Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, О периодических решениях уравнения Хопфа, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 2, 222–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 08:13:15

© 2013 г.

А. Б. Шабат^{*†}

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ХОПФА

Рассматривается динамика на больших временах приближенных решений краевой задачи для уравнения Хопфа на конечном отрезке. Кроме начальных условий, налагаются, например, нулевые условия Дирихле на обоих концах отрезка. Все особенности решений, связанные с пересечением характеристик, сконцентрированы в этом случае в полосе, ограниченной вертикальными характеристиками, выпущенными из граничных точек.

Ключевые слова: обобщенные решения, законы сохранения, метод Галёркина.

DOI: 10.4213/tmf8546

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучается качественное поведение приближенных решений задачи Коши для уравнения Хопфа с периодическими начальными данными в виде тригонометрического многочлена:

$$u_t = uu_x, \quad u|_{t=0} = \sum_{j=-N}^N \alpha_j e^{ijx}. \quad (1)$$

Известно, что в определенном смысле задача Коши для этого уравнения с начальными данными $u|_{t=0} = f(x)$ сводится к теореме о неявных функциях, так как локально

$$u(t, x) = f(x + ut) \iff u_t = uu_x. \quad (2)$$

Глобальная разрешимость задачи Коши при ограниченных начальных данных $f(x)$ была доказана в 50-х гг. прошлого века (см. библиографию в работе [1]). Уравнение Хопфа заменялось при этом в полуплоскости $t > 0$ дискретным уравнением для функций u_n^k на решетке:

$$u_n^{k+1} = u_{n+1}^k \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{4l} u_{n+1}^k \right) + u_{n-1}^k \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{4l} u_{n-1}^k \right), \quad u_n^0 = \frac{1}{2l} \int_{(n-1)l}^{(n+1)l} u(0, x) dx, \quad (3)$$

^{*}Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, Карачаевск, Россия. E-mail: shabatab@mail.ru

[†]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.

где сделана замена $u(t, x) \rightarrow u(kh, nl) = u_n^k$. Другой вариант доказательства теоремы существования обобщенного решения задачи Коши был основан на замене гиперболического уравнения Хопфа параболическим уравнением с малым параметром при старшей производной:

$$u_t^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon + u^\varepsilon u_x^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(0, x) = u(0, x) \in L_\infty. \quad (4)$$

При кусочно-линейных начальных данных формула (2) и метод характеристик позволяют построить семейство точных решений уравнения Хопфа с разрывами. Это дает возможность, в частности, убедиться в неединственности решения задачи Коши в классе обобщенных функций. Вопрос о совпадении построенных различными способами решений задачи Коши упирается так или иначе в задание подходящих условий на линиях разрыва. Напомним в этой связи, что для уравнения Хопфа существует произвол в выборе “основного” закона сохранения $\partial_t \rho(u) = \partial_x \sigma(u)$, и что для обобщенного решения условия на линии разрыва зависят от конкретного выбора этого закона сохранения.

Хотя указанные выше методы построения приближенных решений, использующие уравнения (3), (4), являются конструктивными, неясно, однако, какую информацию можно извлечь из них о качественном поведении решений после возникновения разрывов, обусловленных пересечением характеристик (см. явную формулу (2)). Мы попытаемся восполнить этот пробел на примере задачи Коши (1) с периодическими начальными данными и рассмотреть некоторые вопросы качественного поведения приближенных периодических по x решений уравнения Хопфа на следующих после возникновения разрывов стадиях динамики.

Интерес к теории разрывных решений гиперболических систем связан как с их применением в газовой динамике [2], так и с приложениями метода годографа в современной теории интегрируемости. Связь метода годографа и интегрируемых динамических систем, возникающих в методе обратной задачи рассеяния, была отмечена в работе [3]. В недавней работе [4] мы попытались переформулировать эту связь непосредственно в терминах данных рассеяния.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

При любом постоянном α решение $u(t, x)$ задачи Коши (1) можно заменить другим решением $\hat{u}(t, x)$ со сдвинутыми на α начальными данными:

$$\hat{u}(t, x) = \alpha + u(t, x + \alpha t) \implies \hat{u}_t = \hat{u} \hat{u}_x. \quad (5)$$

Данная однопараметрическая группа симметрий позволяет выбрать $\alpha_0 = 0$ в начальных данных задачи (1) и перейти от уравнения Хопфа к проинтегрированному уравнению $2v_t = v_x^2$, $u = v_x$. Приближенное решение последнего строится методом Галёркина:

$$2v_\tau = \{v_x^2\}; \quad v(\tau, x) = b_0(\tau) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} a_n(\tau) e^{inx} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} b_n(\tau) e^{-inx}. \quad (6)$$

Фигурные скобки обозначают здесь отбрасывание высших гармоник с номерами, большими N . Приравнивание коэффициентов при e^{ijx} , $|j| \leq N$, в уравнении для

$v(\tau, x)$ приводит к замкнутой системе дифференциальных уравнений относительно $2N$ неизвестных функций $a_n(\tau)$ и $b_n(\tau)$:

$$a'_n = f_n(\vec{a}, \vec{b}), \quad b'_n = g_n(\vec{a}, \vec{b}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где штрих – это дифференцирование по времени, которое мы обозначаем через τ . Начальные данные для этой динамической системы в силу соотношения $u = v_x$ задаются в виде

$$a_n(0) = -i\alpha_n, \quad b_n(0) = i\alpha_{-n}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Для вещественных решений должно выполняться условие $\bar{a}_n = b_n$.

Правые части динамической системы (7) являются однородными квадратичными многочленами от a_n и b_n . В качестве иллюстрации приведем вид правой части последнего из уравнений системы для функции $a_N(\tau)$ в зависимости от четности числа N :

$$f_N = \begin{cases} -N(a_1 a_{N-1} + a_2 a_{N-2} + \dots + a_m a_{m+1}), & N = 2m + 1, \\ -N(a_1 a_{N-1} + a_2 a_{N-2} + \dots + a_{m-1} a_{m+1}) - m a_m^2, & N = 2m. \end{cases}$$

В частности, при $N = 5$ динамическая система (7) имеет следующий вид:

$$a'_1 = b_1 a_2 + b_2 a_3 + b_3 a_4 + b_4 a_5, \quad b'_1 = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_4 + a_4 b_5, \quad (8)$$

$$a'_2 = 2(b_1 a_3 + b_2 a_4 + b_3 a_5) - a_1^2, \quad b'_2 = 2(a_1 b_3 + a_2 b_4 + a_3 b_5) - b_1^2, \quad (9)$$

$$a'_3 = 3(b_1 a_4 + b_2 a_5) - 3a_1 a_2, \quad b'_3 = 3(a_1 b_4 + a_2 b_5) - 3b_1 b_2, \quad (10)$$

$$a'_4 = 4b_1 a_5 - 4a_1 a_3 - 2a_2^2, \quad b'_4 = 4a_1 b_5 - 4b_1 b_3 - 2b_2^2, \quad (11)$$

$$a'_5 = -5(a_1 a_4 + a_2 a_3), \quad b'_5 = -5(b_1 b_4 + b_2 b_3). \quad (12)$$

Легко видеть, что динамическая система (7) допускает редукцию $b_n = a_n$, которую в дальнейшем мы называем *главной*. Эта редукция соответствует нечетным по переменной x решениям уравнения (1) и начальным данным вида

$$a_n(0) = -i\alpha_n, \quad b_n(0) = i\alpha_{-n} = -i\alpha_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

Главная редукция дает нам, очевидно, приближенные решения уравнения Хопфа, удовлетворяющие дополнительным нулевым краевым условиям задачи Дирихле:

$$u_t = uu_x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 \quad \text{для всех } t. \quad (14)$$

При перенесении на случай “задачи Дирихле” (14) результатов работы [1] о разрешимости задачи Коши при помощи вспомогательного параболического уравнения (4) можно рассчитывать на значительное упрощение. При этом задаче Дирихле (14) соответствует задача Неймана для линейного параболического уравнения:

$$w_\tau = w_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad w_x(\tau, 0) = w_x(\tau, 2\pi) = 0 \quad \text{для всех } \tau \geq 0. \quad (15)$$

Установленная в работе Хопфа [5] замечательная связь уравнения Бюргерса (4) с линейным параболическим уравнением (15) занимает важное место в теории интегрируемых нелинейных моделей современной математической физики. Для обнаружения этой связи достаточно убедиться, что подстановка $w = e^{kv}$ переводит линейное уравнение (15) в проинтегрированное уравнение Бюргерса $v_\tau = v_{xx} + kv_x^2$.

Одним из характерных свойств уравнения Хопфа является бесконечная серия законов сохранения с плотностями u^j , $j = 1, 2, \dots$. Для разностной схемы (3) и уравнения с вязкостью (4) эти законы сохранения справедливы только при $j = 1$. В рассматриваемом нами периодическом случае метод Галёркина позволяет удерживать два закона сохранения, соответствующие $j = 1$ и $j = 2$:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)^j dx = 0, \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

Точнее, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Динамическая система для $2N$ функций $a_n(\tau)$ и $b_n(\tau)$, вычисленных по коэффициентам Фурье приближения Галёркина (6) обладает законом сохранения*

$$E'(\tau) = 0, \quad E(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N a_n(\tau) b_n(\tau) = E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $E'(\tau) = 0$ при $\tau = 0$. Пусть

$$\hat{E}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} v_x(t, x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)^2 dx.$$

Легко видеть, что при начальных данных в виде тригонометрического многочлена, заданных в (1), в начальный момент времени $E'(0) = \hat{E}'(0)$, хотя дифференцирования по τ и t , вообще говоря, отличаются. Остается воспользоваться законами сохранения (16), в силу которых $\hat{E}'(0) = 0$. Следовательно, $E'(0) = 0$, и теорема доказана.

Отметим, что, приравняв в уравнении (6) свободные члены, мы получаем

$$\frac{d}{d\tau} b_0 = b'_0 = \sum_{j=1}^N c_j = E = \text{const}, \quad c_j \stackrel{\text{def}}{=} a_j b_j.$$

Ясно, что выбор $b_0(0) = 0$ не ограничивает общности, таким образом, в дополнение к теореме мы имеем следующую простую формулу для коэффициента Фурье $b_0(\tau)$:

$$b_0(\tau) = (c_1 + c_2 + \dots + c_N)\tau.$$

Кроме закона сохранения $c_1 + \dots + c_N = E$, рассматриваемая динамическая система для коэффициентов $a_n(\tau)$, $b_n(\tau)$ допускает однопараметрическую группу преобразований

$$b_n \rightarrow b_n e^{-n\lambda}, \quad a_n \rightarrow a_n e^{n\lambda}, \quad c_n \rightarrow c_n.$$

Эта группа соответствует инвариантности относительно сдвига по переменной x дифференциального уравнения (7) для функции $v(\tau, x)$. Для вещественных решений величина параметра λ в этих преобразованиях является чисто мнимой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При фиксированных начальных данных мы можем увеличивать число N удерживаемых членов в формуле (6) для рассматриваемых приближенных решений $u(\tau, x; N) = v_x(\tau, x; N)$ задачи Коши. Теорема 1 позволяет доказать компактность построенного таким способом семейства тригонометрических многочленов. В частности, из этой теоремы следует, что множество последовательностей коэффициентов Фурье функций $v(\tau, x; N) - \tau E$ вполне ограничено в гильбертовом пространстве l_2 .

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ (??) ПРИ $N = 2$ И $N = 3$

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании задачи (6) в явном виде. Для проинтегрированного уравнения Хопфа $2v_t = (v_x)^2$ соотношение (5) принимает следующий вид:

$$\hat{v}(t, x) = ax + \frac{a^2}{2}t + v(t, x + at) \implies \hat{v}_t = \frac{1}{2}\hat{v}_x^2.$$

Напомним, что именно это преобразование (5) позволяет нам удалить нулевой коэффициент Фурье α_0 в исходных начальных данных (1). Аналогом частного решения $v(t, x) = a(x + at/2)$ является следующее решение уравнения (6) при $N = 2$:

$$v(\tau, x) = b_0(\tau) + \alpha[\sqrt{2}\cos y - \sin 2y], \quad b_0'' = 0, \quad y = x + \alpha\tau. \quad (17)$$

Соответствующее решение рассматриваемой динамической системы (7) (см. также ниже уравнения (18)) имеет вид

$$a_1(\tau) = \sqrt{2}\alpha e^{i\alpha\tau}, \quad a_2(\tau) = i\alpha e^{2i\alpha\tau}, \quad c_1 = 2\alpha^2, \quad c_2 = \alpha^2.$$

Покажем, что динамическая система (7) в случае двух экспонент интегрируется в эллиптических функциях. При $N = 2$ мы имеем $c_1 + c_2 = E = \text{const}$, и уравнения (7) дают

$$\begin{aligned} a_1' &= b_1 a_2, & a_2' &= -a_1^2, & \implies & c_1' = b_1^2 a_2 + a_1^2 b_2, \\ b_1' &= a_1 b_2, & b_2' &= -b_1^2, & & c_1'' = 2c_1(2c_2 - c_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Более того,

$$a_2'' + 2c_1 a_2 = b_2'' + 2c_1 b_2 = 0 \implies a_2' b_2 - a_2 b_2' = \varepsilon_1 = i\varepsilon = \text{const}$$

и, таким образом,

$$\frac{\varepsilon_1}{c_2} = \frac{a_2'}{a_2} - \frac{b_2'}{b_2}, \quad \frac{c_1'}{c_2} = -\frac{a_2'}{a_2} - \frac{b_2'}{b_2},$$

следовательно,

$$\frac{\varepsilon_1 - c_1'}{c_2} = 2\frac{a_2'}{a_2} = -\frac{a_1^2}{a_2}, \quad \frac{\varepsilon_1 + c_1'}{c_2} = -2\frac{b_2'}{b_2} = 2\frac{b_1^2}{b_2}$$

и

$$(c_1')^2 - \varepsilon_1^2 = 4c_1^2 c_2 = 4c_1^2 (E - c_1). \quad (19)$$

В случае главной редукции (13) константа $\varepsilon_1 = 0$, так как $b_2 = a_2$ и $b_1 = a_1$. При этом уравнение (19) интегрируется в элементарных функциях, и вместо периодической динамики мы получаем

$$a_1^2 + a_2^2 = E = k^2, \quad a_2' = a_2^2 - k^2 \implies a_2 \rightarrow \mp k, \quad a_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \pm \infty.$$

Вопрос об аналитическом интегрировании динамической системы (7) при $N > 2$ остается открытым. В случае главной редукции мы имеем при $N = 3$

$$a_1' = (a_1 + a_3)a_2, \quad a_2' = (2a_3 - a_1)a_1, \quad a_3' = -3a_1a_2. \quad (20)$$

Эта динамическая система обладает не зависящим от переменной a_2 первым интегралом $\phi = \phi(a_1, a_3)$. Отвечающее методу характеристик обыкновенное дифференциальное уравнение сводится при этом к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными, и мы получаем

$$(a_1 + a_3) \frac{\partial \phi}{\partial a_1} = 3a_1 \frac{\partial \phi}{\partial a_3},$$

следовательно,

$$\phi = (3a_1^2 + a_3^2 + a_1a_3)f\left(\frac{a_3 - \alpha a_1}{a_3 - \bar{\alpha} a_1}\right), \quad \alpha^2 + \alpha + 3 = 0. \quad (21)$$

Полезно отметить, что

$$\frac{1}{a_2} \frac{d}{d\tau} \ln(3a_1^2 + a_3^2 + a_1a_3) = 1.$$

Полиномиальные законы сохранения рассматриваемой динамической системы (20) исчерпываются при этом квадратичным интегралом $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = E$ из теоремы 1.

Дальнейшее интегрирование системы (20) требует, по-видимому, перехода к проективным координатам. Однако здесь приходится учитывать структуру дополнительного первого интеграла (21), так как в результате обычной стереографической проекции мы получаем довольно громоздкие уравнения

$$\begin{aligned} z = x + iy = \frac{a_1 + ia_2}{k - a_3} &\iff a_1 + ia_2 = \frac{2kz}{1 + z\bar{z}}, \quad a_3 = k \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}}, \quad k^2 = E, \\ x' &= \frac{ky}{1 + z\bar{z}} A(x, y), \quad y' = \frac{kx}{1 + z\bar{z}} B(x, y), \end{aligned}$$

где

$$A(x, y) = -5x^2 + y^2 + 2x - 1, \quad B(x, y) = 2x^2 - 4y^2 - 2x - 2.$$

Характер динамики решений рассматриваемой динамической системы, как показывают численные эксперименты, сильно зависит от начальных данных. Приравняв нулю правые части уравнений (20), мы получаем положение равновесия $(0, \varepsilon, 0)$. При начальных данных $(-a, 0, 1) \rightarrow (0, \sqrt{a^2 + 1}, 0)$ в одной из областей притяжения этого стационарного решения мы численно находим, что

$$0 < a < 2.775, \quad (-a, 0, 1) \rightarrow (0, \sqrt{a^2 + 1}, 0), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

При других начальных данных решение, вообще говоря, имеет колебательный характер. Второе положение равновесия, пропорциональное $(2, 0, 1)$, оказывается при численных расчетах неустойчивым.

Используемые нами законы сохранения (см. теорему 1) выполняются и для модификации Кортевега–де Фриза уравнения Хопфа

$$v_t = \frac{1}{2} v_x^2 + \varepsilon v_{xxx} \implies u_t = uu_x + u_{xxx}. \quad (22)$$

Рис. 1. Приближенные решения уравнения Хопфа при $N = 4$ (а) и $N = 8$ (б).

Аналог динамической системы (7) в этом случае записывается в следующем виде:

$$a'_n = f_n(\vec{a}, \vec{b}) - i\varepsilon n^2 a_n, \quad b'_n = g_n(\vec{a}, \vec{b}) + i\varepsilon n^2 b_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

Зависимость от ε пропадает, очевидно, в амплитудных уравнениях:

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} a_n b_n \implies c'_n = b_n f_n(\vec{a}, \vec{b}) + a_n g_n(\vec{a}, \vec{b}).$$

При $N = 3$ динамическая система (23) записывается в виде

$$\begin{aligned} a'_1 &= b_1 a_2 + b_2 a_3 - i\varepsilon a_1, & b'_1 &= a_1 b_2 + a_2 b_3 + i\varepsilon b_1, \\ a'_2 &= 2b_1 a_3 - a_1^2 - 4i\varepsilon a_2, & b'_2 &= 2a_1 b_3 - b_1^2 + 4i\varepsilon b_2, \\ a'_3 &= -3a_1 a_2 - 9i\varepsilon a_3, & b'_3 &= -3b_1 b_2 + 9i\varepsilon b_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Для исследования предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ в амплитудных уравнениях в качестве начальных данных для уравнений (24) можно было бы выбрать указанное выше стационарное решение предельной динамической системы (20).

На рис. 1 приведены графики аналогичных стационарных решений $u = v_x$ при $N = 4$ и $N = 8$. Второе из этих решений получено численно.

Стационарные решения. Рассмотрим кратко интересный вопрос о положениях равновесия. Ясно, что этот вопрос связан с алгебраической геометрией, так как правые части динамической системы (7) являются квадратичными многочленами. Введем проективные координаты

$$p_j = \frac{a_j}{a_1}, \quad q_j = \frac{b_j}{b_1}, \quad k = \frac{a_1}{b_1} \quad (25)$$

и условимся называть положение равновесия *невыврожденным*, если

$$c_1 c_2 \cdots c_N \neq 0, \quad c_j \stackrel{\text{def}}{=} a_j b_j. \quad (26)$$

Так как при $N = 2$ система (18) сводится к уравнению $c'_1 = 2c_1(2c_2 - c_1)$, условия $c'_1 = 0$ и (26) дают $2c_2 = c_1$. Строго говоря, соответствующее условию $2c_2 = c_1$ решение (см. формулу (17)) нельзя назвать стационарным, тем не менее для этого решения $c'_1 = c'_2 = 0$, и его динамика тривиальна. При $N = 3$ находим

$$c_1 c_2 = c_2 c_3 = 0, \quad c_1(c_1 - 4c_3) = 0,$$

следовательно, невырожденные положения равновесия возможны только начиная с $N = 4$.

Рассмотрим теперь вопрос о невырожденных положениях равновесия при $N = 4$. Условия стационарности $f_j = g_j = 0$ определяются в этом случае (см. формулы (8)–(12)) функциями

$$\begin{aligned} f_1 &= b_1 a_2 + b_2 a_3 + b_3 a_4, & f_2 &= 2b_1 a_3 + 2b_2 a_4 - a_1^2, \\ \frac{1}{3} f_3 &= b_1 a_4 - a_1 a_2, & -\frac{1}{2} f_4 &= 2a_1 a_3 + a_2^2. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы для g_j получаются при взаимной замене $a_j \leftrightarrow b_j$. Из уравнений $f_3 = f_4 = 0$ и $g_3 = g_4 = 0$ мы получаем в обозначениях (25)

$$p_4 = k p_2, \quad q_4 = \frac{1}{k} q_2, \quad p_3 = -\frac{1}{2} p_2^2, \quad q_3 = -\frac{1}{2} q_2^2,$$

следовательно, $c_4 = c_2$, $4c_1 c_3 = c_2^2$. Подставив полученные соотношения в уравнения $f_2 = g_2 = 0$, находим, что

$$p_2^2 = k(2\alpha - 1), \quad q_2^2 = \frac{1}{k}(2\alpha - 1), \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_2}{c_1},$$

следовательно,

$$\alpha^2 = (2\alpha - 1)^2. \quad (27)$$

Аналогично, уравнения $f_1 = g_1 = 0$ дают для α еще одно квадратное уравнение $\alpha^2 = (\alpha - 2)^2$, и $\alpha = 1$ является общим корнем этого уравнения и уравнения (27). Таким образом, мы доказали, что в случае невырожденного положения равновесия должны выполняться соотношения

$$c_1 = c_2 = c_4 = 4c_3. \quad (28)$$

В случае главной редукции $c_j = a_j^2$, и в положении равновесия должны, в дополнение к (28), выполняться условия $a_2 a_4 > 0$, $a_1 a_3 < 0$. Численные эксперименты свидетельствуют, что найденные невырожденные положения равновесия являются устойчивыми.

При $N = 5$ условия стационарности уравнений (10)–(12) дают

$$\begin{aligned} p_4 &= -p_2 p_3, & \frac{2}{k} p_5 &= p_2^2 + 2p_3, & p_2(1 + p_3) &= q_2 p_5, \\ q_4 &= -q_2 q_3, & 2k q_5 &= q_2^2 + 2q_3, & q_2(1 + q_3) &= p_2 q_5. \end{aligned}$$

В частном случае главной редукции находим, что $p_5 = 1 + p_3$ и $c_1 = 2c_3$, $c_2 = 2c_1$. Можно убедиться в справедливости аналогичных формул и в общем случае.

При $N = 6$ условия равновесия усложняются, и в случае главной редукции мы имеем

$$\begin{aligned} p_6 &= p_4 + p_2 p_3, & p_5 &= -p_2 p_4 - \frac{1}{2} p_3^2, \\ p_3^2 + 2p_3 &= 2p_2^2 p_3 - p_2^2, & p_4^2 + p_2 p_4 &= \frac{1}{2} - p_3 + \frac{1}{2} p_3^2, \\ a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5 + a_5 a_6 &= 0, \\ a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_6 &= \frac{1}{2} a_1^2. \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Галёркина, использованный в настоящей работе для построения приближенных решений задачи (1), применим, очевидно, и к уравнениям (4), (22). Вообще на этой общей основе можно было бы сравнить различные подходы к построению приближенных (периодических по переменной x) решений уравнения Хопфа.

Решения динамической системы (7) являются, вообще говоря, почти периодическими функциями переменной τ в соответствии с теоремой 1. При численных экспериментах в дополнение к изучению поведения вещественных функций $c_j = a_j b_j$ было бы желательно исследовать пределы

$$\check{c}_j(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c_j(\tau) e^{-i\tau\lambda} d\tau,$$

которые для почти периодических функций заменяют коэффициенты Фурье.

Благодарности. Автор признателен В. Э. Адлеру, И. В. Колоколову и В. В. Лебедеву за полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках Программы РАН “Нелинейная динамика”, при поддержке РФФИ (гранты № 2012-1.5-12-000-1003-011 и 13-01-12460-офи_м2), а также Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5377.2012.2).

Список литературы

- [1] О. А. Олейник, *УМН*, **12**:3 (1957), 3–73.
- [2] Б. Л. Рождественский, “Разрывные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа”, *УМН*, **15**:6(96) (1960), 59–117.
- [3] E. Ferapontov, *Phys. Lett. A*, **158**:3–4 (1991), 112–118.
- [4] А. Б. Шабат, *Владикавказ. матем. журн.*, **14**:4 (2012), 83–94.
- [5] E. Hopf, *Commun. Pure Appl. Math.*, **3**:3 (1950), 201–230.

Поступила в редакцию 12.05.2013