Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, Ш. У. Алладустов, Положительность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 3, 390–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:15:46

© 2014 г.

С. Н. Лакаев*, Ш. У. Алладустов*

ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Рассмотрено семейство $H(k)$ двухчастичных дискретных операторов Шредингера, зависящих от квазиимпульса системы двух частиц $k \in \mathbb{T}^d$, здесь $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор. Это семейство операторов ассоциировано с гамильтонианом системы двух произвольных частиц на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, которые взаимодействуют с помощью парного короткодействующего потенциала притяжения. Доказано, что собственные значения оператора Шредингера $H(k)$, лежащие ниже левой границы существенного спектра, положительны при всех ненулевых значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$, если оператор $H(0)$ неотрицательный. Установлен аналогичный результат для собственных значений оператора Шредингера $H_+(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, соответствующего системе двух частиц с отталкивающим взаимодействием.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, квазиимпульс системы, гамильтониан, отталкивающее взаимодействие, виртуальный уровень, собственное значение, решетка.

DOI: 10.4231/tmf8544

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается семейство дискретных операторов Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор, ассоциированное с гамильтонианом системы двух произвольных квантовых частиц, которые движутся на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ и взаимодействуют с помощью парного короткодействующего потенциала притяжения $\hat{v}$.

В физике устойчивые сложные объекты обычно образуются в результате действия сил притяжения, которые позволяют составным частям уменьшить энергию при их связывании. Математически это явление описывается непрерывным оператором Шредингера, который может иметь связанное состояние с отрицательной энергией. Дискретный оператор Шредингера является ограниченным, и его непрерывный спектр заполняет некоторый отрезок, поэтому такой оператор может иметь

---

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: slakaev@math.ucdavis.edu, sh.alladustov@gmail.com

связанное состояние, энергия которого лежит правее порога непрерывного спектра [1]. Этот результат является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения, состоящего в том, что в упорядоченных средах как с периодическим потенциалом, так и в отсутствии рассеяния устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий [2]. Для операторов Шредингера $H(k) = H_0(k) - V$, $k \in \mathbb{T}^d$, которые ассоциированы с гамильтонианом H системы двух бозонов на решетке $\mathbb{Z}^d$, взаимодействующих с помощью контактного потенциала притяжения $-V$, было доказано [3], [4], что если при значении квазиимпульса $k = 0$ оператор $H(0) = H_0(0) - V$ является неотрицательным, то при любом $k \neq 0$ оператор $H(k) = H_0(k) - V$ (строго) положителен.

Для некоторого, но важного для применений класса операторов Шредингера $H(k) = H_0(k) - V$, $k \in \mathbb{T}^d$, ассоциированных с гамильтонианом H системы двух одинаковых частиц (бозонов или фермионов), которые взаимодействуют с помощью парного короткодействующего потенциала притяжения $-V$, было доказано [5], что если при $k = 0$ оператор $H(0) = H_0(0) - V$ является неотрицательным, то при любом значении квазиимпульса $k \neq 0$ оператор $H(k) = H_0(k) - V$ также неотрицательный.

В настоящей работе мы изучаем, применяя предельный принцип Бирмана–Швингера, зависимость собственных значений оператора $H(k) = H_0(k) - V$ от квазиимпульса системы $k \in \mathbb{T}^d$. А именно, мы доказываем результат, более сильный, чем в работе [5], состоящий в том, что если оператор $H(0) = H_0(0) - V$ неотрицателен, то при любом ненулевом значении квазиимпульса k оператор $H(k) = H_0(k) - V$ является (строго) положительным (см. следствие 1).

Из этого утверждения мы получаем, что если оператор $H(0)$ неотрицательный, то при любом ненулевом значении квазиимпульса k все собственные значения оператора $H(k)$, лежащие левее порога существенного спектра, положительны. Последнее влечет следующий факт для трехчастичного дискретного оператора Шредингера $\mathbf{H}(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, который ассоциирован с гамильтонианом $\mathbf{H}$ системы трех частиц, движущихся на решетке $\mathbb{Z}^3$ и взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения: трехчастичный оператор Шредингера $\mathbf{H}(0)$ имеет бесконечное число собственных значений (эффект Ефимова), однако при любом ненулевом значении квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^3$ системы оператор $\mathbf{H}(K)$ имеет только конечное число собственных значений [3], [4], [6], [7].

Результаты настоящей работы характерны только для дискретных операторов Шредингера и не имеет аналогов для непрерывных операторов Шредингера, у которых спектр не зависит от полного импульса системы $k \in \mathbb{R}^d$.

2. ДВУХЧАСТИЧНЫЙ ГАМИЛЬТониАН $\hat{H}$ И ДИСКРЕТНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА $H(K)$

Гамильтониан $\hat{H}$ системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парного короткодействующего потенциала $\hat{V}$, в координатном представлении обычно ассоциируется с ограниченным самосопряженным оператором $\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}$, действующим в гильбертовом пространстве $\ell^2((\mathbb{Z}^d)^2)$. Здесь гамильтониан $\hat{H}_0$ системы двух произвольных свободных (невзаимодействующих) частиц действует в пространстве $\ell^2((\mathbb{Z}^d)^2)$ по формуле

$$(\hat{H}_0 \hat{\psi})(x_1, x_2) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} [\hat{\varepsilon}_1(s) \hat{\psi}(x_1 + s, x_2) + \hat{\varepsilon}_2(s) \hat{\psi}(x_1, x_2 + s)], \quad \hat{\psi} \in \ell^2((\mathbb{Z}^d)^2),$$

где функции $\hat{\varepsilon}_j(s)$, $j = 1, 2$, определены на $\mathbb{Z}^d$ и принадлежат пространству $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Предположим также, что выполняется условие самосопряженности оператора $\hat{H}_0$:

$$\hat{\varepsilon}_j(s) = \overline{\hat{\varepsilon}_j(-s)}, \quad s \in \mathbb{Z}^d, \quad j = 1, 2.$$

Функции $\varepsilon_1(s)$ и $\varepsilon_2(s)$, заданные как ряды Фурье

$$\varepsilon_j(p) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}_j(s) e^{i(p,s)}, \quad p \in \mathbb{T}^d, \quad j = 1, 2,$$

являются вещественнозначными функциями на $\mathbb{T}^d$.

Оператор умножения $\hat{V}$ определен в $\ell^2((\mathbb{Z}^d)^2)$ как оператор умножения на функцию:

$$(\hat{V}\hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell^2((\mathbb{Z}^d)^2),$$

где $\hat{v} = \{\hat{v}(s)\}_{s \in \mathbb{Z}^d}$ – ограниченная последовательность вещественных чисел. Предположим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{v}(x) = 0.$$

В этом случае $\hat{V}$ является компактным оператором.

Пусть $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор, т. е. куб $(-\pi, \pi]^d$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^d$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Обозначим через $d\eta$ меру Хаара на торе $\mathbb{T}^d$. Пусть $L_2((\mathbb{T}^d)^2, d\eta \times d\eta)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^d)^2$.

Переход в импульсное представление гамильтониана $\hat{H}$ осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^d)^2 \rightarrow \ell^2((\mathbb{Z}^d)^2).$$

В импульсном представлении полный двухчастичный гамильтониан $H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1}$ системы двух произвольных частиц действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ как ограниченный самосопряженный оператор $H = H_0 - V$ [8], где H_0 – оператор умножения на функцию,

$$(H_0 f)(k_1, k_2) = (\varepsilon_1(k_1) + \varepsilon_2(k_2))f(k_1, k_2), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^d)^2),$$

а V – оператор частичного интегрирования,

$$(Vf)(k_1, k_2) = \int_{(\mathbb{T}^d)^2} \delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) v(q_1 - q_2) f(q_1, q_2) d\eta \times d\eta, \quad f \in L_2((\mathbb{T}^d)^2),$$

где

$$v(p) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{v}(s) e^{i(p,s)}$$

и $\delta(k)$ обозначает дельта-функцию Дирака.

Разложение гильбертова пространства $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ как прямой интеграл,

$$L_2((\mathbb{T}^d)^2) = \int_{k \in \mathbb{T}^d} \oplus L_2(\mathbb{T}^d) d\eta,$$

позволяет записать разложение оператора H в следующий прямой интеграл [8]:

$$H = \int_{k \in \mathbb{T}^d} \oplus H(k) d\eta.$$

Таким образом, дискретный оператор Шредингера $H(k)$ имеет вид [8]

$$H(k) = H_0(k) - V, \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Для каждого $k \in \mathbb{T}^d$ невозмущенный оператор $H_0(k)$ является оператором умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(q) = \varepsilon_1(q) + \varepsilon_2(k - q), \quad (1)$$

то есть

$$(H_0(k)f)(q) = \mathcal{E}_k(q)f(q), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^d),$$

а V – компактный интегральный оператор:

$$(Vf)(q) = \int_{\mathbb{T}^d} v(q - s)f(s) d\eta(s), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^d). \quad (2)$$

Так как оператор возмущения V компактный, из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра следует, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(k))$ оператора $H(k)$ совпадает со спектром $\sigma(H_0(k))$ невозмущенного оператора $H_0(k)$ [9], а именно

$$\sigma_{\text{ess}}(H(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

где

$$\mathcal{E}_{\min}(k) \equiv \min_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q), \quad \mathcal{E}_{\max}(k) \equiv \max_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q)$$

и функция $\mathcal{E}_k(q)$ определена в (1).

2.1. Условно отрицательно определенные функции. Напомним (см. монографию [9]), что комплекснозначная ограниченная функция $\varepsilon: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ называется условно отрицательно определенной, если $\varepsilon(p) = \overline{\varepsilon(-p)}$ и

$$\sum_{i,j=1}^n \varepsilon(p_i - p_j) z_i \bar{z}_j \leq 0$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, любых $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{T}^d$ и вектора $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющего соотношению $\sum_{i=1}^n z_i = 0$.

Предположим, что дисперсионное соотношение $\varepsilon(p)$ является вещественнозначной непрерывной условно отрицательно определенной функцией, тогда $\varepsilon(p)$ – четная функция, которая имеет минимум в точке $p = 0$.

Сделаем следующие предположения.

УСЛОВИЕ 1. Функция $\mathcal{E}_k(q)$, задающая дисперсионное соотношение двух частиц, имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}_k(q) = m_1\varepsilon(q) + m_2\varepsilon(k - q), \quad m_1, m_2 > 0,$$

где $\varepsilon(p)$ есть вещественнозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{T}^d$, причем $\varepsilon(0) = \min \varepsilon(q)$ и $\varepsilon(\vec{\pi}) = \max \varepsilon(q)$ суть ее единственные невырожденные минимум и максимум.

УСЛОВИЕ 2. Функция $\varepsilon(p)$ условно отрицательно определена на $\mathbb{T}^d$.

УСЛОВИЕ 3. Функция $\hat{v}(s)$ неотрицательна при всех $s \in \mathbb{Z}^d$, а ее преобразование Фурье $v(k)$ является непрерывной функцией на $\mathbb{T}^d$.

3. ПОНЯТИЕ РЕЗОНАНСА С ЭНЕРГИЕЙ $\mathcal{E}_{\min}(0)$

Пусть $d \geq 3$. Предположим, что выполнены условия 1 и 3, которые гарантируют некоторую гладкость дисперсионного соотношения $\varepsilon(p)$ и преобразования Фурье v взаимодействия $\hat{v}$. Введем понятие резонанса с энергией $\mathcal{E}_{\min}(0)$ (порогового виртуального уровня) для оператора энергии $H(k)$.

Для любого $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(k))$ определим самосопряженный компактный интегральный оператор $B(k, z)$ Бирмана–Швингера в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$ формулой

$$B(k, z) = V^{1/2} R_0(k, z) V^{1/2}, \quad (3)$$

где $R_0(k, z)$ – резольвента оператора $H_0(k)$ и $V^{1/2}$ – положительный корень из положительного оператора V , определенного в (2).

Заметим, что при $z = \mathcal{E}_{\min}(0)$ оператор $R_0(k, z)$ не существует как ограниченный оператор, определенный во всем гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$. Однако, так как функция $\mathcal{E}_0(q)$ имеет невырожденный минимум $\mathcal{E}_{\min}(0)$ в точке $q = 0$, можно определить следующую непрерывную функцию $B(p, q; 0, \mathcal{E}_{\min}(0))$ переменных $p \in \mathbb{T}^d$ и $q \in \mathbb{T}^d$ на $(\mathbb{T}^d)^2$:

$$B(p, q; 0, \mathcal{E}_{\min}(0)) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^{1/2}(p-t)v^{1/2}(t-q)}{\mathcal{E}_0(t) - \mathcal{E}_{\min}(0)} dt, \quad (4)$$

где

$$v^{1/2}(p) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{v}^{1/2}(s) e^{i(p,s)}$$

– ядро оператора $V^{1/2}$, а $\hat{v}^{1/2}(s)$ – положительный корень из положительной функции $\hat{v}(s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что число $z \leq \mathcal{E}_0(0)$ является собственным значением оператора $H(0)$ (т.е. $\text{Ker}(H(0) - zI) \neq 0$), тогда и только тогда, когда единица является собственным значением компактного оператора $B(0, z)$, определенного в $L_2(\mathbb{T}^d)$, и существует функция $\psi \in \text{Ker}(I - B(0, z))$ такая, что функция

$$f(\cdot) = \frac{(V^{1/2}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - z}$$

принадлежит пространству $L_2(\mathbb{T}^d)$. В этом случае $f \in \text{Ker}(H(0) - zI)$. Кроме того, если $z < \mathcal{E}_{\min}(0)$, то

$$\dim \text{Ker}(H(0) - zI) = \dim \text{Ker}(I - B(0, z)) \quad (5)$$

и

$$\text{Ker}(H(0) - zI) = \left\{ f \left| f(\cdot) = \frac{(v^{1/2}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - z}, \psi \in \text{Ker}(I - B(0, z)) \right. \right\}.$$

В случае, когда $z = \mathcal{E}_{\min}(0)$ является собственным значением оператора $H(0)$, равенство (5) может оказаться неверным. Тогда его следует заменить на неравенство

$$\dim \text{Ker}(H(0)) \leq \dim \text{Ker}(I - B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $d \geq 3$. Точка $z = \mathcal{E}_{\min}(0) \in \sigma_{\text{ess}}(H(0))$ называется *регулярной точкой существенного спектра* оператора $H(0)$, если единица не является собственным значением оператора $B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $d = 3, 4$. Будем говорить, что число $z = \mathcal{E}_{\min}(0)$ является *резонансом с энергией $\mathcal{E}_{\min}(0)$ (пороговым виртуальным уровнем)* оператора $H(0)$, если единица является простым собственным значением оператора $B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))$ и соответствующий собственный вектор ψ удовлетворяет условию

$$\frac{(v^{1/2}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \in L_1(\mathbb{T}^d) \setminus L_2(\mathbb{T}^d),$$

где $L_1(\mathbb{T}^d)$ – банахово пространство функций, определенных на $\mathbb{T}^d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\mathcal{E}_{\min}(0) = 0$ наше определение резонанса с энергией $\mathcal{E}_{\min}(0)$ для оператора $H(0)$ согласуется с определениями резонанса с нулевой энергией, ранее приведенными в работах [8], [10]–[12].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оператор $H(0)$ имеет резонанс с энергией $\mathcal{E}_{\min}(0)$ тогда и только тогда, когда единица является собственным значением оператора $B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))$ и хотя бы один (с точностью до нормировочного множителя) соответствующий собственный вектор $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{T}^d} v^{1/2}(p)\psi(p) dp \neq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $d \geq 5$. Если единица является простым собственным значением оператора $B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))$, то число $z = \mathcal{E}_{\min}(0)$ является собственным значением оператора $H(0)$, так как в этом случае соответствующий собственный вектор ψ удовлетворяет условию

$$\frac{(v^{1/2}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \in L_2(\mathbb{T}^d),$$

другими словами,

$$\dim \operatorname{Ker} H(0) + 1 = \dim \operatorname{Ker}(I - B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))).$$

Чтобы сформулировать аналогичные результаты для отталкивающих потенциалов, рассмотрим оператор

$$H_+(k) = H_0(k) + V, \quad k \in \mathbb{T}^d,$$

где операторы $H_0(k)$ и V те же, что и в определении оператора $H(k)$.

Введем понятие резонанса с энергией $\mathcal{E}_{\max}(0)$ (порогового виртуального уровня) для оператора энергии $H_+(k)$. Предположим, что выполнены условия 1 и 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $d = 3, 4$. Будем говорить, что число $\mathcal{E}_{\max}(0)$ является резонансом с энергией $\mathcal{E}_{\max}(0)$ (пороговым виртуальным уровнем) оператора $H_+(0)$, если число -1 является простым собственным значением оператора $B(0, \mathcal{E}_{\max}(0))$ и соответствующий собственный вектор ψ удовлетворяет условию

$$\frac{(v^{1/2}\psi)(\cdot)}{\mathcal{E}_0(\cdot) - \mathcal{E}_{\max}(0)} \in L_1(\mathbb{T}^d) \setminus L_2(\mathbb{T}^d).$$

4. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Основные результаты для оператора Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, с притягивающим потенциалом взаимодействия сформулируем в следующих теоремах. Теорема 1 утверждает, что если оператор $H(0)$ удовлетворяет условию $H(0) \geq \mathcal{E}_{\min}(0)I$, то для весьма широкого класса функций $\mathcal{E}_k(\cdot)$ и потенциалов взаимодействия v справедливо неравенство $H(k) > \mathcal{E}_{\min}(0)I$, которое выполняется при всех ненулевых $k \in \mathbb{T}^d$. В теореме 2 утверждается, что для одного важного класса функций, а именно для условно отрицательно определенных функций, существуют собственные значения оператора Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, при дополнительном условии, что оператор $H(0)$ либо имеет резонанс с энергией $\mathcal{E}_{\min}(0)$, либо число $\mathcal{E}_{\min}(0)$ является его собственным значением.

ТЕОРЕМА 1. Пусть справедливо неравенство $H(0) \geq \mathcal{E}_{\min}(0)I$ и выполнены условия 1, 3. Тогда при любом $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ оператор $H(k)$ удовлетворяет неравенству $H(k) > \mathcal{E}_{\min}(0)I$.

При исследовании двухчастичных дискретных операторов Шредингера обычно предполагается, что $\mathcal{E}_{\min}(0) = 0$. Сформулируем соответствующий результат как следствие теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть оператор $H(0)$ неотрицательный, $H(0) \geq 0$, и выполнены условия 1, 3. Тогда при любом $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ оператор $H(k)$ строго положительный, $H(k) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедливо неравенство $H(0) \geq \mathcal{E}_{\min}(0)I$, выполнены условия 1–3 и либо оператор $H(0)$ имеет резонанс с энергией $\mathcal{E}_{\min}(0)$ (при $d = 3, 4$), либо порог $z = \mathcal{E}_{\min}(0)$ существенного спектра оператора $H(0)$ является собственным значением (при $d \geq 5$). Тогда при любом $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ справедливы следующие утверждения.

1. Оператор $H(k)$ имеет хотя бы одно собственное значение $E(k)$, которое лежит левее порога $\mathcal{E}_{\min}(k)$ существенного спектра и удовлетворяет неравенству $E(k) > \mathcal{E}_{\min}(0)$.

2. Для любого собственного значения $E(k)$ оператора $H(k)$, лежащего левее порога $\mathcal{E}_{\min}(k)$ существенного спектра, выполняется неравенство $E(k) > \mathcal{E}_{\min}(0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда в некоторой области $G \subset \mathbb{T}^d$ при $k \in G$ оператор $H(k)$ может иметь несколько собственных значений, лежащих левее порога $\mathcal{E}_{\min}(k)$ существенного спектра. В силу теоремы 2 каждое из этих собственных значений удовлетворяет неравенству $E(k) > \mathcal{E}_{\min}(0)$. В частности, в случае $\mathcal{E}_{\min}(0) = 0$, имеем $E(k) > 0$.

Теперь сформулируем аналогичные результаты для оператора $H_+(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, с отталкивающим взаимодействием.

ТЕОРЕМА 3. Пусть справедливо неравенство $H_+(k) \leq \mathcal{E}_{\max}(0)I$ и выполнены условия 1, 3. Тогда при любом $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ оператор $H_+(k)$ удовлетворяет неравенству $H_+(k) < \mathcal{E}_{\max}(0)I$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть справедливо неравенство $H_+(0) \leq \mathcal{E}_{\max}(0)$, выполнены условия 1–3 и либо оператор $H_+(0)$ имеет резонанс с энергией $\mathcal{E}_{\max}(0)$ (при $d = 3, 4$), либо порог $z = \mathcal{E}_{\max}(0)$ существенного спектра оператора $H_+(0)$ является собственным значением (при $d \geq 5$). Тогда при любом $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ справедливы следующие утверждения.

1. Оператор $H_+(k)$ имеет хотя бы одно собственное значение $E_+(k)$, которое лежит правее порога $\mathcal{E}_{\max}(k)$ существенного спектра и удовлетворяет неравенству $E_+(k) < \mathcal{E}_{\max}(0)$.

2. Любое собственное значение $E_+(k)$, лежащее правее порога $\mathcal{E}_{\max}(k)$ существенного спектра, удовлетворяет неравенству $E_+(k) < \mathcal{E}_{\max}(0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть выполняются условия теоремы 3 и $z = \mathcal{E}_{\max}(0)$ является регулярной точкой существенного спектра оператора $H(0)$. Тогда как следствие теоремы 3 получим, что $H_+(k) < \mathcal{E}_{\max}(0)I$ при любом $k \in \mathbb{T}^d$.

5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ $H(K)$ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим через $N_+(\lambda, A)$ (через $N_-(\lambda, A)$) число собственных значений оператора A , больших (меньших) чем λ .

5.1. Принцип Бирмана–Швингера. Следующий вариант принципа Бирмана–Швингера для двухчастичных операторов Шредингера на решетке $\mathbb{Z}^d$ доказан в работе [13].

ТЕОРЕМА 5. Справедливы следующие утверждения.

1. Если функция $\phi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ является решением уравнения $H(k)\phi = z\phi$, то функция $\psi = V^{1/2}\phi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ есть решение уравнения $\psi = B(k, z)\psi$, где оператор $B(k, z)$ задан в (3).

2. Если функция $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ является решением уравнения $\psi = B(k, z)\psi$, то функция $\phi = [H_0(k) - z]^{-1}V^{1/2}\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ есть решение уравнения $H(k)\phi = z\phi$.

3. Число z является собственным значением кратности m для оператора $H(k)$ тогда и только тогда, когда единица является собственным значением кратности m для оператора $B(k, z)$.

4. С учетом кратности число собственных значений оператора $H(k)$, меньших z , равно числу собственных значений оператора $B(k, z)$, больших единицы, т. е. имеет место равенство $N_-(z, H(k)) = N_+(1, B(k, z))$.

ТЕОРЕМА 6. Оператор $B(0, z)$ для $z \leq \mathcal{E}_{\min}(0)$ действует в $L_2(\mathbb{T}^d)$, принадлежит классу Σ_2 операторов Гильберта–Шмидта, положителен и слабо непрерывен на полусоси $(-\infty, 0]$, и выполняется равенство

$$N_-(\mathcal{E}_{\min}(0), H(0)) = N_+(1, B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\mathcal{E}_0(q)$ имеет невырожденный минимум $\mathcal{E}_{\min}(0) = 0$ в точке $q = 0$, следовательно, функция $B(p, q; 0, \mathcal{E}_{\min}(0))$, определенная по формуле (4), непрерывна и является квадратично-интегрируемой на $(\mathbb{T}^d)^2$, т. е. оператор $B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))$ принадлежит классу Σ_2 операторов Гильберта–Шмидта. Поэтому при всех $z \leq \mathcal{E}_{\min}(0)$ существует интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|v^{1/2}\psi|^2}{\mathcal{E}_k(p) - z} dp.$$

Для любого $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ согласно равенству

$$(B(0, z)\psi, \psi) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|v^{1/2}\psi|^2}{\mathcal{E}_0(p) - z} dp$$

функция $(B(0, z)\psi, \psi)$ непрерывна, положительна, монотонно возрастает при значениях $z \in (-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0)]$ и ограничена. Поэтому, переходя к пределу под знаком интеграла Римана, получим для любой функции $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$, что

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(0)} (B(0, z)\psi, \psi) &= \lim_{z \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(0)} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|v^{1/2}\psi|^2}{\mathcal{E}_0(p) - z} dp = \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|v^{1/2}\psi|^2}{\mathcal{E}_0(p) - \mathcal{E}_{\min}(0)} dp = (B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))\psi, \psi). \end{aligned}$$

Для любого $z < \mathcal{E}_{\min}(0)$ и любой $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ имеет место неравенство

$$(B(0, z)\psi, \psi) \leq (B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))\psi, \psi).$$

Отсюда

$$N_+(1, B(0, z)) \leq N_+(1, B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))). \quad (6)$$

В силу принципа Бирмана–Швингера (см. теорему 5) и неравенства (6) для любого $z < \mathcal{E}_{\min}(0)$ справедлива формула

$$N_-(z, H(0)) = N_+(1, B(0, z)) \leq N_+(1, B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))). \quad (7)$$

Функция $N_-(z, H(0))$ непрерывна в точке $\mathcal{E}_{\min}(0)$ слева, поэтому, переходя к пределу в (7) при $z \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(0)$, имеем

$$N_-(\mathcal{E}_{\min}(0), H(0)) \leq N_+(1, B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))).$$

Отсюда следует, что число $N_-(\mathcal{E}_{\min}(0), H(0))$ конечно. В силу принципа Бирмана–Швингера и по определению числа $N_-(z, H(0))$ при любом $z < \mathcal{E}_{\min}(0)$ мы можем записать соотношение

$$N_+(1, B(0, z)) = N_-(z, H(0)) \leq N_-(\mathcal{E}_{\min}(0), H(0)). \quad (8)$$

Оператор $B(0, z)$ при $z \leq \mathcal{E}_{\min}(0)$ компактен и является непрерывным слева для $z \in (-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0)]$, отсюда, переходя к пределу при $z \rightarrow \mathcal{E}_{\min}(0)$ в неравенстве (8), получим, что

$$N_+(1, B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))) \leq N_-(\mathcal{E}_{\min}(0), H(0)). \quad (9)$$

Неравенства (7) и (9) доказывают теорему.

5.2. Доказательство теорем 1 и 2. Напомним, что дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}_k(q) = m_1 \varepsilon(q) + m_2 \varepsilon(k - q), \quad m_1, m_2 > 0.$$

При выполнении условий теоремы 1 оператор $H(0)$ удовлетворяет неравенству $H(0) \geq \mathcal{E}_{\min}(0)I$. В силу предельного принципа Бирмана–Швингера заключаем, что для любого $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ имеет место следующее неравенство:

$$(B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))\psi, \psi) \leq (\psi, \psi).$$

По определению оператора Бирмана–Швингера

$$(B(0, \mathcal{E}_{\min}(0))\psi, \psi) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{\mathcal{E}_0(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} dq.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{\mathcal{E}_0(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} dq \leq \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(q)|^2 dq,$$

где

$$(V^{1/2}\psi)(q) = \int_{\mathbb{T}^d} v^{1/2}(q - p)\psi(p) dp.$$

В силу условий теоремы 1 имеем, что для любого $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ справедливо следующее неравенство:

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2)\varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} dq \leq \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(q)|^2 dq.$$

Поскольку это неравенство выполнено для всех $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$, получим соотношение

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\Phi_k\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2)\varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta \leq \int_{\mathbb{T}^d} |(\Phi_k\psi)(q)|^2 d\eta, \quad (10)$$

где Φ_k – оператор, определенный на $L_2(\mathbb{T}^d)$ формулой $(\Phi_k\psi)(q) = \psi(k + q)$.

Совершая замену переменной $p \rightarrow p - k$, имеем

$$(V^{1/2}\Phi_k\psi)(q) = \int_{\mathbb{T}^d} v^{1/2}(q-p)\psi(k+p) dp = \int_{\mathbb{T}^d} v^{1/2}(q-p+k)\psi(p) dp = (V^{1/2}\psi)(q+k). \quad (11)$$

Учтем соотношения (10), (11) и, сделав замену переменной $q \rightarrow q - k$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\Phi_k\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2)\varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta &= \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q+k)|^2}{(m_1 + m_2)\varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2)\varepsilon(q-k) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta \leq \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(k+q)|^2 d\eta = \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(q)|^2 d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2)\varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta &\leq \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(q)|^2 d\eta, \\ \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2)\varepsilon(q-k) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta &\leq \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(q)|^2 d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для всех $m_1, m_2 > 0$ и $x, y > 0$ выполнено следующее неравенство:

$$\frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{y} \geq \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1x + m_2y}, \quad (13)$$

при этом равенство в (13) достигается тогда и только тогда, когда $x = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В известном неравенстве $x^2 + y^2 \geq 2xy$ выбираем x и y следующим образом: $x = (m_1m_2)^{1/2}p$ и $y = (m_1m_2)^{1/2}q$, где $m_1, m_2 > 0$ и $p, q > 0$. Тогда доказываемое утверждение следует из элементарных преобразований.

Пусть $0 \neq k \in \mathbb{T}^d$. Применяя неравенство (13) к функциям

$$\varepsilon(q) - \frac{\mathcal{E}_{\min}(0)}{m_1 + m_2}, \quad \varepsilon(q - k) - \frac{\mathcal{E}_{\min}(0)}{m_1 + m_2},$$

при почти всех $q \in \mathbb{T}^d$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{m_1}{\varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)/(m_1 + m_2)} + \frac{m_2}{\varepsilon(q - k) - \mathcal{E}_{\min}(0)/(m_1 + m_2)} > \\ & > \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 \varepsilon(q) + m_2 \varepsilon(q - k) - \mathcal{E}_{\min}(0)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и неравенств (12) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{m_1 \varepsilon(q) + m_2 \varepsilon(q - k) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta < \\ & < \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1 |(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2) \varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} + \frac{m_2 |(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2) \varepsilon(q - k) - \mathcal{E}_{\min}(0)} \right) d\eta = \\ & = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2) \varepsilon(q) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta + \\ & + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{(m_1 + m_2) \varepsilon(q - k) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta \leq \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(q)|^2 d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующее неравенство:

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|(V^{1/2}\psi)(q)|^2}{m_1 \varepsilon(q) + m_2 \varepsilon(q - k) - \mathcal{E}_{\min}(0)} d\eta < \int_{\mathbb{T}^d} |\psi(q)|^2 d\eta,$$

из которого вытекает, что для любого $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ и любой $\psi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ выполняется неравенство

$$(B(k, \mathcal{E}_{\min}(0))\psi, \psi) < (\psi, \psi).$$

Из этого неравенства и принципа минимакса заключаем, что все собственные значения оператора $B(k, 0)$ меньше единицы. Согласно принципу Бирмана–Швингера отсюда следует, что все собственные значения оператора $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$, удовлетворяют неравенству $E(k) > \mathcal{E}_{\min}(0)$. Теперь доказательство первого утверждения теоремы 2 следует из результатов работы [8], а второе утверждение вытекает из доказанной выше теоремы 1.

Теоремы 3 и 4 доказываются аналогично теоремам 1 и 2.

Благодарности. Авторы выражают свою признательность рецензенту за ценные критические замечания. Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований республики Узбекистан (грант № FA-F1-F079).

Список литературы

- [1] С. Н. Лакаев, С. С. Улашов, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 393–408.
- [2] K. Winker, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Hesker Denschlog, A. J. Daley, A. Kantian, H. P. Büchler, P. Zoller, *Nature*, **441**:7095 (2006), 853–856, arXiv:cond-mat/0605196.
- [3] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. H. Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [4] S. Albeverio, G. F. Dell Antonio, S. N. Lakaev, *J. Phys. A*, **40**:49 (2007), 14819–14842, arXiv:math/0703191.
- [5] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 381–387.

- [6] S. Alberverio, S. N. Lakaev, A. M. Khalkhuzhaev, *Markov Proc. Relat. Fields*, **18**:3 (2012), 387–420.
- [7] С. Н. Лакаев, *Функ. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [8] S. Alberverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Commun. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115, arXiv:math-ph/0501013.
- [9] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [10] A. V. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 127–168.
- [11] Н. Tamura, *Nagoya Math. J.*, **130** (1993), 55–83.
- [12] Д. Р. Яфаев, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **51** (1975), 203–216; D. R. Yafaev, *Scattering Theory: Some Old and New Problems*, Lecture Notes in Mathematics, **1735**, Springer, Berlin, 2000.
- [13] V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S. Lakaev, *Bounds on the discrete spectrum of lattice Schrödinger operators*, Preprint mp-arc 10-143, University of Texas, Austin, 2011.

Поступила в редакцию 25.04.2013,
после доработки 29.07.2013