Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Павлов, Дифференциально-геометрические аспекты неголономной механики Дирака: уроки квадратичной по скоростям модели, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 3, 403–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:58:36

© 2014 г.

В. П. Павлов*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ ДИРАКА: УРОКИ КВАДРАТИЧНОЙ ПО СКОРОСТЯМ МОДЕЛИ

Л. Д. Фаддеев и А. М. Вершик предложили инвариантное с точки зрения дифференциальной геометрии описание механики со связями в гамильтоновой и лагранжевой ее формулировках. В обеих формулировках описание базируется на заданной на кокасательном расслоении T^*Q (в гамильтоновой формулировке) или на касательном расслоении TQ (в лагранжевой формулировке) невырожденной симплектической 2-форме, а связям отвечают находящиеся в инволюции наборы функций на этих многообразиях. Показано, что этой техники недостаточно для “инвариантизации” дираковой процедуры “размножения” связей. Сделано это на примере типичной квантово-полевой ситуации, когда изначальная функция Лагранжа есть квадратичная форма по скоростям с вырожденной матрицей коэффициентов. Изначальным фазовым пространством предлагается считать многообразие, где “живут” все аргументы функционала действия, включая множители Лагранжа. При этом множители Лагранжа получают естественную физическую интерпретацию как скорости (в гамильтоновой формулировке) или импульсы (в лагранжевой формулировке), относящиеся к “нефизическим” степеням свободы. Инвариантным образом определенная на таком многообразии квазисимплектическая 2-форма оказывается вырожденной. Предложены новые дифференциально-геометрические структуры, позволяющие сформулировать процедуру Дирака на инвариантном языке.

Ключевые слова: неголономная механика Дирака, размножение связей, дифференциальная геометрия.

DOI: 10.4231/tmf8548

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической работе Фаддеева [1] убедительно продемонстрирована польза и необходимость инвариантного языка дифференциальной геометрии (в терминах дифференциальных форм и векторных полей на гладком многообразии) для неголономной механики (механики с неголономными связями, зависящими, в отличие

---

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: pavlov@mi.ras.ru

от геометрических, не только от координат, но и от скоростей или импульсов). Исходной в указанной работе была гамильтонова форма механики; начинать с нее оказалось удобным просто потому, что на кокасательном расслоении T^*Q конфигурационного пространства (где “живут” координаты q^i и импульсы p_i изучаемой системы) естественным образом возникает симплектическая структура [2], задаваемая замкнутой и невырожденной 2-формой $\omega_H^2 = dp_i \wedge dq^i$. При этом симплектическая структура не зависит от динамики системы. В работе [1] изучается ситуация, в которой имеются только связи первого рода: на T^*Q задаются функция Гамильтона H и связи φ_μ , находящиеся в инволюции, т. е. скобки Пуассона связей между собой и с функцией Гамильтона равны нулю на поверхности связей $M = \{\varphi_\mu = 0\}$:

$$\{\varphi_\mu, \varphi_\nu\} = c_{\mu\nu}^\sigma \varphi_\sigma, \quad \{H, \varphi_\mu\} = c_\mu^\nu \varphi_\nu. \quad (1)$$

Уравнения движения получаются из принципа Гамильтона с действием

$$S[q, p, \lambda] = \int_{t_1}^{t_2} (-H - \lambda^\mu \varphi_\mu + p_i \dot{q}^i) dt,$$

где 1-форму $\omega_H^1 = p_i \dot{q}^i dt = p_i dq^i$ называют формой Картана–Лиувилля, 2-форма $\omega_H^2 = d\omega_H^1$ есть ее внешняя производная, а $\lambda^\mu = \lambda^\mu(t)$ – множители Лагранжа, остающиеся произвольными. Уравнения движения для заданной на T^*Q функции f имеют вид

$$\dot{f}(q, p) = \{H, f\} + \lambda^\mu \{\varphi_\mu, f\}, \quad \varphi_\mu = 0.$$

Благодаря соотношениям (1) условия $\varphi_\mu = 0$ выполнены при произвольных функциях $\lambda^\mu(t)$, если они выполнены для начальных данных, и траектория, начавшаяся на поверхности связей, не покидает ее.

Наблюдаемыми величинами считаются не все функции на поверхности связей M , а только те, эволюция которых во времени не зависит от произвола в выборе $\lambda^\mu(t)$. Очевидно, таковыми будут функции, для которых их скобки Пуассона со связями выражаются через связи:

$$\{f, \varphi_\mu\} = d_\mu^\nu \varphi_\nu.$$

Итак, эволюция системы со связями происходит не во всем T^*Q , а как минимум на поверхности связей M . Естественно, хотелось бы ввести на соответствующем подмногообразии симплектическую структуру. Фаддеев замечает, что ограничение $\omega_H^2|_M$ на M исходной 2-формы ω_H^2 замкнуто, но вырожденно: ее нулевыми векторами являются векторные поля $X_{d\varphi_\mu}$, отвечающие в T^*Q дифференциалам связей (благодаря невырожденности формы ω_H на T^*Q такое соответствие взаимно однозначно). Вследствие инволютивности связей совокупность нулевых векторов представляет собой инволютивное распределение на M и порождает его слоение. Далее налагается требование, чтобы это слоение было расслоением и показано, что ограничение $\omega_H^* = \omega_H|_B$ на базу B этого расслоения есть замкнутая и невырожденная 2-форма. В работе [1] построены в явном виде канонические переменные q^{*a}, p_a^* на B , в которых 2-форма ω_H^* имеет вид $\omega_H^* = dp_a^* \wedge dq^{*a}$. Наблюдаемые величины в итоге представляют собой функции на “настоящем” фазовом пространстве B , а уравнения движения для них – обычные уравнения Гамильтона.

Язык дифференциальной геометрии инвариантный и не зависит от конкретного выбора динамических переменных, фиксирующих состояние системы. Возникает естественная потребность дать на таком языке лагранжеву формулировку механики, в которой состояние системы фиксируется координатами q^i и скоростями v^i , “живущими” на касательном расслоении TQ конфигурационного пространства. Конечно, лагранжева механика рассматривается при этом в формализме первого порядка, в котором q^i и v^i являются независимыми функциональными аргументами действия. Применительно к системам со связями эта задача была решена Вершиком и Фаддеевым в работах [3], [4] (детальное изложение дано Вершиком в работе [5]).

В отличие от гамильтоновой формулировки, симплектическая структура на TQ зависит от динамики, точнее от фиксирующей систему функции Лагранжа $L(q, v)$. Конструкция Вершика–Фаддеева для системы без связей формулируется следующим образом.

Пусть $\pi: TQ \rightarrow Q$ – естественная проекция касательного расслоения. Поскольку слой $\pi^{-1}q = T_q$ есть $\mathbb{R}^n$, координаты v^i его точек являются координатами касательных векторов

$$X_q = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in T_q$$

в базисе $\partial/\partial q^i$. Рассмотрим второе касательное расслоение $T(TQ)$ с естественной проекцией $d\pi: T(TQ) \rightarrow TQ$. Координатам точек его слоев $(d\pi)^{-1}(q, v) = T_{q,v}$ отвечают касательные векторы

$$X_{q,v} = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

В каждом слое $T_{q,v}$ благодаря структуре касательного расслоения TQ выделено вложенное в него подпространство $\tilde{T}_{q,v}$ вертикальных векторов, касательных к слоям T_q . Имея размерность n , оно изоморфно T_q . Поэтому имеется естественное вложение $j: T_q \rightarrow T_{q,v}$, отождествляющие координаты a^i вертикальных касательных векторов из $T_{q,v}$ с координатами v^i касательных векторов из T_q . Обозначим символом β композицию $\beta = j \circ d\pi$ второго касательного расслоения и естественной проекции описанного вложения, а символом $\gamma = d\beta$ – ее дифференциал; γ – это $(1, 1)$ -тензор в $T(TQ)$, имеющий в локальных координатах (q, v) вид $\gamma = (\partial/\partial v^i) \otimes dq^i$ и действующий в них по правилу

$$\gamma \left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \right) = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Дуальный тензор γ^* действует на 1-формы на TQ ; в локальных координатах

$$\gamma^*(a_i dq^i + b_i dv^i) = b_i dq^i.$$

Помимо тензора γ , полезно ввести на $T(TQ)$ еще один инвариантный объект – фундаментальное векторное поле (в терминологии Вершика–Фаддеева), или поле Лиувилля (в терминологии Годбийона [6]) $\Delta = j(X_q)$; в локальных координатах $\Delta = v^i \partial/\partial v^i$ есть генератор дилатаций в вертикальных в смысле касательного расслоения направлениях.

Поскольку по теореме Нётер

$$L(q, v) - \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i = -E,$$

где E – энергия механической системы (без связей), лагранжево действие можно записать в виде

$$S[q, v] = \int_{t_1}^{t_2} \left(-E dt + \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i \right). \quad (2)$$

Теперь в инвариантных терминах энергия записывается как $\Delta L - L$, а лагранжев вариант формы Картана–Лиувилля – как

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i = \omega_L^1 = \gamma^* dL.$$

В инвариантном виде действие (2) принимает вид

$$S[c, F] = \int_c F^* \phi_L, \quad \phi_L = -E dt + \omega_L^1,$$

где F – отображение отрезка $[t_1, t_2]$ в траекторию $c \in TQ \times \mathbb{R}^1$, а симплектическая структура в TQ задается 2-формой $\omega_L^2 = d\omega_L^1$. В локальных координатах

$$\begin{aligned} \omega_L^2 &= \Gamma_{ij} dq^i \wedge dv^j + \frac{1}{2} \ell_{ij} dq^i \wedge dq^j, \\ \Gamma_{ij} &= \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}, \quad \ell_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом отвечающее дифференциалу функции $f(q, v)$ на TQ векторное поле записывается как

$$X_{df} = \frac{\partial f}{\partial v^i} \Gamma^{ij} \ell_{jk} \Gamma^{kl} \frac{\partial}{\partial v^l} + \frac{\partial f}{\partial v^i} \Gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \Gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial v^j}, \quad (4)$$

где (Γ^{kl}) – матрица, обратная к (Γ_{kl}) , а скобка Пуассона на TQ имеет вид

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial v^i} \Gamma^{ij} \ell_{jk} \Gamma^{kl} \frac{\partial g}{\partial v^l} + \frac{\partial f}{\partial v^i} \Gamma^{ij} \frac{\partial g}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \Gamma^{ij} \frac{\partial g}{\partial v^j}. \quad (5)$$

Естественно, инвариантный вид уравнений Эйлера–Лагранжа получается из общей формулы для производной по времени в силу уравнений движения для функций на TQ , которая по форме совпадает с “гамильтоновой” формулой:

$$\dot{g} = X_{dE} g = \{E, g\}. \quad (6)$$

Подчеркнем, что вся эта конструкция требует невырожденности матрицы Гессе $(\Gamma_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \right)$: только тогда лагранжева симплектическая форма (3) невырождена и справедливы соотношения (4)–(6).

В инвариантную формулировку лагранжевой механики связи по аналогии с гамильтоновой формулировкой вводится набор функций $\varphi_\mu = \varphi_\mu(q, v)$ таких, что отвечающие им векторные поля $X_{d\varphi_\mu}$ на TQ образуют инволютивное распределение. В работах [3]–[5] показано, что этому требованию удовлетворяют связи, являющиеся однородными функциями скоростей. Наиболее подробно разобран случай линейных по скоростям связей (в большинстве задач классической механики со связями это действительно имеет место).

Следует заметить, что описанная выше конструкция не дает инвариантного описания неголономной механики Дирака во всех ее деталях. Сам Дирак [7] стартовал с принципа наименьшего действия, которое записано в лагранжевой форме:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt.$$

Эта (а не гамильтонова) форма была выбрана потому, что в ней проще формулируются требования симметрии (релятивистской и пр.), фиксирующие вид функции Лагранжа L в задачах теории поля. Однако в этих задачах типична ситуация (например, в калибровочных теориях), когда матрица Гессе вырождена изначально. Поэтому пришлось построить обобщение гамильтонова формализма для данного случая. Уравнения связей возникают при этом как уравнения Эйлера–Лагранжа, не содержащие производных. Дирак обнаружил, что из условий разрешимости (совместности) обобщенных уравнений Гамильтона могут возникнуть новые уравнения связей (вообще говоря, имеет место “размножение” связей).

Полную совокупность связей Дирак разбил на две группы. Скобки Пуассона связей первого рода друг с другом и с функцией Гамильтона являются линейными комбинациями (всех!) связей. Для связей второго рода матрица их скобок Пуассона невырождена всюду в фазовом пространстве. Это обстоятельство позволило Дираку ввести на фазовом пространстве новую пуассонову структуру – ее называют *скобкой Дирака*. В работе [7] показано, что в присутствии связей второго рода обобщенные уравнения Гамильтона формулируются в терминах этой новой скобки.

В рамках конструкций Фаддеева и Вершика–Фаддеева вряд ли возможно инвариантное описание процедуры размножения связей и скобки Дирака. В нашей работе [8] предложено обобщение конструкций, которое позволяет это сделать. Идея обобщения состоит в том, чтобы считать фазовым пространством в механике Дирака не просто кокасательное расслоение T^*Q из гамильтоновой формулировки либо касательное расслоение TQ из лагранжевой формулировки, а все множество Γ , в котором “живут” функциональные аргументы действия, включая множители Лагранжа. Сами множители Лагранжа получают при этом естественную интерпретацию [9]: при преобразованиях локальных симметрий (если они есть) множители Лагранжа ведут себя как скорости, которые вследствие вырожденности гессиана не удастся выразить через импульсы при преобразовании Лежандра. Помимо этого, в явном виде демонстрируется ожидаемое взаимно однозначное соответствие между объектами лагранжевой и гамильтоновой формулировок механики Дирака.

Целью настоящей работы является иллюстрация предложенного обобщения конструкций Фаддеева и Вершика–Фаддеева на поучительном примере системы, у которой функция Лагранжа представляет собой вырожденную квадратичную форму по скоростям. Общая ситуация подробно изложена в лекциях [10].

2. КВАДРАТИЧНАЯ МОДЕЛЬ

Модель задается функцией Лагранжа

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ik}(q) \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad i, k \in N = \{1, 2, \dots, n\},$$

у которой матрица Гессе (g_{ik}) зависит только от координат q , имеет постоянный ранг и вырожденна. В формализме второго порядка уравнения Эйлера–Лагранжа получаются из требования минимальности действия

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (7)$$

Уже для перехода к формализму первого порядка действие (7) требует нетривиальной модификации.

Разобьем совокупность индексов N на два непересекающихся поднабора $\overset{0}{A}$ и $\overset{0}{M}$ (при этом будем считать, что $a, b, \dots \in \overset{0}{A}$ и $\mu, \nu, \dots \in \overset{0}{M}$) так, чтобы g_{ab} были коэффициентами невырожденного минора максимального ранга матрицы (g_{ik}) . Уравнения движения, эквивалентные вытекающим из исходного действия (7), в формализме первого порядка получаются теперь из модифицированного действия

$$\widehat{S}[q, v, \check{p}] = \int_{t_1}^{t_2} (-E_L + g_{ai} v^i \dot{q}^a + p_\mu \dot{q}^\mu) dt, \quad (8)$$

где $\check{p} = (p_1, \dots, p_m)$ – набор множителей Лагранжа, вариации по которым обеспечивают уравнения движения $\dot{q}^\mu = v^\mu$, нётерова энергия есть

$$E_L = E_0 + v^\mu \overset{0}{\varphi}_\mu^L, \quad E_0 = -L + \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i = \frac{1}{2} g_{ik}(q) v^i v^k, \quad (9)$$

а первичные лагранжевы связи суть

$$\overset{0}{\varphi}_\mu^L = p_\mu - g_{\mu i} v^i = Y_\mu^L E_L, \quad Y_\mu^L = b_\mu^i \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad (10)$$

где $b_\mu^i = \delta_\mu^i - \delta_a^i g^{ab} g_{b\mu}$ – нулевые векторы оператора, отвечающего матрице Гессе (g_{ik}) . Член E_0 в (9) выделен потому, что именно он дает при отображении Лежандра каноническую функцию Гамильтона (см. ниже формулу (15)). Запишем уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (8) в виде, разрешенном относительно производных по времени:

$$\dot{q}^i = v^i, \quad \dot{v}^a = g^{ab} \left(\frac{\partial L}{\partial q^b} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial q^i} v^i - \Gamma_{b\mu} v^\mu \right), \quad \dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q^\mu}, \quad (11)$$

$$p_\mu - \frac{\partial L}{\partial v^\mu} = p_\mu - g_{\mu i} v^i = 0. \quad (12)$$

В отличие от невырожденного случая, дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа (11) не позволяют выразить $\dot{v}^\mu$ через (q, v) (то же самое имеет место и для некоторых ускорений в случае уравнений Эйлера–Лагранжа формализма второго

порядка), в результате скорости v^μ остаются неопределенными (если не использовать условия совместности, см. ниже). Уравнения (12) не содержат производных по времени. В соответствии с терминологией Дирака их следует считать уравнениями связей. Выше в формуле (10) левые части уравнений (12) мы называли первичными лагранжевыми связями φ_μ^L .

Два последних члена в действии (8) выступают как обобщение на вырожденный случай лагранжевой формы Картана–Лиувилля $\omega_L^1 = g_{ab}v^b dq^a + p_\mu dq^\mu$. По аналогии с невырожденным случаем возьмем ее внешнюю производную

$$\omega_L^2 = d\omega_L^1 = g_{ai} dv^i \wedge dq^a + v^k \frac{\partial g_{ka}}{\partial q^i} dq^i \wedge dq^a + dp_\mu \wedge dq^\mu \quad (13)$$

в качестве квазисимплектической формы на фазовом пространстве нашей модели (напомним, что здесь мы считаем фазовым пространством все множество, где “живут” функциональные аргументы действия (8)). Термин “квазисимплектическая” мы употребляем в знак того, что 2-форма (13) вырождена: ее нулевыми векторами являются векторные поля Y_μ^L , определенные в (10). Вырожденность приводит к тому, что теряется взаимная однозначность соответствия между 1-формами и векторными полями, имеющаяся в симплектической геометрии. В этой ситуации остается лишь описать произвол в остающемся соответствии.

Введем проектор $\mathbf{k}$ векторных полей X на ядро $\ker \omega^2$ вырожденной 2-формы (13),

$$X \rightarrow \mathbf{k}X \in \ker \omega^2, \quad \mathbf{k}^2 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}^* \alpha(X) = \alpha(\mathbf{k}X),$$

и положим $\mathbf{P} = 1 - \mathbf{k}$. В лагранжевых локальных координатах проектор $\mathbf{k}$ имеет вид $\mathbf{k} = Y_\mu^L \times dv^\mu$, а для векторного поля общего вида

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial v^i} + c_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}$$

мы имеем

$$\mathbf{k}X = b^\mu b_\mu^i \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad \mathbf{P}X = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \tilde{b}_i^a \frac{\partial}{\partial v^a} + c_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu},$$

где, напомним, $b_\mu^i = \delta_\mu^i - \delta_a^i g^{ab} g_{b\mu}$ – нулевые векторы оператора, отвечающего матрице Гессе (g_{ik}) , а $\tilde{b}_i^a = \delta_i^a + \delta_i^\mu g_{\mu b} g^{ba}$ – ортогональные к ним объекты, $\tilde{b}_i^a b_\mu^i = 0$. Аналогично, для 1-форм общего вида $\alpha = a_i dq^i + b_i dv^i + c^\mu dp_\mu$ имеем

$$\mathbf{k}^* \alpha = b_i b_\mu^i dv^\mu, \quad \mathbf{P}^* \alpha = a_i dq^i + b_a \tilde{b}_i^a dv^i + c^\mu dp_\mu.$$

Обобщение связи $i_{X_\alpha} \omega^2 = -\alpha$, имеющей место в невырожденном случае, возьмем в виде $i_{X_\alpha} \omega^2 = -\mathbf{P}^* \alpha$, так что дифференциалу df функции на фазовом пространстве отвечает векторное поле со стандартной компонентой $\mathbf{P}X_{df}$; в локальных координатах лагранжевой формулировки можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{P}X_{df} = & \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial f}{\partial v^b} \Gamma^{ba} \frac{\partial}{\partial q^a} - \left(\frac{\partial f}{\partial q^a} + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial^2 L}{\partial q^\mu \partial v^a} \right) \Gamma^{ab} \frac{\partial}{\partial v^b} + \\ & + \frac{\partial f}{\partial v^a} \Gamma^{ac} l_{cd} \Gamma^{db} \frac{\partial}{\partial v^b} + \left(-\frac{\partial f}{\partial q^\mu} + \frac{\partial f}{\partial v^c} \Gamma^{ca} \frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial q^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial p_\mu}. \end{aligned}$$

Скобки Пуассона определяются прежней формулой $\{f, g\} = \omega^2(X_{df}, X_{dg})$, однако теперь фактическими аргументами 2-формы оказываются стандартные составляющие векторных полей:

$$\{f, g\} = \omega^2(X_{df}, X_{dg}) = \omega^2(\mathbf{P}X_{df}, \mathbf{P}X_{dg}) = \mathbf{P}X_{df}g = -\mathbf{P}X_{dg}f,$$

а производная по времени в силу уравнений движения для функции f на лагранжевом фазовом пространстве Γ_L имеет вид

$$\dot{f} = \{E_0, f\} + v^\mu \{\varphi_\mu^L, f\} + \dot{v}^\mu Y_\mu f = \mathbf{P}X_{dE_0}f + v^\mu \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^L}f + \dot{v}^\mu Y_\mu f, \quad (14)$$

где слагаемые, принадлежащие ядру лагранжевой 2-формы (13), отсутствуют у векторных полей

$$\begin{aligned} \mathbf{P}X_{dE_0} &= v^i g_i^a \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial E_0}{\partial q^a} g^{ab} \frac{\partial}{\partial v^b} + v^i g_i^a v^k \left(\frac{\partial g_{ka}}{\partial q^c} - \frac{\partial g_{kc}}{\partial q^a} \right) g^{cb} \frac{\partial}{\partial v^b} + \\ &+ \left(-\frac{\partial E_0}{\partial q^\mu} + v^i g_i^a v^k \frac{\partial g_{ka}}{\partial q^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial p_\mu}, \\ \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^L} &= b_\mu^i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} + v^k \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ka}}{\partial q^i} \right) g^{ab} \frac{\partial}{\partial v^b} + v^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right). \end{aligned}$$

Дирак заметил, что условием совместности уравнений движения (11) и уравнений связей (12) является требование, чтобы правая часть соотношения (14) для первичных связей φ_ν^L обращалась в ноль на поверхности первичных связей:

$$\left. \frac{d\varphi_\nu^L}{dt} \right|_M = (\{E_0, \varphi_\nu^L\} + v^\mu \{\varphi_\mu^L, \varphi_\nu^L\} + \dot{v}^\mu Y_\mu \varphi_\nu^L)|_M = c_{\nu\mu} \varphi_\mu^L. \quad (15)$$

Прямые вычисления дают

$$\{E_0, \varphi_\nu^L\} = b_\nu^i \left(-\frac{\partial E_0}{\partial q^i} + \ell_{ja} g_i^a v^j \right), \quad (16)$$

где (ср. с (3))

$$\ell_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i} = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) v^k. \quad (17)$$

Мы видим, что правая часть выражения (16) *квадратична* по скоростям.

Далее,

$$\{\varphi_\mu^L, \varphi_\nu^L\} = \gamma_{\mu\nu}^L = \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^L} \varphi_\nu^L = b_\mu^i b_\nu^j \ell_{ij} = b_\mu^i b_\nu^j \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) v^k = c_{\mu\nu k}(q) v^k. \quad (18)$$

Мы видим, что правая часть этого соотношения *линейна* по скоростям.

Здесь полезно заметить следующее. С учетом того что b_μ^i являются нулевыми векторами оператора, отвечающего матрице Гессе (g_{ik}) , используя правила Лейбница для производной произведения, мы можем преобразовать коэффициенты $c_{\mu\nu k}(q)$ в правой части формулы (18) к виду

$$c_{\mu\nu k}(q) = b_\mu^i b_\nu^j \left(\frac{\partial g_{ib}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jb}}{\partial q^i} \right) g^{ba} g_{bk}.$$

Этот вид удобен для сравнения с гамильтоновым аналогом (26) формулы (18).

Наконец, последний член суммы в круглых скобках в выражении (15) обращается в ноль, поскольку $Y_\mu \varphi_\nu^L = -b_\mu^i g_{i\nu} = 0$ (напомним, что b_μ^i – нулевые векторы оператора, отвечающего матрице Гессе (g_{ik})).

Заметим, что вычисленная нами левая часть условия совместности (15) не зависит от импульсов p_μ , а в первичные связи они входят как слагаемые. Поэтому в правой части условия (15) фактически стоит ноль, т. е. оно должно выполняться не только на поверхности связей, но и во всем фазовом пространстве:

$$\{E_0, \varphi_\nu^L\} + v^\mu \gamma_{\mu\nu}^L = 0. \quad (19)$$

Предположим теперь, что матрица $(\gamma_{\mu\nu}^L)$ вырождена (причем ее ранг постоянен на Γ) и $\gamma_{\alpha\beta}^0$ – коэффициенты невырожденного минора максимального ранга этой матрицы, а $\beta_{\mu'}^\mu = \delta_{\mu'}^\mu - \delta_\alpha^\mu \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\mu'}^0$ – нулевые векторы отвечающего матрице $(\gamma_{\mu\nu}^L)$ оператора; здесь мы разбили совокупность индексов $\mu \in \overset{0}{M}$ на два непересекающихся поднабора $\overset{1}{A}$ и $\overset{1}{M}$ (при этом $\alpha, \beta, \dots \in \overset{1}{A}$ и $\mu', \nu', \dots \in \overset{1}{M}$). Нетрудно установить, что нулевые векторы являются однородными степени ноль функциями скоростей: в них фигурируют слагаемые, представляющие собой отношение двух однородных форм по скоростям одинаковой степени.

Домножив на нулевые векторы условие совместности (19), мы получаем уравнения вторичных связей

$$\varphi_{\nu'}^L = \beta_{\nu'}^\nu \{E_0, \varphi_\nu^L\} = 0. \quad (20)$$

Формулы (16), (17) показывают, что вторичные связи являются однородными степени два функциями скоростей (у первичных связей степень однородности была равна единице). Кроме того, невырожденность матрицы $(\gamma_{\alpha\beta}^0)$ позволяет получить тождество для скоростей v^α :

$$v^\alpha = -(\{E_0, \varphi_\beta^L\} + v^{\mu'} \gamma_{\mu'\beta}^L) \gamma^{\beta\alpha} \quad (21)$$

(в правой части данной формулы остается зависимость от v^α , которая пропадает при переходе к гамильтоновой формулировке, см. ниже формулу (28)). Это выражение следует подставить в общую формулу (14); мы получим вместо нее уравнение

$$\dot{f} = \{E_0, f\}_1^* + v^{\mu'} \{\varphi_{\mu'}, f\}_1^* + \dot{v}^\mu \frac{\partial f}{\partial v^\mu}. \quad (22)$$

Вместо скобки Пуассона в этой формуле фигурирует новая пуассонова структура на фазовом пространстве – скобка Дирака, построенная по первичным связям второго рода:

$$\{f, g\}_1^* = \{f, g\} - \{f, \varphi_\alpha^L\} \gamma^{L\alpha\beta} \{\varphi_\beta^L, g\}. \quad (23)$$

Далее следует проверить условие согласованности уравнения вторичных связей (20) с модифицированными уравнениями движения (22). Это может привести к появлению связей следующего поколения – третичных. Процедура “размножения” связей подробно описана в лекциях [10].

Гамильтонова формулировка на первых порах выглядит проще. Определение импульсов

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial v^a} = g_{ab}v^b + g_{a\mu}v^\mu \quad (24)$$

и невырожденность матрицы (g_{ab}) позволяют выразить скорости v^b :

$$v^b = U^b(q, \hat{p}, \check{v}) = g^{ba}p_a - g_\mu^b v^\mu, \quad \hat{p} = \{p_i : i \in A\}, \quad \check{v} = \{v^i : i \in M\}.$$

Пусть $\sharp$ – отображение Лежандра:

$$f(q, v) \rightarrow f(q, v)|_{v^b=U^b(q, \hat{p}, \check{v})} = f^\sharp(q, \hat{p}, \check{v}).$$

После применения этого преобразования действие (8) принимает вид

$$\widehat{S}[q, p, \check{v}] = \int_{t_1}^{t_2} (-H(q, \hat{p}) - v^\mu \varphi_\mu^H(q, \hat{p}) + p_i \dot{q}^i) dt,$$

где каноническая функция Гамильтона есть

$$H(q, \hat{p}) = \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b = E_0^\sharp,$$

а первичные гамильтоновы связи суть $\varphi_\mu^H(q, \hat{p}) = b_\mu^i p_i = (\varphi_\mu^L)^\sharp$. Аналогом формулы (22) будет

$$\dot{f} = \mathbf{P}X_{dH}f + v^\mu \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^H}f + \dot{v}^\mu Y_\mu^H f,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}X_{dH} &= \frac{\partial H}{\partial p_a} \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \\ \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^H} &= b_\mu^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ib}}{\partial q^k} g^{ba} p_a \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \end{aligned}$$

а $Y_\mu^H = \partial/\partial v^\mu$ – нулевые векторы гамильтоновой 2-формы $\omega_H^2 = dp_i \wedge dq^i$, являющейся, конечно, образом лагранжевой формы ω_L^2 (13) относительно преобразования Лежандра.

Прямые вычисления дают квадратичное по импульсам выражение

$$\mathbf{P}X_{dH}\varphi_\mu^H = b_\mu^i p_c g^{ca} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ib}}{\partial q^a} \right) g^{bd} p_d, \quad (25)$$

при этом выражение

$$\gamma_{\mu\nu}^H = \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^H}\varphi_\nu^H = b_\mu^i b_\nu^j \left(\frac{\partial g_{jb}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ib}}{\partial q^j} \right) g^{ba} p_a = c_{\mu\nu}^a(q) p_a \quad (26)$$

линейно по импульсам (очевидно, $\gamma_{\mu\nu}^H = (\gamma_{\mu\nu}^L)^\sharp$ вследствие формул (24)).

Очевидна полная аналогия структуры зависящих от координат коэффициентов в формах по скоростям (16), (18) из лагранжевой формулировки и в формах по импульсам (25), (26) в гамильтоновой формулировке. Гамильтоновы вторичные связи

$$\varphi_{\nu'}^H = \beta_{\nu'}^\nu \{H, \varphi_\nu^H\} \quad (27)$$

оказываются однородными степени два функциями импульсов (у первичных связей степень однородности была равна единице).

Невырожденность матрицы $(\gamma_{\alpha\beta}^0)$ позволяет получить гамильтонов аналог формулы (21):

$$v^\alpha = -(\{H, \varphi_\beta^0\} + v^{\mu'} \gamma_{\mu'\beta}^0) \gamma^{\beta\alpha 0}. \quad (28)$$

После этого гамильтонова скобка Дирака определяется той же формулой (23) с заменой верхних символов L на H.

Здесь следует сделать замечание о смысле невырожденности матрицы $(\gamma_{\alpha\beta}^0)$. Явные формулы (18) и (26) показывают, что эта матрица обращается в ноль на подмножествах $v^k = 0$ и $p_a = 0$ лагранжева и гамильтонова фазового пространства соответственно, и на них обратная матрица $(\gamma^{\alpha\beta 0})$ не существует. Однако вычисленные по правилу Лопиталя пределы нулевых векторов $\beta_{\nu'}^0$, коэффициентов во втором члене скобки Дирака и т. п. существуют благодаря их однородности по v^k и p_a , в результате эти объекты определены на всем фазовом пространстве. Аналогичная картина характерна и для следующих этапов “размножения” связей.

В лекциях [10] показано, как на каждом этапе процедуры “размножения” связей возникает своя скобка типа скобки Дирака. Для рассматриваемой модели нетрудно установить, что коэффициенты каждой из таких скобок – однородные степени ноль функции импульсов в гамильтоновой схеме и однородные степени ноль функции скоростей в лагранжевой. Поэтому связи в каждом следующем поколении оказываются однородными функциями степени на единицу большей, чем в предыдущем.

Рассмотренный в этом разделе пример показывает, что в типичных квантово-полевых ситуациях, когда матрица Гессе исходной функции Лагранжа вырождена изначально, подробно изученный в статье [3] случай линейных по скоростям связей является исключением. Поэтому изложенная выше техника работы с вырожденной квазисимплектической структурой действительно нужна. Она прежде всего позволяет дать дифференциально-геометрическую интерпретацию всех объектов неголономной механики Дирака и установить взаимно однозначное соответствие их лагранжевой и гамильтоновой формулировок. Помимо этого, оказывается возможным [10] дать инвариантную формулировку условий возникновения локальных симметрий и связей второго рода.

Рассмотрим сначала локальные симметрии. Запишем вторичные связи (27) в виде

$${}^1\varphi_{\mu'} = \beta_{\mu'}^\mu \omega_H^2(\mathbf{P}X_{dH}, \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu}^0).$$

Можно показать [10], что локальные симметрии возникают лишь в случае, когда вторичные связи функционально зависимы: на T^*Q (подмногообразии всего фазового пространства Γ) существует такая матрица ${}^1B_\sigma^{\mu'}(q, p)$, что ${}^1B_\sigma^{\mu'} {}^1\varphi_{\mu'} = 0$. Это означает, что векторное поле

$$\mathbf{P}X_{\Delta^\mu d\varphi_\mu}^0 = \Delta^\mu \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu}^0, \quad (29)$$

являющееся линейной комбинацией отвечающих первичным связям векторных полей $\mathbf{P}X_{d\varphi_\mu}^0$ с коэффициентами $\Delta^\mu = \varepsilon^\sigma {}^1B_\sigma^{\mu'} \beta_{\mu'}^0$, находится в косоортогональном

в смысле формы ω_H^2 дополнении

$$E = \{ \mathbf{P}X : \omega_H^2(\mathbf{P}X_{dH}, \mathbf{P}X) = 0 \}$$

к полю $\mathbf{P}X_{dH}$. С другой стороны, в лекциях [10] показано, что векторное поле (29) можно представить в виде коммутатора поля $K = \Delta^\mu Y_\mu$ из ядра $\ker \omega_H^2$ симплектической формы с векторным полем $\mathbf{P}X_{dE}$, где $E = H + v^\mu \varphi_\mu^0$ – нётерова энергия:

$$\mathbf{P}X_{\Delta^\mu d\varphi_\mu^0} = [K, \mathbf{P}X_{dE}]. \quad (30)$$

Поэтому, введя множество

$$Z = \{ X : X = [K, \mathbf{P}X_{dE}] \text{ для любых } K \in \ker \omega_H^2 \},$$

получаем инвариантную форму условий появления локальных симметрий на первом этапе “размножения” связей: $Z \cap E \neq \emptyset$.

Наконец, определим связи второго рода инвариантно. Обозначим символом $\tilde{Z}$ косоортогональное дополнение к Z :

$$\tilde{Z} = \{ X : \omega_L^2(K, X) = 0 \text{ для любых } K \in Z \}$$

и положим $\overset{1}{Z} = \tilde{Z} \cap Z$. Тогда $\omega_L^2(K_1, K_2) = 0$ для любых $K_1, K_2 \in \overset{1}{Z}$. Но в соответствии с формулой (30) $\mathbf{P}K_i = \mathbf{P}X_{\Delta_i^\mu d\varphi_\mu^0}$. Тогда $\omega_L^2(K_1, K_2) = \Delta_1^\mu \Delta_2^\nu \{ \varphi_\mu^0, \varphi_\nu^0 \} = 0$, следовательно, Δ_i^μ – нулевые векторы матрицы $(\gamma_{\mu\nu})$. Далее,

$$[\mathbf{P}K_1, \mathbf{P}K_2] = (\mathbf{P}K_1 \Delta_2^\mu - \mathbf{P}K_2 \Delta_1^\mu) \mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^0} + \Delta_1^\mu \Delta_2^\nu [\mathbf{P}X_{d\varphi_\mu^0}, \mathbf{P}X_{d\varphi_\nu^0}].$$

Последнее слагаемое в правой части может быть записано как $\mathbf{P}X_{\Delta_1^\mu \Delta_2^\nu d\{ \varphi_\mu^0, \varphi_\nu^0 \}}$ и обращается в ноль, поскольку Δ_i^μ – нулевые векторы оператора, отвечающего матрице $(\gamma_{\mu\nu}) = (\{ \varphi_\mu^0, \varphi_\nu^0 \})$. Нетрудно проверить также, что числовой коэффициент в первом слагаемом тоже является нулевым вектором этой матрицы. Таким образом, правая часть коммутатора принадлежит множеству $\overset{1}{Z}$ и, следовательно, $\overset{1}{Z}$ – инволютивное распределение. По теореме Фробениуса фазовое пространство, на котором действуют векторные поля из $\overset{1}{Z}$, есть слоение. Чтобы придать инвариантную форму разделению связей на первый и второй род, необходимо потребовать, чтобы это слоение было расслоением (ср. работу [1]). Тогда векторные поля из $\overset{1}{Z}$ будут вертикальными – касательными к слоям расслоения. Введем проектор $\overset{1}{P}$ на эти поля,

$$X \rightarrow \overset{1}{P}X \in \overset{1}{Z}, \quad \overset{1}{s} = \mathbf{1} - \overset{1}{P},$$

и разобьем множество Z на два непересекающихся подмножества: $Z = \overset{1}{Z} + \overset{1}{S}$, где $\overset{1}{S} = \overset{1}{s}Z$. Векторные поля из $\overset{1}{S}$ и будут отвечать (ср. с формулой (29)) связям второго рода. В локальных координатах проектор $\overset{1}{s}$ имеет вид $\overset{1}{s} = d\varphi_\alpha \otimes \gamma^{\alpha\beta} X_{d\varphi_\beta}$, а векторные поля из множества $\overset{1}{S}$ суть линейные комбинации $\Delta^\alpha X_{d\varphi_\alpha}$ полей, отвечающих дифференциалам связей второго рода первого этапа.

Остается заметить, что скобка Дирака (23) на первом этапе “размножения” связей выражается через проектор $\overset{1}{\mathbf{P}}$:

$$\{f, g\}_1^* = \omega^2(\overset{1}{\mathbf{P}}\mathbf{P}X_{df}, \overset{1}{\mathbf{P}}\mathbf{P}X_{dg}),$$

так что вторичные связи можно представить в виде

$$\overset{1}{\varphi}_{\mu'} = \overset{1}{\mathbf{P}}\mathbf{P}X_{dH}\varphi_{\mu'}, \quad (31)$$

а модифицированное уравнение эволюции (22) – в виде

$$\dot{f} = \overset{1}{\mathbf{P}}\mathbf{P}X_{dH}f + v^{\mu'}\overset{1}{\mathbf{P}}\mathbf{P}X_{d\varphi_{\mu'}}f + \dot{v}^{\mu}\frac{\partial f}{\partial v^{\mu}}. \quad (32)$$

Аналогичные структуры возникают на следующих этапах дираковой процедуры “размножения” связей: на втором этапе следует проверить условие совместности уравнений вторичных связей (31) с модифицированным уравнением эволюции второго этапа (32); это может привести к появлению третичных связей и нового проектора $\overset{2}{\mathbf{P}}$ и т. д. Таким образом, инвариантную дифференциально-геометрическую интерпретацию получает вся процедура Дирака.

Благодарности. Автор благодарен И. В. Тютину, внимательно прочитавшему рукопись и предложившему уточнить определения используемых в статье терминов, а также смысл невырожденности матрицы $(\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta})$.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **1:1** (1969), 3–18.
- [2] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [3] А. М. Вершик, Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **202:3** (1972), 555–557.
- [4] А. М. Вершик, Л. Д. Фаддеев, “Лагранжева механика в инвариантной форме”, *Проблемы теоретической физики*, т. 2: Теория ядра. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистическая физика, Изд-во ЛГУ, Л., 1975, 129–141.
- [5] A. M. Vershik, “Mathematics of nonholonomicity”, Appendix 3 in: V. Sergeev, *The Thermodynamic Approach to Market*, Preprint № 76, ed. D. A. Leites, Max-Planck-Institut für Mathematik, Leipzig, 2006, 137–154, [arXiv:0803.3432](https://arxiv.org/abs/0803.3432).
- [6] К. Годбийон, *Дифференциальная геометрия и аналитическая механика*, Мир, М., 1979.
- [7] П. Дирак, “Generalized Hamiltonian dynamics”, *Собрание научных трудов*. Ч. 3, т. 3: Квантовая теория (научные статьи 1948–1984), Физматлит, М., 2004.
- [8] В. П. Павлов, А. О. Старинец, *ТМФ*, **105:3** (1995), 429–437.
- [9] В. П. Павлов, *Тр. МИАН*, **228** (2000), 145–154.
- [10] В. П. Павлов, “Неголономная механика Дирака и дифференциальная геометрия”, *Лекционные курсы НОЦ*, **22**, МИАН, М., 2014, 3–55.

Поступила в редакцию 13.05.2013,
после доработки 6.10.2013