивность следует из того факта, что целые рациональные числа плотны в $\mathbb{Z}_p$, а топологически транзитивный сдвиг на группе минимален. Заметим, что p -я степень этой динамической системы, т. е. система $(\mathbb{Z}_p, T^p)$, не является эргодической (шар радиуса $1/p$ инвариантен относительно сдвига на p).

Приведенный пример является достаточно общим для p -адических динамических систем в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, T) – p -адическая динамическая система и автоморфизм T сохраняет меру. Через $N_B^a(n)$ обозначим количество возвращений из точки $a \in B$ в шар B за время n . Тогда $N_B^a(n)$ не зависит от a , $N_B^a(n) = N_B(n)$. Если динамическая система (X, T) эргодична, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_B(n)}{n}$$

и этот предел равен $\mu(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала независимость функции $N_B^a(n)$ от a . Будем следить не за траекторией точки a под действием преобразований T^n , а за траекторией всего шара B . Преобразование T сохраняет меру, поэтому $T^n B$ – шар того же радиуса, что и шар B , следовательно, шары $T^n B$ и B либо не пересекаются, либо совпадают. Если $T^n a \in B$, то $T^n B = B$, откуда и следует независимость величины $N_B^a(n)$ от a .

Рассмотрим унитарный оператор U на пространстве $L^2(X, \mu)$ следующего вида: $(Uf)(x) = f(Tx), f \in L^2(X, \mu)$. В соответствии с эргодической теоремой фон Неймана справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f = (f, 1).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^k B \cap B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (U^{-k} h_B, h_B) = (h_B, 1)(h_B, 1) = \mu^2(B).$$

Здесь h_B – характеристическая функция шара B . С другой стороны,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^k B \cap B) = N_B(n) \mu(B),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Отметим, что задача о числе возвращений для p -адических систем рассматривалась в ряде работ (см., например, [8]).

Из теоремы 2 вытекает важное следствие, которое характеризует p -адические динамические системы, сохраняющие меру.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть (X, T) – p -адическая динамическая система, сохраняющая меру. Тогда существует такое натуральное число N , что динамическая система (X, T^N) не является эргодической.

Другими словами, такие системы не являются вполне эргодическими. Действительно, если исходное преобразование T не является эргодическим, то утверждение, очевидно, верно при $N = 1$. Пусть T является эргодическим преобразованием. Выберем произвольный шар $B \subset X$ и $a \in B$. Согласно теореме 2 число возвращений $N_B^a(n) = N_B(n)$ из точки a в шар B за время n не равно нулю для некоторого n . Обозначим через N время первого возвращения, т. е. $N_B(N) = 1$. Тогда $T^N B = B$, откуда и следует утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2 является усиленным вариантом теоремы Пуанкаре о числе возвращений для рассматриваемого класса динамических систем.

Пусть $B \subset X$ – шар в X . Рассмотрим последовательность $M_n(B) = \mu(T^n B \cap B)$, $n = 1, 2, \dots$. Эта последовательность имеет вид

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0, \mu(B)}_N, \underbrace{0, 0, \dots, 0, \mu(B)}_N, \dots,$$

где N – время первого возвращения. Видно, что если система эргодическая (в этом случае $N \neq 1$ для любого шара B), то последовательность $M_n(B)$ не имеет предела. Таким образом, p -адические динамические системы, сохраняющие меру, не являются перемешивающими.

Среднее по Чезаро для последовательности $M_n(B)$ равно $\mu(B)/N$, следовательно (см. теорему 2), время первого возвращения в шар B равно $1/\mu(B)$. Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. Время первого возвращения из шара B в шар B равно $1/\mu(B)$.

Из последнего утверждения, в частности, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Иерархические динамические системы не имеют периодических орбит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, допустим, что существует $x \in X$ и $n > 1$ такие, что $T^n x = x$ и $T^k x \neq x$ для $0 < k < n$. Выберем достаточно маленький шар B с центром в точке x , чтобы выполнялось условие $TB \cap B = \emptyset$. Тогда время возвращения из шара B в шар B равно n и не зависит от размера шара, что противоречит выражению для времени первого возвращения.

Эргодические иерархические динамические системы, сохраняющие меру, не имеют неподвижных точек. Данное утверждение очевидно. Действительно, пусть $x \in X$ – неподвижная точка, $B \subset X$ – шар с центром в точке x . Тогда TB – шар того же радиуса, следовательно, он совпадает с B , что противоречит предположению об эргодичности системы.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Динамическое преобразование, сохраняющее меру μ , которая равна радиусу шара, является строго эргодическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть ν – нормированная инвариантная мера на X . Тогда либо $\nu = \mu$, либо меры ν и μ взаимно сингулярны [9]. Следовательно, найдется такой шар $B \subset X$, что выполнены условия $\mu(B) \neq 0$, $\nu(B) = 0$. Из доказанного выше следует, что

$$X = \bigcup_{n=0}^{N-1} T^n B,$$

где $N = 1/\mu(B)$. Но тогда $\nu(X) = 0$, следовательно, $\mu = \nu$.

Очевидно, что иерархические динамические системы, которые сохраняют меру, имеют нулевую энтропию. Действительно, преобразование T сохраняет меру, соответственно, действие преобразования T на разбиение на шары равного радиуса не приводит к измельчению этого разбиения.

4. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ВИДА

Часть свойств иерархических динамических систем с инвариантной мерой переносится на общий случай иерархических динамических систем. В силу того что динамическое отображение T сохраняет иерархию шаров, иерархическая динамическая система всегда обладает квазиинвариантной мерой μ . Действительно, мера, которая ставит в соответствие шару его радиус, квазиинвариантна относительно иерархических преобразований.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Иерархические динамические системы не обладают свойством перемешиваемости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать только два факта: во-первых, шары в фазовом пространстве либо не пересекаются, либо один вложен в другой; во-вторых, динамическое отображение переводит шар в шар. Пусть A, B – шары в фазовом пространстве. Рассмотрим последовательность $M_n(A, B) = \mu(T^n A \cap B)$. В силу ультраметричности фазового пространства члены последовательности могут принимать только одно из трех значений:

$$M_n(A, B) = 0, \text{ или } M_n(A, B) = \mu(T^n A), \text{ или } M_n(A, B) = \mu(B).$$

Предположим теперь, что наша динамическая система является перемешивающей. Это означает, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(A, B) = \mu(A)\mu(B)$$

для любых шаров A и B в X . Следовательно, начиная с некоторого номера N все члены последовательности равны $\mu(T^n A)$ для $n > N$ (в противном случае существовали бы бесконечные подпоследовательности, все члены которых равны нулю или $\mu(B)$), и в силу предположения о сходимости последовательности ее предел был бы равен либо нулю, либо $\mu(B)$). Следовательно, предел последовательности равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n A)$$

и не зависит от меры шара B , что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие доказывает, что иерархические системы не обладают свойством перемешиваемости.

5. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ (P^1, T)

Рассмотрим класс обратимых динамических систем, фазовым пространством которых является проективная прямая над $\mathbb{Q}_p$. Этот случай представляет интерес, поскольку имеет непосредственное отношение к динамике линейных гамильтоновых систем – существует естественное действие линейной симплектической группы на P^1 . Нейрхимедовы гамильтоновы системы рассматривались, например, в работе [10].

Воспользуемся геометрическим представлением – известной конструкцией дерева Брюа–Титса. Это древесный граф G , из каждой вершины которого выходит ровно $p + 1$ ребро. Естественное расстояние на графе G обозначим через d . Границей G является проективная прямая P^1 , множество вершин $\text{Vert } G$ графа G находится во взаимно однозначном соответствии с множеством шаров в P^1 . Автоморфизм проективной прямой, сохраняющий иерархию шаров, однозначно продолжается до автоморфизма дерева G , и, со своей стороны, каждый автоморфизм дерева G однозначно определяет автоморфизм P^1 (см., например, [7]). Пусть (P^1, T) – обратимая динамическая система. Автоморфизм T проективной прямой можно продолжить до автоморфизма дерева G (соответствующий автоморфизм дерева G будем обозначать символом T_G).

Воспользуемся известной теоремой Титса для автоморфизмов дерева G [11].

ТЕОРЕМА 4. Пусть автоморфизм T_G не имеет неподвижных вершин и не имеет инверсий. Положим

$$m = \inf_{P \in \text{Vert } G} d(P, T_G P), \quad L = \{P \in \text{Vert } G : d(P, T_G P) = m\}.$$

Тогда L есть бесконечный в обе стороны путь в G , а преобразование T_G представляет собой сдвиг вдоль L на расстояние m .

Из приведенной выше теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть (P^1, T) – обратимая динамическая система такая, что автоморфизм T_G не имеет неподвижных вершин и инверсий. Тогда T имеет ровно две неподвижные точки, одна из которых притягивающая, другая отталкивающая. Пара неподвижных точек и энтропия η определяют динамическую систему однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, бесконечный в обе стороны путь L на графе G однозначно определяется двумя граничными точками на проективной прямой P^1 . Покажем, что энтропия η совпадает с числом m из теоремы 4 с точностью до знака. Рассмотрим разбиение $\xi = \cup_i B_k^i$ фазового пространства P^1 на $n(X)p^k$ шаров радиуса p^{-k} , $k \geq 0$ (мера μ нормирована таким образом, что $\mu(X) = n(X)$, где $n(X) = 2$ – индекс многообразия $X = P^1$). Под действием преобразования T^N шар радиуса p^{-k} перейдет в шар радиуса p^{-k-mN} . Следовательно,

$$\xi \vee T\xi \vee T^2\xi \vee \dots \vee T^N\xi = T^N\xi = \bigcup_j B_{k+mN}^j.$$

Количество шаров в разбиении $T^N\xi$ равно $n(X)p^{k+mN}$. По определению числа m имеем $\mu(T^N B_k) = p^{-k-mN}$. Следовательно,

$$\eta = \frac{1}{n(X)} \frac{1}{N} \sum_j \mu(T^N B_k^j) \log_p(\mu(T^N B_k^j)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -m.$$

Преобразование T не сохраняет меру, при этом производная Радона–Никодима преобразования T постоянна и равна p^η .

Заметим, что построенная динамическая система не является эргодической. Описать инвариантные подсистемы можно следующим образом. Пусть s – положительное целое число. Рассмотрим множество D_s вершин графа G , находящихся на расстоянии s от неподвижного пути L , $D_s = \{P \in \text{Vert } G : d(P, L) = s\}$. Объединение шаров, соответствующих всем таким вершинам, есть вся проективная прямая P^1 с выколотыми неподвижными точками. Поскольку T сохраняет расстояние на дереве, множество D_s инвариантно относительно T при всех s . В свою очередь, действие преобразования T на множестве D_s не является транзитивным – множество D_s распадается на $(n-1)(p-1)p^{s-1}$ орбит. Соответствующие точкам орбиты множества шаров в P^1 образуют инвариантные подсистемы нашей динамической системы.

Рассмотрим случай, когда преобразование T_G имеет неподвижную вершину (очевидно, такая система не является эргодической). Легко заметить, что в этом случае динамическая система сохраняет меру μ . Действительно, пусть $P \in \text{Vert } X$ – неподвижная точка. Нормируем меру μ таким образом, что $\mu(P^1) = p+1$. Тогда мера шара B равна $p^{-d(B)}$, где $d(B)$ – расстояние от P до вершины графа, соответствующей шару B . Преобразование T_G сохраняет метрику на дереве G , поэтому $\mu(TB) = \mu(B)$ для любого шара $B \subset P^1$.

Осталось рассмотреть случай преобразования T , когда T_G не имеет неподвижных вершин, но имеет неподвижное ребро, которое мы обозначим через $[u, v]$, где

$u, v \in \text{Vert } X$, $d(u, v) = 1$. При этом, поскольку T_G не имеет неподвижных вершин, имеем $T_G u = v$, $T_G v = u$, т.е. T_G является инверсией. Как отмечалось выше, проективная прямая имеет индекс 2. Разрежем дерево G по ребру $[u, v]$, при этом G распадается на два поддеревя, граница каждого из которых является многообразием индекса 1 и может быть отождествлена с $\mathbb{Z}_p$. Динамическое преобразование T , соответствующее инверсии T_G , есть суперпозиция автоморфизма многообразия $\mathbb{Z}_p$ и перестановки двух экземпляров $\mathbb{Z}_p$, образующих проективную прямую P^1 .

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕКАРЯ

Как видно из предыдущих разделов, иерархические динамические системы образуют довольно узкий класс, например, такие системы не обладают свойством перемешиваемости. В настоящем разделе мы расширим класс динамических преобразований. Выберем фазовое пространство в виде $X = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, метрику на этом пространстве зададим стандартным образом: $\|z\| = \max\{|x|_p, |y|_p\}$, $z = (x, y) \in X$. Шаром в такой метрике является прямое произведение одномерных шаров одинакового радиуса. Мера μ определяется как прямое произведение мер на $\mathbb{Z}_p$. Динамическое преобразование иерархических систем переводит шар в шар. Расширим класс динамических преобразований и разрешим переводить прямое произведение одномерных шаров в конечное объединение прямых произведений одномерных шаров.

В качестве примера такого рода системы рассмотрим p -адическое преобразование пекаря.

Пусть $(x, y) \in X$ представлены в виде канонического разложения:

$$(x, y) = (x_0 + x_1 p + \cdots + x_n p^n + \cdots, y_0 + y_1 p + \cdots + y_m p^m + \cdots),$$

где x_i, y_i , $i = 0, 1, \dots$, принимают значения в множестве $0, 1, \dots, p-1$. Преобразование пекаря T определим следующим образом:

$$T(x, y) = \left(\frac{x - x_0}{p}, x_0 + py \right).$$

Будем использовать обозначение $B_k(a)$ для одномерного шара радиуса p^{-k} , $k \geq 0$, с центром в точке $a \in \mathbb{Z}_p$, $B_k(0) = B_k$.

Видно, что преобразование T переводит прямое произведение шаров в объединение конечного числа прямых произведений шаров.

В качестве упражнения найдем образ множества $B_0 \times B_1$. Прямое применение определения преобразования пекаря дает

$$T(B_0 \times B_1) = B_0 \times \bigcup_{a=0}^{p-1} B_2(a).$$

Мы видим, что слой толщиной $1/p$ по координате y преобразовался в объединение p штук слоев толщиной $1/p^2$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Преобразование пекаря обладает свойством перемешиваемости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем образ множества $I_{m,n}^{a,b} = B_m(a) \times B_n(b)$ под действием преобразования T^N при достаточно большом N . Множество $B_m(a)$ можно описать следующим образом:

$$B_m(a) = \{a_0 + a_1p + \dots + a_{m-1}p^{m-1} + x_mp^m + x_{m+1}p^{m+1} + \dots\},$$

где $a_0, \dots, a_{m-1}$ фиксированны, а $x_m, x_{m+1}, \dots$ пробегает всевозможные значения $0, 1, \dots, p-1$.

Аналогичным образом представим шар $B_n(b)$:

$$B_n(b) = \{b_0 + b_1p + \dots + b_{n-1}p^{n-1} + y_np^n + y_{n+1}p^{n+1} + \dots\},$$

где $b_0, \dots, b_{n-1}$ фиксированны, а $y_n, y_{n+1}, \dots$ пробегает всевозможные значения $0, 1, \dots, p-1$. Выберем N таким образом, что выполнено неравенство $N \geq \max\{m, n\}$. Из определения преобразования пекаря видно, что шар $B_m(a)$ (координата x) перейдет в шар B_0 . Шар $B_n(b)$ (координата y) перейдет в множество следующего вида:

$$\{x_{N-1} + x_{N-2}p + \dots + x_mp^{N-m-1} + a_{m-1}p^{N-m} + \dots + a_0p^{N-1} + \\ + b_0p^N + b_1p^{N+1} + \dots + b_{n-1}p^{N+n-1} + y_np^{N+n} + y_{n+1}p^{N+n+1} + \dots\},$$

где $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{n-1}$ фиксированны, а x_i, y_i пробегает всевозможные значения из множества $0, 1, \dots, p-1$. Видно, что это множество представляет собой объединение p^{N-m} различных шаров радиуса p^{-N-n} . Центры этих шаров образуют множество J . Легко увидеть, что для произвольного шара $B_l(c)$ число элементов множества $J \cap B_l(c)$ равно p^{-l}/p^{-N+m} при $N \geq l$. Отсюда вытекает следующая формула: при $N \geq \max\{m, n, l\}$

$$\mu(T^N I_{m,n}^{a,b} \cap I_{k,l}^{c,d}) = p^{-m-n-k-l} = \mu(I_{m,n}^{a,b}) \mu(I_{k,l}^{c,d}).$$

Теорема доказана.

Благодарности. Работа частично финансировалась Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1) и РФФИ (гранты № 11-01-00828_a и 11-01-12114-офи_м-2011).

Список литературы

- [1] I. V. Volovich, *Number theory as the ultimate physical theory*, Preprint CERN-TH 4781/87, Cern, Geneva, 1987.
- [2] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, **1**, World Sci., Singapore, 1994.
- [3] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1:1** (2009), 1–17.
- [4] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, *J. Phys. A*, **35:2** (2002), 177–189, arXiv: cond-mat/0106506.
- [5] V. Anashin, A. Khrennikov, *Applied Algebraic Dynamics*, De Gruyter Expositions in Mathematics, **49**, Walter de Gruyter, Berlin, 2009.

- [6] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1969.
- [7] Ю. А. Неретин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:5 (1992), 1072–1085.
- [8] V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, A. P. Zubarev, *J. Phys. A*, **42**:8 (2009), 085003, 18 pp., arXiv:0808.3066.
- [9] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
- [10] V. A. Avetisov, *Phys. Rev. E*, **81**:4 (2010), 046211, 6 pp.
- [11] J.-P. Serre, *Trees*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Поступила в редакцию 21.04.2013