Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, Д. Ортенци, Когомологические, пуассоновы структуры и интегрируемые иерархии в тавтологических подрасслоениях для страт Биркгофа грассманиана Сато, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 2, 231–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:32:02

© 2013 г.

Б. Г. Конопельченко*, Д. Ортенци†

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ, ПУАССОНОВЫЕ СТРУКТУРЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИЕРАРХИИ В ТАВТОЛОГИЧЕСКИХ ПОДРАССЛОЕНИЯХ ДЛЯ СТРАТ БИРКГОФА ГРАССМАНИАНА САТО

Рассматриваются кохомологические и пуассоновы структуры, которые связаны со специальными тавтологическими подрасслоениями $TBW_{1,2,\dots,n}$ для страт Биркгофа грассманиана Сато. Показано, что касательные расслоения для подрасслоений $TBW_{1,2,\dots,n}$ изоморфны линейным пространствам 2-кограниц с исчезающими модулями кохомологии Харрисона. Особый класс 2-кограниц обусловлен системой интегрируемых квазилинейных уравнений в частных производных. Для больших клеток это иерархия бесдисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Кроме того, показано, что семейства идеалов алгебраических многообразий в $TBW_{1,2,\dots,n}$ можно считать пуассоновыми идеалами. Это замечание устанавливает связь между семействами алгебраических кривых в $TBW_{\mathbb{S}}$ и коизотропными деформациями таких кривых нулевого и ненулевого рода; эти кривые описываются иерархиями систем гидродинамического типа, к которым относится иерархия бесдисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Отмечена взаимосвязь между кохомологическими и пуассоновыми структурами.

Ключевые слова: страта Биркгофа, кохомология Харрисона, интегрируемые системы.

DOI: 10.4213/tmf8547

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье мы продолжаем изучение алгебраических, геометрических и других структур, которые возникают в тавтологических подрасслоениях для страт Биркгофа грассманиана Сато. В работе [1] было показано, что каждая страта Биркгофа Σ_S грассманиана Сато Gg содержит подмножество W_S точек, для каждой

*Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio de Giorgi”, Università del Salento, INFN, Sezione di Lecce, Lecce, Italy. E-mail: konopel@le.infn.it

†Dipartimento di Matematica Pura ed Applicazioni, Università di Milano Bicocca, Milano, Italy. E-mail: giovanni.ortenzi@unimib.it

из которых соответствующее бесконечномерное линейное пространство (слой тавтологического подрасслоения TB_{W_S} , связанного с W_S) замкнуто по отношению к поточечному умножению. С алгебраической точки зрения все подрасслоения TB_{W_S} являются бесконечными семействами бесконечномерных ассоциативных коммутативных алгебр. С геометрической точки зрения каждый слой подрасслоения TB_{W_S} является алгебраическим многообразием, а множество всех TB_{W_S} – бесконечным семейством алгебраических многообразий, причем каждое конечномерное подмногообразие представляет собой семейство алгебраических кривых, заданных уравнениями [1]

$$p_j p_k - \sum_l C_{jk}^l p_l = 0, \quad (1)$$

$$\sum_l (C_{jk}^l C_{lm}^p - C_{mk}^l C_{lj}^p) = 0, \quad j, k, m, p \in S, \quad (2)$$

где C_{jk}^l параметризованы некоторыми величинами H_m^n .

В случае больших клеток $\Sigma_\emptyset$ грассманиана Сато имеем $C_{jk}^l = \delta_{j+k}^l + H_{j-l}^k + H_{k-l}^j$, $j, k = 0, 1, 2, \dots$, при этом $TB_{W_\emptyset}$ представляет собой совокупность семейств нормальных рациональных кривых (кривые Веронезе) всех степеней $2, 3, \dots$. Что касается страты Σ_1 , то каждый слой из TB_{W_1} представляет собой координатное кольцо эллиптической кривой, а все множество TB_{W_1} – бесконечное семейство таких колец. Подрасслоение $TB_{W_{1,2}}$ для множества $W_{1,2}$ аналогично семействам координатных колец особой пространственной кривой с достаточно интересными свойствами. Это семейство кривых в $TB_{W_{1,2}}$ содержит плоскую тригональную кривую второго рода. Для высших страт $\Sigma_{1,2,\dots,n}$ (здесь $n = 3, 4, \dots$) подрасслоение $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ содержит $(n+1, n+2)$ -плоскую кривую рода n .

В настоящей работе обсуждаются связанные с подрасслоениями TB_{W_S} локальные и пуассоновы структуры, а также соответствующие алгебраические кривые. Показано, что касательные расслоения для $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ содержат иерархии интегрируемых уравнений. В частности, касательное подрасслоение $TB_{W_\emptyset}$ для большой клетки содержит иерархию бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (БКП). Доказано, что касательные расслоения для $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ и $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ -модули $E_{1,2,\dots,n}$ изоморфны линейным пространствам 2-кограниц, при этом модули когомологии Харрисона $H^2(W, E)$ и $H^3(W, E)$ исчезают. Особые классы 2-коциклов и 2-кограниц описываются системами интегрируемых квазилинейных уравнений в частных производных. Например, класс 2-кограниц, связанный с подрасслоением $TB_{W_\emptyset}$ для большой клетки, обусловлен иерархией БКП.

Кроме того, мы приводим интерпретацию семейств идеалов $I(\Gamma_\infty)$ для семейств алгебраических кривых в $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ как пуассоновых идеалов. Показано, что семейство идеалов для семейства нормальных рациональных кривых в большой клетке является пуассоновым идеалом по отношению к структуре Пуассона, удовлетворяющей некоторым условиям. В таких пуассоновых идеалах используются два набора канонических переменных. Показано, что в координатах Дарбу указанные условия представляют собой не что иное, как иерархию БКП. Аналогичные результаты справедливы и для других страт. Наконец, обнаружена взаимосвязь между когомологическими и пуассоновыми структурами подрасслоений $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$.

Изложенные в настоящей работе результаты расширяют результаты, полученные в работах [2], [3] для $\text{Gr}^{(2)}$, на случай грассманиана Сато общего вида.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем структуру грассманиана Сато. Касательные подрасслоения $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ и системы интегрируемых квазилинейных уравнений в частных производных рассмотрены в разделе 3. В разделе 4 изучается связь между когомологией Харрисона и иерархией БКП. В разделе 5 обсуждаются соответствующие пуассоновы идеалы и коизотропные деформации.

2. ГРАССМАНИАН САТО, СТРАТЫ БИРКГОФА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Не вникая в технические детали, напомним кратко некоторые основные факты, связанные с грассманианом Сато, его стратификацией Биркгофа (см., например, труды [4], [5]), а также результаты работы [1]. Грассманиан Сато Gr можно рассматривать как множество всех подпространств бесконечномерного множества всех формальных рядов Лорана с комплекснозначными коэффициентами, допускающих алгебраический базис $(w_0(z), w_1(z), \dots)$ с базисными элементами вида

$$w_n = \sum_{k=-\infty}^n H_k^n z^k \quad (3)$$

конечного порядка n .

Грассманиан Gr имеет стратифицированную структуру, $\text{Gr} = \cup_s \Sigma_s$, в которой страты Σ_s являются подмножествами в Gr , образующими оболочку базисных элементов (3) с частным набором целых чисел n [4], [5]. В случае больших клеток базис состоит из формальных рядов Лорана

$$p_0 = 1, \quad p_i(z) = z^i + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^i}{z^k}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Этот набор отождествляется с бесконечным набором символов H_j^i , $i, j = 1, 2, \dots$. Большая клетка представляет собой плотное множество в грассманиане Сато. Точки вне большой клетки формируют страты Биркгофа. Можно показать, что точки на стратах Биркгофа строятся путем изменения базиса пространства рядов Лорана и, подходящим образом [4], [5], хвостов рядов Лорана. В простейшем случае первой страты Биркгофа Σ_1 базис рядов Лорана получается устранением элемента p_1 и, следовательно, имеет вид

$$p_0 = 1, \quad p_i(z) = z^i + H_{-1}^i z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^i}{z^k}, \quad i = 2, 3, \dots,$$

плюс элемент степени -1 . Как и в случае $\Sigma_{\emptyset}$, точка в Σ_1 является оболочкой рядов Лорана $\{p_i\}_{i=-1,0,2,\dots}$.

В настоящей статье, как и в работе [1], нас интересуют частные подмножества W_S страт Биркгофа грассманиана Сато. В общем случае подмножество W_S состоит из рядов Лорана, замкнутых по отношению к поточечному умножению. В случае

большой клетки $W_\varnothing$ представляет собой оболочку элементов (4), замкнутую по отношению к умножению, т. е. такую, что

$$p_j(z)p_k(z) = \sum_{l=0} C_{jk}^l p_l(z), \quad j, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

для некоторых подходящих коэффициентов C_{jk}^l . Это свойство проверено в работе [1] для частного случая коэффициентов H_j^i формального ряда Лорана p_i , удовлетворяющих условиям

$$H_m^{j+k} - H_{m+k}^j - H_{j+m}^k + \sum_{l=1}^{j-1} H_{j-l}^k H_m^l + \sum_{l=1}^{k-1} H_{k-l}^j H_m^l - \sum_{l=1}^{m-1} H_{m-l}^k H_l^j = 0,$$

где $j, k, m = 1, 2, \dots$, при этом

$$C_{jk}^l = \delta_{j+k}^l + H_{j-l}^k + H_{k-l}^j, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots$$

При этих условиях ряды Лорана p_i можно представить в виде

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_2 &= p_1^2 - 2H_1^1, \\ p_3 &= p_1^3 - 3H_1^1 p_1 - 3H_2^1, \\ p_4 &= p_1^4 - 4H_1^1 p_1^2 - 4H_2^1 p_1 - 4H_3^1 + 2(H_1^1)^2, \\ p_5 &= p_1^5 - 5H_1^1 p_1^3 - 5H_2^1 p_1^2 - (5H_3^1 - 5(H_1^1)^2) p_1 - 5H_4^1 + 5H_1^1 H_2^1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Аналогичные результаты получаются для всех страт Биркгофа. Что касается первой страты Σ_1 , то для нее подмножество рядов Лорана, замкнутое по отношению к поточечному умножению $p_i p_j = \sum_k C_{ij}^k p_k$, можно построить итерационным способом. В этом случае коэффициенты H_j^i должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} H_{j+l}^i + H_{i+l}^j + H_{-1}^j H_{l+1}^i + H_{-1}^i H_{l+1}^j + \sum_{n=1}^{l-1} H_n^j H_{l-n}^i = \\ = H_l^{i+j} + H_{-1}^j H_l^{i+1} + H_{-1}^i H_l^{j+1} + \sum_{n=2}^{i-1} H_{i-n}^j H_l^n + \sum_{n=2}^{j-1} H_{j-n}^i H_l^n + H_{-1}^i H_{-1}^j H_l^2 + \\ + (H_j^i + H_i^j + H_{-1}^i H_1^j + H_1^i H_{-1}^j) \delta_0^l, \quad j, k = 2, 3, \dots, \quad l = -1, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} C_{ij}^l &= \delta_{i+j}^l + H_{-1}^j \delta_{i+1}^l + H_{-1}^i \delta_{j+1}^l + H_{i-l}^j + H_{j-l}^i + H_{-1}^i H_{-1}^j \delta_2^l + \\ &+ (H_j^i + H_i^j + H_{-1}^i H_1^j + H_1^i H_{-1}^j) \delta_0^l. \end{aligned} \quad (6)$$

Первые p_i выглядят так:

$$\begin{aligned} p_4 &= (p_2)^2 - 2H_{-1}^2 p_3 - (H_{-1}^2)^2 p_2 - 2H_2^2 - 2H_{-1}^2 H_1^2, \\ p_5 &= p_2 p_3 - H_{-1}^2 p_2^2 - (H_{-1}^3 - 2(H_{-1}^2)^2) p_3 - (H_1^2 + H_{-1}^2 H_{-1} - (H_{-1}^2)^3) p_2 - \\ &\quad - \frac{3}{2} H_1^2 H_{-1} - \frac{5}{2} H_3^2 - \frac{1}{2} H_{-1}^2 H_1^3 + 2H_{-1}^2 H_2^2 + 2(H_{-1}^2)^2 H_1^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогом подмножества $W_\emptyset$ для Σ_1 являются такие точки на Σ_1 , для которых p_i удовлетворяют условиям (6), (7). Соотношения (5) естественным образом определяют набор квадратичных алгебраических многообразий в бесконечномерном пространстве координат p_i . Каждое из них является многообразием нулевого рода. Это свойство изменяется на стратах Биркгофа. В пространстве координат $p_0, p_2, p_3, \dots$ существует бесконечное число квадратичных алгебраических многообразий, задаваемых соотношениями $p_i p_j = \sum_k C_{ij}^k p_k$. В случае W_{Σ_1} среди них существует эллиптическая кривая (рода 1) [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{23}^1 &= (p_3)^2 - (p_2)^3 + 3H_{-1}^2 p_3 p_2 - 2H_{-1}^3 (p_2)^2 + ((H_{-1}^2)^3 + 3H_1^2 + H_{-1}^2 H_{-1}^3) p_3 - \\ &\quad - ((H_{-1}^3)^2 + 2H_1^3 - 3H_{-1}^2 H_1^2 - 3H_2^2 + H_{-1}^3 (H_{-1}^2)^2) p_2 - \\ &\quad - 2H_3^3 - 2H_{-1}^3 H_1^3 + 3H_4^2 + 3H_2^2 (H_{-1}^2)^2 - \frac{3}{2} H_{-1}^2 H_3^2 + 3(H_1^2)^2 - \frac{3}{2} (H_{-1}^2)^2 H_1^3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} H_{-1}^2 H_1^2 H_{-1}^3 + 4H_{-1}^3 H_2^2 = 0. \end{aligned}$$

3. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПОДРАССЛОЕНИЯ TB_S И СИСТЕМЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Касательные подрасслоения TB_S и системы интегрируемых квазилинейных уравнений в частных производных

В настоящей статье рассматриваются только подмножества $W_{1,2,\dots,n}$ страт Биркгофа и соответствующие подрасслоения $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$. Стандартный метод анализа локальных свойств многообразий, представленных уравнениями (1), (2), заключается в исследовании их касательного расслоения T_W [6]–[9]. Обозначим через π_i и Δ_{ik}^l соответствующие элементы расслоения T_W в точке. Как обычно, они определяются системой линейных уравнений

$$\pi_j p_k + p_j \pi_k - \sum_l \Delta_{jk}^l p_l - \sum_l C_{jk}^l \pi_l = 0, \quad (8)$$

$$\sum_l (\Delta_{jk}^l C_{lm}^p + C_{jk}^l \Delta_{lm}^p - \Delta_{mk}^l C_{lj}^p - C_{mk}^l \Delta_{lj}^p) = 0, \quad j, k, m, p \in S_{1,2,\dots,n}. \quad (9)$$

В более общей постановке эти уравнения также определяют $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ -модуль E .

В случае страт Биркгофа структурные константы C_{jk}^l обладают особой структурой, поскольку параметризованы величинами H_k^j . Следовательно, Δ_{jk}^k также па-

раметризируются величинами Δ_{jk} , т.е. образами H_k^j в отображении $W \rightarrow E$, а уравнения (2) становятся линейными уравнениями (9) для Δ_{jk} . Будучи элементами модуля E (в частности, касательным пространством в точке), Δ_{ij} допускают естественный анзац

$$\Delta_{jk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad j, k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где u_k – набор независимых координат для многообразия, заданный условием ассоциативности (2), а x_j – набор новых независимых параметров. В рамках анзаца (10) уравнения (9) принимают форму квазилинейных уравнений для u_i .

Полученные системы квазилинейных уравнений являются очень специальными. Рассмотрим подрасслоение $TBW_{\mathcal{S}}$ для большой клетки. В этом случае

$$C_{jk}^l = \delta_{j+k}^l + H_{j-l}^k + H_{k-l}^j \quad (11)$$

и

$$H_m^{j+k} + H_{m+k}^j - H_{j+m}^k + \sum_{l=1}^{j-1} H_{j-l}^k H_m^l + \sum_{l=1}^{k-1} H_{k-l}^j H_m^l - \sum_{l=1}^{m-1} H_{m-l}^k H_l^j = 0, \quad (12)$$

где $j, k, m = 1, 2, \dots$. Отсюда мы имеем $\Delta_{kj}^l = \Delta_{k,j-l} + \Delta_{j,k-l}$, а система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_{j+k,m} + \left(-\Delta_{j,m+k} + \sum_{l=1}^{j-1} H_{j-l}^k \Delta_{lm} + \sum_{l=1}^{k-1} H_{k-l}^j \Delta_{lm} - \sum_{l=1}^{m-1} H_{m-l}^k \Delta_{jl} \right) + \\ + \left(\Delta_{k,m+j} + \sum_{l=1}^{j-1} \Delta_{j-l}^k H_{lm} + \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_{k-l}^j H_{lm} - \sum_{l=1}^{m-1} \Delta_{m-l}^k H_{jl} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из этой системы вытекают уравнения

$$k\Delta_{ik} - i\Delta_{ki} = 0. \quad (14)$$

Далее мы переобозначим H_k^1 как u_k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В рамках анзаца (10) система уравнений (13) совпадает с иерархией БКП.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (13) при $j = 1, k = 2, m = 1$ имеет вид

$$\Delta_{31} - \Delta_{13} - \Delta_{22} + 2H_1^1 \Delta_{11} = 0,$$

а соотношения (14) при $i = 1, k = 2$ и $i = 1, k = 3$ выглядят следующим образом:

$$2\Delta_{12} - \Delta_{21} = 0, \quad 3\Delta_{13} - \Delta_{31} = 0.$$

Анзац (10) приводит к уравнениям

$$\partial_{x_3} u_1 - \frac{3}{2} \partial_{x_2} u_2 + 3u_1 \partial_{x_1} u_1 = 0, \quad 2\partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 = 0. \quad (15)$$

Это знаменитые уравнения бКП (уравнения Хохлова–Заболоцкой) (см., например, работы [10]–[15]). Аналогичным образом при $j = 1$, $k = 1$ и $m = 3$ система (13) принимает вид

$$\Delta_{23} - 2\Delta_{14} - 2H_2^1 \Delta_{11} - 2H_1^1 \Delta_{12} = 0,$$

а соотношения (14) при $i = 1$, $k = 4$ и $i = 1$, $k = 3$ переходят в

$$\Delta_{41} = 4\Delta_{14}, \quad 3\Delta_{13} = \Delta_{31}.$$

Эти уравнения с учетом уравнений (15) приводят к системе

$$\begin{aligned} \partial_{x_4} u_1 &= 2\partial_{x_2} u_3 - 2\partial_{x_1}(u_1 u_2), \\ \partial_{x_1} u_3 &= \frac{1}{2} \partial_{x_2} u_2 - u_1 \partial_{x_1} u_1, \\ \partial_{x_2} u_1 &= 2\partial_{x_1} u_2, \end{aligned}$$

которая представляет собой второе уравнение иерархии бКП. При этом высшие уравнения (13), (14) приводят к высшим уравнениям бКП в рамках анзаца (10). Предложение доказано.

Анзац (10) представляет собой необходимое и достаточное условие замкнутости дифференциальных 1-форм

$$\Omega_k = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_{jk} dx_j, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

следовательно, сделанное выше утверждение можно также представить в следующей форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Особое подрасслоение $TB_{W_\varnothing}$, для которого дифференциальные 1-формы (16) замкнуты, подчиняется иерархии бКП.*

4. КОГОМОЛОГИЯ ХАРРИСОНА И КОГОМОЛОГИЯ БКП–ХАРРИСОНА

Из соотношений (8) и (9) вытекают некоторые когомологические свойства подрасслоений $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$. В самом деле, введем билинейное отображение $\psi(\alpha, \beta)$, где $\alpha, \beta \in TB_{W_{1,2,\dots,n}}$, заданное уравнением (см., например, монографию [7])

$$\psi(p_i, p_k) = \sum_l \Delta_{jk}^l p_l.$$

Тогда уравнения (9) принимают вид

$$p_j\psi(p_k, p_l) - \psi(p_j p_k, p_l) + \psi(p_j, p_k p_l) - p_l\psi(p_j, p_k) = 0$$

или, эквивалентно,

$$\alpha\psi(\beta, \gamma) - \psi(\alpha\beta, \gamma) + \psi(\alpha, \beta\gamma) - \gamma\psi(\alpha, \beta) = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in TB_{W_{1,2,\dots,n}}$. Билинейные отображения такого типа называются 2-коциклами Хохшильда [16]. Итак, касательное расслоение к многообразию структурных констант C_{jk}^l изоморфно линейному пространству 2-коциклов на $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ (см., например, книгу [7]). В случае коммутативных алгебр этот классический результат представляет собой часть теории когомологий для коммутативных ассоциативных алгебр, предложенной Харрисоном в работе [17]. Это наиболее подходящий метод анализа локальных свойств многообразий W_S .

Уравнения (8) дают дополнительную информацию о 2-коцикле $\psi(\alpha, \beta)$. Вводя линейное отображение $g(\alpha)$, заданное уравнением $g(p_i) = \pi_i$, перепишем уравнения (8) в виде

$$p_j g(p_k) + p_k g(p_j) - \psi(p_j, p_k) - g(p_j p_k) = 0.$$

Таким образом,

$$\psi(\alpha, \beta) = \alpha g(\beta) + \beta g(\alpha) - g(\alpha\beta),$$

при этом $\alpha, \beta \in TB_{W_{1,2,\dots,n}}$. Итак,

$$\psi(\alpha, \beta) = \delta g(\alpha, \beta),$$

где δ – кограницная операция Хохшильда. Следовательно, $\psi(\alpha, \beta)$ является 2-кограницей. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Касательное расслоение подрасслоения $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$ изоморфно линейному пространству 2-кограниц, причем модули когомологии Харрисона $H^2(TB_{W_{1,2,\dots,n}}, E)$ и $H^3(TB_{W_{1,2,\dots,n}}, E)$ стремятся к нулю.*

По существу это утверждение представляет собой переформулировку хорошо известных результатов, относящихся к когомологии коммутативных ассоциативных алгебр (см., например, работы [17]–[25]) для подрасслоений $TB_{W_{1,2,\dots,n}}$. В частности, условие существования 2-коцикла и равенство $H^2(TB_{W_{1,2,\dots,n}}, E) = 0$ являются достаточными для регулярности точки, в которой коцикл посчитан [17]–[19].

Полученные выше результаты справедливы для всех алгебраических многообразий, связанных со стратами Биркгофа. Предложение, доказанное в предыдущем разделе, показывает, что среди типичных 2-кограниц, рассмотренных выше, существуют особые кограницы, которые связаны с интегрируемыми уравнениями. В качестве прямого следствия предложения 1 для большой клетки получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Решения иерархии бКП дают класс 2-коциклов и 2-кограниц, заданный уравнением

$$\psi(p_j, p_k) = \sum_l \left(\frac{\partial u_{j-l}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{k-l}}{\partial x_j} \right) p_l,$$

для подрасслоения $TW_{W_\emptyset}$ в большой клетке.

Мы назовем такие 2-кограницы 2-кограницами бКП. Полученные выше 2-кограницы бКП описывают локальные свойства семейства нормальных рациональных кривых.

Используя тау-функцию F иерархии бКП, которая вводится с помощью уравнений (см., например, [13], [15])

$$u_k = H_k^1 = -\frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial x_1 \partial x_k},$$

полную иерархию бКП можно представить в виде хорошо известной системы бездисперсионных уравнений Хироты–Мивы [13], [15]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m} F_{i+k,m} + \frac{1}{m+k} F_{i,k+m} + \frac{1}{i+m} F_{k,i+m} + \sum_{l=1}^{i-1} \frac{1}{m(i-l)} F_{k,i-l} F_{l,m} + \\ + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{m(k-l)} F_{i,k-l} F_{l,m} - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{i(m-l)} F_{k,m-l} F_{i,l} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $F_{i,k}$ означает производную второго порядка функции F по x_i и x_k . Итак, любое решение F системы (17) определяет 2-коциклы бКП (и 2-кограницы) с помощью формулы

$$\psi(p_j, p_k) = - \sum_{l=1} \left(\frac{1}{j-l} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{j-l}} + \frac{1}{k-l} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_{k-l}} \right) \frac{\partial F}{\partial x_1} p_l.$$

Эта формула показывает, что выбор анзаца (10) соответствует простой реализации отображения $W_\emptyset \rightarrow E$, а именно

$$F \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \text{или} \quad H_k^j \rightarrow \frac{\partial H_k^j}{\partial x_1}.$$

Очевидно, что все приведенные выше выражения хорошо определены только для ограниченных $\partial u_i / \partial x_k$. Если $\partial u_i / \partial x_k \rightarrow \infty$, то приведенные выше формулы становятся неверными, и $H^2(W, E) \neq 0$.

В случае иерархии бКП точки, в которых $\partial u_i / \partial x_k \rightarrow \infty$, называются точками опрокидывания (или точками градиентной катастрофы). Такие точки формируют сингулярный сектор пространства решений иерархии бКП. В этом секторе пространство переменных $x_1, x_2, \dots$ расслаивается, и это расслоение тесно связано с расслоением Биркгофа. Анализ такой ситуации для иерархии Бюргерса–Хопфа (2-редукция иерархии бКП) и грассманиана $\text{Gr}^{(2)}$ проведен в работе [26].

Насколько нам известно, подобные результаты справедливы также и для других страт. Полный анализ когомологии Харрисона тавтологических расслоений для страт Биркгофа грассманиана $\text{Gr}^{(2)}$ и соответствующих интегрируемых уравнений проведен в работе [2].

5. СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ, ПУАССОНОВЫ ИДЕАЛЫ И КОИЗОТРОПНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотренные выше семейства кривых, алгебраических многообразий и семейства их идеалов можно считать погруженными в большие пространства с некоторыми характерными свойствами, например в коизотропные подмногообразия многообразий Пуассона и пуассоновы идеалы соответственно. Напомним, что подмногообразие пуассонова многообразия, обладающее скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, является коизотропным подмногообразием в том случае, когда его идеал $\mathcal{I}$ является пуассоновым идеалом [27], т. е.

$$\{\mathcal{I}, \mathcal{I}\} \subset \mathcal{I}. \quad (18)$$

Актуальность пуассоновых идеалов при изучении (квантовой) когомологии многообразий отмечалась в работе [28]. В работе [15] предложена теория коизотропных деформаций коммутативных ассоциативных алгебр, основанная на свойстве (18). Обобщение этой теории на случай алгебраических многообразий общего вида представлено в работе [29].

Итак, рассмотрим многообразие Пуассона P бесконечной размерности с локальными координатами $q_1, q_2, \dots, y_1, y_2, \dots$, наделенное скобкой Пуассона, которая задана соотношениями

$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{y_i, y_k\} = 0, \quad \{y_i, q_k\} = J_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где J_{ki} – некоторые функции параметров p и y . Выбор такой структуры Пуассона мотивирован тем, какую роль играют переменные p_i и y_k в нашем построении. Тождества Якоби для структур Пуассона (19) задаются системой уравнений

$$\begin{aligned} \sum_s J_{ls} \partial_{y_s} J_{kj} - \sum_s J_{ks} \partial_{y_s} J_{lj} &= 0, \\ \sum_s J_{sj} \partial_{q_s} J_{lk} - \sum_s J_{sk} \partial_{q_s} J_{lj} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Будем считать идеалы $\mathcal{I}(\Gamma_\infty)$ семейств алгебраических многообразий в $W_{1,2,\dots,n}$ идеалами в P и потребуем, чтобы они были пуассоновыми идеалами, т. е. подалгебрами

$$\{\mathcal{I}(\Gamma_\infty), \mathcal{I}(\Gamma_\infty)\} \subset \mathcal{I}(\Gamma_\infty). \quad (21)$$

Данное свойство означает, в частности, что генерируемые каждым членом из $\mathcal{I}(\Gamma_\infty)$ гамильтоновы векторные поля касательны к коизотропному подмногообразию с идеалом $\mathcal{I}(\Gamma_\infty)$.

Теперь решающим является вопрос существования такой структуры Пуассона, чтобы идеалы $I(\Gamma_\infty)$ подчинялись условию (21). Начнем с большой клетки. Для подрасслоения $TB_{W_\emptyset}$ ответ дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Семейство идеалов $I(\Gamma_\infty)$ семейства нормальных рациональных кривых в большой клетке представляет собой пуассонов идеал в многообразии Пуассона, наделенном скобками Пуассона (19), а J_{ik} удовлетворяют условиям

$$(J_{i,k-1} - J_{k,i-1})|_{\Gamma_\infty} = 0, \quad i, k = 2, 3, \dots \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать соотношение (21), достаточно показать, что для элементов h_n базиса в $I(\Gamma_\infty)$ выполняются условия $\{h_n, h_m\} \subset I(\Gamma_\infty)$. Для этой цели наиболее удобны локальные координаты

$$p_n^* = P_n \left(-p_1, -\frac{1}{2}p_2, -\frac{1}{3}p_3, \dots \right), \quad n = 2, 3, \dots,$$

где $P_n(t_1, t_2, \dots)$ – стандартные полиномы Шура, задаваемые формулой

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} z^n t_n = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(t_1, t_2, \dots),$$

и канонический базис $h_2^*, h_3^*, \dots$, представленный в виде

$$h_n^* = p_n^* - H_{n-1}^1, \quad n = 2, 3, \dots,$$

т. е. $h_n^* = p_n^* - u_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$. В этих координатах справедливо тождество

$$\{h_n^*, h_m^*\} = J_{n-m-1}^* - J_{m-n-1}^*, \quad n, m = 2, 3, \dots,$$

где J_{nm}^* – тензор Пуассона в этих координатах.

Таким образом, условия $\{h_n, h_m\} \subset I(\Gamma_\infty)$ выполняются тогда и только тогда, когда справедливы условия (22). Предложение доказано.

На Γ_∞ имеем $p_n^* = u_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, следовательно,

$$J_{ik}^*|_{\Gamma_\infty} = \alpha_{ik}(u) + \beta_{ik}(u)p_1^*, \quad i, k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где функции α_{ik} и β_{ik} зависят только от u_k . Поскольку $p_1^* \notin I(\Gamma_\infty)$, условия (22) эквивалентны следующим:

$$\alpha_{i,k-1} = \alpha_{k,i-1}, \quad \beta_{i,k-1} = \beta_{k,i-1}, \quad i, k = 1, 2, \dots$$

Свойство (23) указывает, что особый интерес представляют линейные по переменным p_k^* тензоры Пуассона J_{ik}^* . Поэтому рассмотрим следующий класс тензоров J_{ik}^* :

$$J_{lk}^* = - \sum_m \frac{1}{m} J_{mk}(u) p_{l-m}^*, \quad (24)$$

где $J_{mk}(u)$ зависят только от переменных $u_1, u_2, \dots$. Условия (22) или (23) равносильны следующим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} J_{mn} - \frac{1}{n} J_{nm} &= 0, \\ \frac{1}{m} J_{m,n-1} - \frac{1}{n} J_{n,m-1} + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{1}{k} u_{m-k-1} J_{k,n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} u_{n-k-1} J_{k,m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

(здесь $n, m = 1, 2, \dots$).

Используя хорошо известное свойство полиномов Шура $\partial_{p_k} P_n(p) = P_{n-k}(p)$, из которого следует, что

$$\partial_{p_i} h = \frac{1}{i} \sum_{l=1}^{i-1} p_{l-i}^* \partial_{p_l} h,$$

нетрудно сделать вывод о том, что структура Пуассона (19) с J_{lk}^* вида (24) в координатах $p_1, p_2, \dots, u_1, u_2, \dots$ принимает следующий вид:

$$\{p_i, p_k\} = 0, \quad \{u_i, u_k\} = 0, \quad \{u_i, p_k\} = J_{ki}(u), \quad i, k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Система (25) равносильна системе (13) с точностью до условий ассоциативности (12), причем $J_{nm} = \Delta_{nm}$. Таким образом, существует тесная взаимосвязь между когомологической и пуассоновой структурами, связанная с подрасслоением TB_{W_∞} для большой клетки.

Этот факт проверен компьютерными вычислениями вплоть до $n, m = 11$. Мы не можем предложить формальное доказательство этого утверждения.

Заметим, что тензор Пуассона, заданный в (26), в силу свойств полиномов Шура имеет вид

$$J_{ik}^* = \sum_m J_{mk}(u) \frac{\partial p_i^*}{\partial p_m}. \quad (27)$$

Особый интерес представляет подкласс тензоров Пуассона (27), для которых выполнены равенства $J_{mk}(u) = \partial u_k / \partial x_m$, т. е.

$$J_{ik}^* = \sum_m \frac{\partial p_i^*}{\partial p_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_m}, \quad i, k = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

где $x_1, x_2, \dots$ — новые координаты на $\mathcal{M}$. Во-первых, структуры Пуассона (19), (26) в координатах x_i, p_i принимают вид

$$\{p_i, p_k\} = 0, \quad \{x_i, x_k\} = 0, \quad \{x_i, p_k\} = \delta_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots,$$

т. е. координаты $p_i, x_i, i = 1, 2, \dots$, являются координатами Дарбу в $\mathcal{M}$. Во-вторых, условия (20) тождественно удовлетворяются в рамках анзаца $J_{ik}(u) = \partial u_k / \partial x_i$, а алгебраические связи (25) переходят в систему квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{1}{n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} &= 0, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_m} - \frac{1}{n} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{1}{k} u_{m-k-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} u_{n-k-1} \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

(здесь $n, m = 1, 2, \dots$). Эта система уравнений совпадает с системой, полученной в работе [30] другим способом. В отмеченной работе показано, что система (29) эквивалентна иерархии БКП. Благодаря этому факту мы получаем альтернативное доказательство предложения 1.

Итак, имеем

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Система уравнений (26), (25), представленная в координатах Дарбу, которая характеризует структуру Пуассона для семейства идеалов $I(\Gamma_\infty)$, эквивалентна иерархии БКП, причем $u_1, u_2, \dots$ и $x_1, x_2, \dots$ играют роль зависимых и независимых переменных соответственно. Наборы переменных (p_k^*, u_k) и (p_k^*, x_k) играют дуальные роли в описании семейств идеалов $I(\Gamma_\infty)$. Первый набор является каноническим с алгебраической точки зрения, а второй – каноническим в рамках интерпретации семейства идеалов $I(\Gamma_\infty)$ как пуассонова идеала. В силу формул (25), (28) связь между этими двумя наборами переменных определяется решениями иерархии БКП.

Это замечание указывает на глубокую взаимосвязь между теорией пуассоновых идеалов для семейств алгебраических кривых в грассманиане Сато и теорией интегрируемых иерархий, а также на роль преобразований Дарбу в этой взаимосвязи. Переменные $x_k, k = 1, 2, \dots$, в рамках такого подхода являются параметрами деформации. Их можно считать локальными координатами бесконечномерного базового пространства для коизотропных деформаций ассоциативной алгебры (1).

Координаты Дарбу использовались в работе [15] при изучении коизотропных деформаций соотношений (1), (2), которые рассматривались как уравнения, определяющие структурные константы ассоциативных алгебр. В работе [15] показано, что для бесконечномерной алгебры полиномов в базисе Фаа ди Бруно, для которой структурные константы C_{jk}^l представлены выражениями (11), условие коизотропности (21) аналогично условиям ассоциативности (12) в сочетании с условиями точности

$$\frac{\partial H_n^i}{\partial x_l} = \frac{\partial H_n^l}{\partial x_i}, \quad i, l, n = 1, 2, \dots$$

Из этих условий вместе с алгебраическими соотношениями $nH_n^i = iH_i^n$ следует [15] существование такой функции F , что

$$H_m^i = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_m}.$$

Условия ассоциативности (12), в которых H_k^i имеют такой вид, эквивалентны знаменитому билинейному уравнению Хироты–Мивы (17). Этот результат еще раз указывает на важность координат Дарбу во всем нашем подходе. В следующей статье мы проведем подробный анализ структур Пуассона для идеалов семейств алгебраических кривых в стратах Биркгофа, а также изучим их связь с иерархией интегрируемых уравнений.

Здесь мы приведем поясняющий пример. В подрасслоении TB_{W_1} существует идеал

$$I(\Gamma_\infty^1) = \langle \mathcal{F}_{23}^1, h_4^{(1)}, h_5^{(1)}, \dots \rangle, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{23}^1 &= (p_3)^2 - (p_2)^3 - \mu_4 p_2 p_3 - \mu_3 (p_2)^2 - \mu_2 p_3 - \mu_2 p_2 - \mu_0, \\ h_4^{(1)} &= p_4 - (p_2)^2 - v_2 p_3 - v_1 p_2 - v_0\end{aligned}$$

и т. д. (см. работу [1]).

Если потребовать, чтобы семейство идеалов (30) было пуассоновым идеалом, то мы получим бесконечную иерархию систем уравнений в частных производных. Простейшая из них, эквивалентная условию $\{\mathcal{F}_{23}^1, h_4^{(1)}\}|_{\Gamma_\infty} = 0$ с канонической скобкой Пуассона, представлена следующей системой (см. также работу [29]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_4}{\partial x_4} &= -\frac{2}{3} \frac{\partial \mu_2 \mu_3}{\partial x_2} - \frac{5}{9} \mu_4^2 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_2} + \frac{4}{9} \mu_4 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_3} + 2 \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} + \frac{4}{3} \frac{\partial \mu_3}{\partial x_3} + \\ &+ \frac{4}{9} \frac{\partial \mu_4}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial \mu_4}{\partial x_3} + \frac{8}{9} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \mu_4}{\partial x_3^2}, \\ \frac{\partial \mu_3}{\partial x_4} &= -\frac{2}{3} \mu_4 \mu_3 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_2} + v_1 \frac{\partial \mu_3}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} - 3 \frac{\partial v_0}{\partial x_2} - 2 \mu_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \\ &+ \frac{2}{3} \mu_4 \frac{\partial \mu_3}{\partial x_3} - \mu_4 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{4}{3} \mu_3 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial x_4} &= -\frac{2}{3} \mu_4 \mu_2 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x_3} + v_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} - \mu_4 \frac{\partial v_0}{\partial x_2} - \frac{2}{3} \mu_1 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_2} + \frac{2}{3} \mu_4 \frac{\partial \mu_2}{\partial x_3} + \frac{2}{3} \mu_2 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial x_4} &= -\frac{2}{3} \mu_4 \mu_1 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_2} + v_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} - 2 \mu_3 \frac{\partial v_0}{\partial x_2} - \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \\ &+ \frac{2}{3} \mu_4 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_3} - \mu_4 \frac{\partial v_0}{\partial x_3} - \mu_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{4}{3} \mu_1 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \mu_0}{\partial x_4} &= v_1 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_2} - \mu_1 \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{2}{3} \mu_4 \frac{\partial \mu_0}{\partial x_3} - \mu_2 \frac{\partial v_0}{\partial x_3} - \frac{2}{3} \mu_4 \mu_0 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_2} + \frac{4}{3} \mu_0 \frac{\partial \mu_4}{\partial x_3},\end{aligned}$$

где

$$v_1 = \frac{2}{3} \mu_3 - \frac{2}{9} \mu_4^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial \mu_4}{\partial x_3},$$

а параметр v_0 связан с калибровочной свободой системы.

Условие коизотропности (21) для страты $\Sigma_{1,2}$ представляет собой довольно большую систему уравнений. Например, условие $\{\mathcal{C}_8, \mathcal{C}_9\}|_{\Gamma_\infty} = 0$ со скобкой Пуассона в координатах Дарбу $(p_3, p_4, \dots, x_3, x_4, \dots)$ и циклической переменной x_3 эквивалентно системе

$$\partial_{x_4} H_i^5 = \partial_{x_5} H_i^4, \quad i = 1, 2, 4, 5,$$

где

$$\begin{aligned}H_4^4 &= 3U_{x_4} U_{x_5} V_{x_4} - 2U_{x_4} (V_{x_4})^2 - H_2^4 U_{x_4} - 2(U_{x_4})^2 V_{x_5} - U_{x_4} (U_{x_5})^2 + (U_{x_4})^4 - \\ &- H_1^4 U_{x_5} + (V_{x_5})^2 + V_{x_4} H_1^4, \\ H_5^4 &= 2H_2^4 V_{x_4} - 6U_{x_5} (V_{x_4})^2 + 5V_{x_4} (U_{x_5})^2 - \frac{5}{3} V_{x_4} (U_{x_4})^3 - 2U_{x_5} H_2^4 + \frac{4}{3} U_{x_5} (U_{x_4})^3 - \\ &- H_1^4 V_{x_5} + 3V_{x_4} U_{x_4} V_{x_5} - 2U_{x_5} U_{x_4} V_{x_5} + \frac{7}{3} (V_{x_4})^3 - \frac{4}{3} (U_{x_5})^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1^5 &= (V_{x_4})^2 + 2H_2^4 + U_{x_4}V_{x_5} - 2U_{x_5}V_{x_4} + (U_{x_5})^2 - (U_{x_4})^3, \\
H_2^5 &= 2H_1^4U_{x_4} - V_{x_5}V_{x_4} + V_{x_5}U_{x_5} - V_{x_4}(U_{x_4})^2, \\
H_4^5 &= 2H_2^4V_{x_4} - 7U_{x_5}(V_{x_4})^2 + 6V_{x_4}(U_{x_5})^2 - \frac{4}{3}V_{x_4}(U_{x_4})^3 - 2U_{x_5}H_2^4 + \frac{5}{3}U_{x_5}(U_{x_4})^3 - \\
&\quad - H_1^4V_{x_5} + 4V_{x_4}U_{x_4}V_{x_5} - 3U_{x_5}U_{x_4}V_{x_5} + \frac{8}{3}(V_{x_4})^3 - \frac{5}{3}(U_{x_5})^3 - H_1^4(U_{x_4})^2, \\
H_5^5 &= 5U_{x_5}V_{x_4}(U_{x_4})^2 - 2(V_{x_4})^2(U_{x_4})^2 - 3H_2^4(U_{x_4})^2 - 4(U_{x_4})^3V_{x_5} - 2(U_{x_4})^2(U_{x_5})^2 + \\
&\quad + 2(U_{x_4})^5 + 2U_{x_4}(V_{x_5})^2 - 2V_{x_4}H_1^4U_{x_4} + (H_1^4)^2 + \\
&\quad + 2V_{x_5}(V_{x_4})^2 - 3V_{x_4}V_{x_5}U_{x_5} + V_{x_5}(U_{x_5})^2 + H_2^4V_{x_5},
\end{aligned}$$

а также

$$\partial_{x_4}H_{-2}^5 = \partial_{x_5}H_{-2}^4 := \partial_{x_4}\partial_{x_5}U, \quad \partial_{x_4}H_{-1}^5 = \partial_{x_5}H_{-1}^4 := \partial_{x_4}\partial_{x_5}V.$$

Наконец, потребовав, чтобы семейство идеалов $I^2(\Gamma_\infty^2)$ для гиперэллиптических кривых было пуассоновым идеалом по отношению к канонической скобке Пуассона, мы получим бесконечную иерархию систем гидродинамического типа, эквивалентную иерархии, построенной в работе [26].

Благодарности. Автор выражает признательность Марко Педрони и Андреа Превитали за многочисленные плодотворные обсуждения. Автор также благодарит рецензентов за полезные предложения. Работа получила частичную поддержку PRIN (гранты № 28002K9KXZ и FAR 2009 (Sistemi dinamici Integrabili e Interazioni fra campi e particelle)) университета Milano Bicocca.

Список литературы

- [1] B. G. Konopelchenko, G. Ortenzi, *Birkhoff strata of Sato Grassmannian and algebraic curves*, arXiv: 1005.2053.
- [2] B. G. Konopelchenko, G. Ortenzi, *J. Phys. A*, **44**:46 (2011), 465201, 31 pp., arXiv: 1102.0700.
- [3] Б. Г. Конопельченко, Дж. Ортенци, *ТМФ*, **167**:3 (2011), 448–464.
- [4] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.
- [5] G. Segal, G. Wilson, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **61** (1985), 5–65.
- [6] В. Ходж, Д. Пидо, *Методы алгебраической геометрии*, т. 1, ИЛ, М., 1954.
- [7] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Наука, М., 1988.
- [8] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982.
- [9] Дж. Харрис, *Алгебраическая геометрия. Начальный курс*, МЦНМО, М., 2005.
- [10] В. Е. Захаров, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:2 (1980), 15–24.
- [11] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 37–52.
- [12] Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **129**:4 (1988), 223–226.
- [13] K. Takasaki, T. Takebe, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**, suppl. 1B (1992), 889–922, arXiv: hep-th/9112046.
- [14] I. M. Krichever, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [15] B. G. Konopelchenko, F. Magri, *Commun. Math. Phys.*, **274**:3 (2007), 627–658, arXiv: nlin/0606069.
- [16] G. Hochschild, *Ann. Math. (2)*, **46**:1 (1945), 58–67.
- [17] D. K. Harrison, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **104** (1962), 191–204.

- [18] M. Gerstenhaber, *Ann. Math.* (2), **79**:1 (1964), 59–103.
- [19] A. Nijenhuis, R. W. Richardson Jr., *J. Algebra*, **9**:1 (1968), 42–53.
- [20] M. Barr, *J. Algebra*, **8**:3 (1968), 314–323.
- [21] В. П. Паламо́дов, *УМН*, **31**:3(189) (1976), 129–194.
- [22] M. Schlessinger, J. Stasheff, *J. Pure Appl. Algebra*, **38**:2–3 (1985), 313–322.
- [23] S. Gutt, *Lett. Math. Phys.*, **39**:2 (1997), 157–162.
- [24] M. Kontsevich, *Lett. Math. Phys.*, **56**:3 (2001), 271–294.
- [25] C. Frønsdal, “Harrison cohomology and abelian deformation quantization on algebraic varieties”, *Deformation Quantization*, v. 1 (Strasbourg, May 31 – June 2, 2001), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, ed. G. Halbout, de Gruyter, Berlin, 2002, 149–161.
- [26] Y. Kodama, B. G. Konopelchenko, *J. Phys. A*, **35**:31 (2002), L489–L500.
- [27] A. Weinstein, *J. Math. Soc. Japan*, **40**:4 (1988), 705–727.
- [28] A. Givental, K. Bumsig, *Commun. Math. Phys.*, **168**:3 (1995), 609–641, arXiv: hep-th/9312096.
- [29] B. G. Konopelchenko, G. Ortenzi, *J. Phys. A*, **42**:41 (2009), 415207, 18 pp.
- [30] Б. Г. Конопельченко, Ф. Магри, *ТМФ*, **151**:3 (2007), 439–457.

Поступила в редакцию 7.05.2013