Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Слепцов, Разложение по родам для полиномов ХОМФЛИ, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 2, 179–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 08:24:13

© 2013 г. А. Д. Миронов^{*†}, А. Ю. Морозов^{*}, А. В. Слепцов^{*}

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО РОДАМ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХОМФЛИ

В планарном пределе разложения 'т Хоофта вакуумное среднее значение петли Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса (другими словами, полином ХОМФЛИ) зависит следующим простым образом от представления (диаграммы Юнга): $H_R(A|q)|_{q=1} = (\sigma_1(A))^{|R|}$. В результате (зависящая от узла) статистическая сумма Оогури–Вафы $\sum_R H_R \chi_R \{\bar{p}_k\}$ становится тривиальной тау-функцией иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Изучаются поправки старшего рода к этой формуле для H_R в форме разложения по степеням $z = q - q^{-1}$. Коэффициенты разложения выражаются через собственные значения операторов разрезания и склейки, т. е. характеров симметрической группы. Кроме того, разложение по z естественным образом представляется в виде произведения. Представление через операторы разрезания и склейки устанавливает связь с теорией Гурвица и ее усложненной интегрируемостью. Полученные соотношения описывают форму разложения по родам для полиномов ХОМФЛИ, которая для соответствующей матричной модели обычно задается с помощью связей типа Вирасоро и топологической рекурсии. Разложение по родам отличается от более изученного разложения слабой связи при конечном числе цветов, которое описывается в терминах инвариантов Васильева и интеграла Концевича.

Ключевые слова: теория Черна–Саймонса, инварианты узлов, разложение 'т Хоофта.

DOI: 1010.4231/tmf8549

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящий момент полиномы узлов являются одними из наиболее интересных новых специальных функций, которые тесно связаны с конформными блоками, функциями Некрасова и тау-функциями интегрируемых иерархий Кадомцева–Петвиашвили (КП) и цепочки Тоды. Центральный объект этого мира – это полином ХОМФЛИ $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(A, q)$ [1], который зависит от узла (или зацепления) $\mathcal{K}$, вложенного

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mironov@itep.ru, morozov@itep.ru, sleptsov@itep.ru

[†]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mironov@lpi.ru

в трехмерное пространство $\mathcal{M}$, от представления (диаграммы Юнга) R и от двух переменных A и q . Значение этого полинома при $A = q^N$ можно представить как среднее значение линии Вильсона вдоль $\mathcal{K}$ в трехмерной теории Черна–Саймонса в пространстве $\mathcal{M}$ [2] с константой связи κ при $q = e^{2\pi/(\kappa+N)}$. Дальнейшие обобщения полинома ХОМФЛИИ таковы:

1) суперполином, зависящий от одного особого параметра t [3], этот полином связан с категорификацией Хованова–Рожанского [4] и имеет много общего с деформацией Макдональда для симметричных функций Шура [5], [6]:

$$P_R^{\mathcal{K}}(A, q, t) \xrightarrow{t=q} \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(A, q), \quad \mathcal{K} \in \mathcal{M};$$

2) расширенный полином узла [7], [8], зависящий от бесконечно большого количества времен p_k :

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}\{p_k|q\} \xrightarrow{p_k=p_k^*} \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(A, q), \quad \mathcal{K} \in \mathcal{M}, \quad p_k^* = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}}.$$

Особый интерес на данный момент представляет поиск системы взаимосвязей между полиномами узлов для $\mathcal{M} = S^3$ (когда они являются полиномами Лорана в переменных A и q), особенно изучение однопараметрических семейств этих полиномов, рассматриваемых как функции от одной переменной. Примерами таких взаимосвязей являются скейн-соотношения [9], разностные уравнения (также известные как квантовые A -полиномы) [10]–[12], “эволюции” внутри семейств торических, твистованных и подобных им семейств [6], [13] и, наконец, наиболее тесно связанная с предметом настоящей статьи зависимость от представления для специальных полиномов [6], [14]:

$$\sigma_R(A) = \sigma_1(A)^{|R|} \quad (1)$$

(здесь и далее мы опускаем квадратные скобки в обозначении диаграммы Юнга в полиномах $\sigma_R(A)$, таким образом, $\sigma_1(A) \equiv \sigma_{[1]}(A)$ и т. п.). Специальные полиномы получаются из редуцированных полиномов ХОМФЛИИ $H_R^{\mathcal{K}}(A, q)$ в пределе $q \rightarrow 1$:

$$\sigma_R^{\mathcal{K}}(A) = \lim_{q \rightarrow 1} H_R^{\mathcal{K}}(A, q) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(A, q)}{\mathcal{H}_R^{\text{unknot}}(A, q)}, \quad \mathcal{K} \in S^3. \quad (2)$$

Аналогичный предел для суперполиномов также представляет огромный интерес, но свойство факторизации специальных суперполиномов менее очевидно: они зависят от типа представления и, возможно, от сложности узлов [15], [16].

Предел в (2) берется при $A = \text{const}$, и это отличается от предела $q \rightarrow 1$ при $N = \text{const}$, описываемого интегралом Концевича [17], где появляются инварианты Васильева [18] и хордовые диаграммы. Этот предел в действительности является пределом ’т Хоофта: пределом больших N при условии, что константа связи ’т Хоофта A , $\ln A = N \ln q$, остается постоянной. Соотношение (1) в этом пределе является обычным свойством факторизации многоследовых операторов в планарном пределе. В таком случае это означает, что полиномы зацеплений в пределе ’т Хоофта разлагаются в произведения полиномов составляющих узлов (зацепления расцепляются в отдельные узлы), тогда формулу (1) можно немедленно доказать, используя подход, основанный на каблировании [19]. Действительно интересным

в этом пределе является разложение по родам (которое контролируется связями Вирасоро в хорошо изученном случае матричных моделей).

Таким образом, цель настоящей статьи – исследование того, что происходит, когда зависимость от q восстанавливается “пертурбативно”: как разложение по степеням $z = q - q^{-1}$ или $\hbar = \ln q$ в окрестности точки $q = 1$, где зависимость от представления полностью описывается с помощью соотношения (1).

Мы показываем, что отклонения имеют очень интересную структуру: они выражаются через действие W -операторов разрезания и склейки из работ [20], генераторов “замкнутой струны” коммутативной алгебры Иванова–Керова, которая содержит все характеры $S_R\{p_k\}$ линейной группы $SL(\infty)$ (функции Шура) в качестве обычных собственных векторов, и все характеры $\varphi_R(\Delta)$ симметрической группы $S(\infty)$ в качестве соответствующих собственных значений:

$$\widehat{W}_\Delta\{p\}S_R\{p\} = \varphi_R(\Delta)S_R\{p\}.$$

Точнее, характер $\varphi_R(\Delta)$ пропорционален характеру $\chi_R(\Delta)$ стандартной симметрической группы $S(|R|)$ при $|\Delta| = |R|$,

$$\varphi_R(\Delta) = \frac{\chi_R(\Delta)}{d_R z_\Delta}, \quad d_R = S_R(p)|_{p_k = \delta_{k,1}},$$

где z_Δ – порядок автоморфизма диаграммы Юнга Δ [21], тогда как при $|R| = |\Delta| + k$ он равен

$$\varphi_R(\Delta) = \frac{(r_\Delta + k)!}{k!r_\Delta!} \varphi_R(\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k),$$

где r_Δ – это число линий единичной длины в диаграмме Δ .

Для удобства анализа лучше всего использовать производящую функцию [22]

$$\mathcal{Z}^\mathcal{K}(\bar{p}|A, q) = \sum_R \mathcal{H}_R^\mathcal{K}(A, q) S_R\{\bar{p}\}.$$

Связь разложения, представленного в настоящей работе, и разложения Оогури–Вафы с введенными подходящим образом целочисленными коэффициентами является нетривиальной и требует дальнейшего исследования. Самый простой оператор разрезания и склейки $\widehat{W}_{[2]}$ появляется уже в исследованиях, связанных с гипотезой Оогури–Вафы [23].

Нашим основным результатом является следующий: мы показываем, что зависимость от R в разложении по родам полиномов ХОМФЛИ контролируется характерами $\varphi_R(\Delta)$ симметрической группы, которая обычно рассматривается в теории Гурвица и которая тем самым непосредственно связана с теорией Черна–Саймонса и теорией узлов. Мы записываем уравнение (44) из работы [12] в явном виде,

$$H_R^\mathcal{K}(q|A) = (\sigma_\square^\mathcal{K}(A))^{|R|} \exp \left\{ \sum_j (q - q^{-1})^j \sum_{|Q| \leq j+1} \varphi_R(Q) \frac{j s_Q^\mathcal{K}(A)}{(\sigma_\square^\mathcal{K}(A))^{2j}} \right\}, \quad (3)$$

включающем конкретные специальные полиномы $s_\Delta^\mathcal{K}(A)$ “более высокого порядка” для конкретных узлов. Множество этих полиномов индексируется целым числом

и диаграммой Юнга. Конечно, для данного узла $\mathcal{K}$ не все специальные полиномы более высокого порядка независимы (достаточно сказать, что экспонента в (3) будет полиномом Лорана по q и A). Однако непонятно, существуют ли универсальные соотношения между ними на всем пространстве всех узлов.

2. ПЕРТУРБАТИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ХОМФЛИ

Пертурбативные разложения полиномов ХОМФЛИ для узлов и зацеплений активно изучаются с конца 80-х гг. XX века. Мы кратко рассмотрим три из них. Каждое разложение приводит к своему множеству нетривиальных инвариантов, раскрывает характерные, лежащие в его основе структуры и обеспечивает особые нетривиальные отношения с другими объектами.

2.1. $\hbar$ -Разложение. Одним из первых изучаемых разложений является ряд для вакуумного среднего петли Вильсона в калибровочной теории Черна–Саймонса, который приводит к интегралу Концевича с инвариантами Васильева. Это обеспечивает связь с квантовыми инвариантами и инвариантами конечного типа (инвариантами Васильева).

Данное разложение идет по степеням переменной $\hbar$, которая связана с константой связи Черна–Саймонса κ следующим образом:

$$\hbar = \frac{2\pi i}{\kappa}. \quad (4)$$

Следовательно, полином ХОМФЛИ представляется как

$$H_R^K(A|q) \Big|_{\substack{A=e^{N\hbar/2} \\ q=e^{\hbar/2}}} = \sum_{i=0}^{\infty} \hbar^i \sum_{j=1}^{N_i} r_{i,j}^{(R)} v_{i,j}^K,$$

где $v_{i,j}$ – инварианты Васильева, $r_{i,j}$ – базис в векторном пространстве трехвалентных диаграмм, N_i – размерность векторного пространства в i -м порядке. Это разложение приведено для полиномов ХОМФЛИ, которые связаны с теорией Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$, однако подобные разложения можно записать в случае любой полупростой группы G . Существует большая литература по данному предмету, см., например, работы [7], [24]–[26].

Таким образом, данное пертурбативное разложение определяется как разложение при $\hbar \rightarrow 0$ и фиксированных $|R|$ и N .

2.2. Разложение, связанное с “гипотезой объема”. Вторым широко известным примером пертурбативного разложения является разложение, связанное с так называемой “гипотезой объема” [27], которая утверждает, что для узла $\mathcal{K}$

$$\lim_{\substack{|R| \rightarrow \infty \\ q \rightarrow 1}} \frac{\ln H_R^K(A|q) \Big|_{A=q^2}}{|R|} = \frac{1}{2\pi} \text{Vol}(S^3 \setminus \mathcal{K}),$$

где $\text{Vol}(S^3 \setminus \mathcal{K})$ – симплициальный объем дополнения $S^3 \setminus \mathcal{K}$ к узлу. На этот раз переменная q параметризуется следующим образом: $q = e^{(2\pi i + u)/|R|}$. В терминах

константы связи $\hbar$ из (4)

$$u = 2\pi i \left(\frac{|R|}{\kappa} - 1 \right) = \hbar |R| - 2\pi i.$$

Разложение “гипотезы объема” можно произвести по степеням $\hbar$ или $|R|^{-1}$ с тем же успехом, так как в этом разложении $\hbar \rightarrow 0$, $|R| \rightarrow \infty$, а $\hbar|R|$ и N фиксированы.

2.3. Разложение по родам. Третье известное разложение – это разложение по родам, или $(1/N)$ -разложение. Оно очень хорошо известно в квантовой теории поля и теории матричных моделей. Настоящая статья посвящена именно этому разложению, его подробный анализ представлен в следующем разделе. Именно это разложение проясняет отношения между интегрируемой иерархией КП, теорией Гурвица и особенно операторами разрезания и склейки. Разложение по родам для полиномов ХОМФЛИ изучалось ранее в работах [22], [28], [29], где были получены некоторые интересные результаты, включая инварианты Оогури–Вафы, связь с инвариантами Громова–Виттена и специальными матричными моделями. Существуют свидетельства [29], [30] в пользу того, что топологическая рекурсия АММ/ЭО [31] прекрасно подходит к этому разложению, хотя аналог условий Вирасоро, которые стоят за ней в данном случае и в особенности их зависимость от выбора узла все еще необходимо сформулировать в общем случае.

Разложение по родам описывается следующими условиями: $\hbar \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ так, что $\hbar N$ фиксировано, и $|R|$ также фиксировано.

3. СТРУКТУРА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО РОДАМ

3.1. Специальные полиномы и разделение зависимости от узла и от представления. Полиномы ХОМФЛИ, если они получаются как вакуумное среднее петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса, являются ненормированными (не приведены). Поэтому они сингулярны при $q \rightarrow 1$: они расходятся, как $(q - q^{-1})^{|R|}$. Однако эта сингулярность не зависит от узла: полином ХОМФЛИ для окружности ведет себя именно таким образом. Следовательно, можно рассматривать приведенный полином ХОМФЛИ

$$H_R^K(A, q) = \frac{\mathcal{H}_R^K(A, q)}{\mathcal{H}_R^{\text{unknot}}(A, q)}, \quad (5)$$

который хорошо определен в пределе $q \rightarrow 1$. Полином $\mathcal{H}_R^{\text{unknot}}$ в знаменателе в действительности является полиномом Шура $S_R\{p^*\}$ [32], вычисленным на топологическом локусе, т. е. при

$$p_k = p_k^* = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}}.$$

При $A = q^N$ этот полином $S_R\{p^*\}$ есть не что иное, как квантовая размерность представления R алгебры $su(N)$.

В случае рода ноль рассматривается приведенный полином ХОМФЛИ при $q \rightarrow 1$ и конечном $A = q^N$, т.е. планарный предел с константой связи $\hbar \sim \kappa^{-1} \rightarrow 0$ и при $N \rightarrow \infty$. Получается, что специальный полином определен как

$$\sigma_R^K(A) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\mathcal{H}_R^K(A, q)}{S_R(A, q)}.$$

В некотором смысле он является “двойственным” полиному Александра

$$\aleph_R^K := \lim_{A \rightarrow 1} \frac{\mathcal{H}_R^K(A, q)}{S_R(A, q)},$$

хотя в других отношениях свойства специальных полиномов несколько проще.

В частности, в планарном пределе среднее многоследовых операторов разлагается в произведение средних, поэтому техники, основанные на каблировании, влекут, что специальные полиномы имеют простую зависимость от R [6], [14], [19]:

$$\sigma_R^K(A) = (\sigma_1^K(A))^{|R|}. \quad (6)$$

Данное свойство будет отправной точкой в нашем кратком обзоре интегрируемых свойств полиномов ХОМФЛИ в п 4.2.

Как уже упоминалось, разложение по родам идет в действительности по степеням $\hbar$ при фиксированном A . Однако если использовать именно $\hbar$, некоторые свойства могут оказаться скрытыми, в частности тот факт, что полином ХОМФЛИ – это полином Лорана по q и в то же время бесконечный ряд по $\hbar$. Следовательно, имеет смысл использовать другой параметр $z = q - q^{-1} = \hbar + O(\hbar^3)$.

На следующем шаге мы “пертурбативно” восстанавливаем приведенный полином ХОМФЛИ путем изучения поправок по z к специальному полиному и сосредотачиваемся на деформации свойства факторизации (6):

$$H_R^K(A, q) = {}_0\bar{\sigma}_R^K(A) + {}_1\bar{\sigma}_R^K(A)z + {}_2\bar{\sigma}_R^K(A)z^2 + \dots \quad (7)$$

Все функции ${}_i\bar{\sigma}_R^K(A)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, суть полиномы по A , зависящие от узла $\mathcal{K}$. Далее мы иногда будем опускать значки A и $\mathcal{K}$ для упрощения формул. Также мы отождествляем ${}_0\bar{\sigma}_R^K(A)$ и $\sigma_R^K(A)$. В основном нас интересует зависимость от R . Оказывается, что зависимость пертурбативных поправок по z от представления порождена характерами симметрической группы с конечным числом членов в каждом порядке разложения. Чтобы понять, как это выглядит, выпишем первые несколько членов в (7):

$$\begin{aligned} {}_0\bar{\sigma}_R^K &= (\sigma_1^K)^{|R|}, \\ {}_1\bar{\sigma}_R^K &= (\sigma_1^K)^{|R|-2} {}_1\sigma_2^K \varphi_R([2]), \\ {}_2\bar{\sigma}_R^K &= (\sigma_1^K)^{|R|-4} ({}_2\sigma_1^K \varphi_R([1]) + {}_2\sigma_{11}^K \varphi_R([11]) + {}_2\sigma_3^K \varphi_R([3]) + {}_2\sigma_{22}^K \varphi_R([22])), \\ {}_3\bar{\sigma}_R^K &= (\sigma_1^K)^{|R|-6} ({}_3\sigma_2^K \varphi_R([2]) + {}_3\sigma_{21}^K \varphi_R([21]) + {}_3\sigma_4^K \varphi_R([4]) + \\ &\quad + {}_3\sigma_{211}^K \varphi_R([211]) + {}_3\sigma_{32}^K \varphi_R([32]) + {}_3\sigma_{222}^K \varphi_R([222])), \\ {}_4\bar{\sigma}_R^K &= (\sigma_1^K)^{|R|-8} ({}_4\sigma_1^K \varphi_R([1]) + {}_4\sigma_{11}^K \varphi_R([11]) + {}_4\sigma_3^K \varphi_R([3]) + \\ &\quad + {}_4\sigma_{111}^K \varphi_R([111]) + {}_4\sigma_{31}^K \varphi_R([31]) + {}_4\sigma_{22}^K \varphi_R([22]) + {}_4\sigma_5^K \varphi_R([5])). \end{aligned} \quad (8)$$

Мы называем ${}_i\sigma_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A)$ в правой части формул *старшими специальными полиномами*. Они являются коэффициентами перед $\varphi_R(\Delta)$. Еще раз подчеркнем, что ${}_i\sigma_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A)$ являются полиномами по A и зависят от узла $\mathcal{K}$, но уже не зависят от представления R . Зависимость от R полностью сосредоточена в простом множителе $(\sigma_1^{\mathcal{K}})^{|R|}$ и в величинах $\varphi_R(\Delta)$, которые суть собственные значения операторов разрезания и склейки:

$$\widehat{W}_{\Delta} S_R\{p\} = \varphi_R(\Delta) S_R\{p\}, \quad (9)$$

где R и Δ являются диаграммами Юнга, $\widehat{W}$ – оператор разрезания и склейки. Для определений, различных представлений и свойств операторов разрезания и склейки мы отсылаем читателя к работам [20], [33], [34]. Как поясняется в этих работах, $\varphi_R(\Delta)$ действительно пропорциональны характеристам симметрической группы (их можно получить с помощью команды `Chi(R, Δ)` в программе `Maple` в пакете `combinat`).

Подведем итог. Формулы (8) дают выражения для коэффициентов ${}_i\sigma_R^{\mathcal{K}}(A)$ в ряде Тейлора (7) в виде линейных комбинаций собственных значений $\varphi_R(\Delta)$ операторов разрезания и склейки $\widehat{W}_{\Delta}$; старшие специальные полиномы ${}_i\sigma_R^{\mathcal{K}}(A)$ являются коэффициентами этих линейных комбинаций.

Таким образом, зависимости от $\mathcal{K}$ и от R полностью отделяются: первая является немного усложненной и зашифрована в старших полиномах, вторая является относительно простой и зашифрована в характеристах симметрической группы.

3.2. Не зависящие от узлов соотношения между специальными полиномами и представление разложения по родам в виде экспоненты. Однако история на этом не заканчивается. Оказывается, что между старшими полиномами существуют нелинейные соотношения, которые, предположительно, универсальны, т. е. не зависят от узла. Эти соотношения можно получить из явных вычислений для торических узлов и для узла-восьмерки:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{22} &= ({}_1\sigma_2)^2, & \text{т. е.} & \quad "22 = 2 \cdot 2", \\ 3\sigma_{211} &= {}_1\sigma_2 {}_2\sigma_{11}, & \text{т. е.} & \quad "211 = 2 \cdot 11", \\ 3\sigma_{32} &= {}_1\sigma_2 {}_2\sigma_3, & \text{т. е.} & \quad "32 = 3 \cdot 2", \\ 3\sigma_{222} &= ({}_1\sigma_2)^3, & \text{т. е.} & \quad "222 = 2 \cdot 2 \cdot 2", \\ 4\sigma_{1111} &= 3({}_2\sigma_{11})^2, & \text{т. е.} & \quad "1111 = 11 \cdot 11", \\ 4\sigma_{311} &= {}_2\sigma_{11} {}_2\sigma_3, & \text{т. е.} & \quad "311 = 3 \cdot 11", \\ 4\sigma_{42} &= {}_1\sigma_2 {}_3\sigma_4 & \text{т. е.} & \quad "42 = 4 \cdot 2", \\ 4\sigma_{33} &= ({}_2\sigma_3)^2, & \text{т. е.} & \quad "33 = 3 \cdot 3", \\ 4\sigma_{2211} &= ({}_1\sigma_2)^2 {}_2\sigma_{11} & \text{т. е.} & \quad "2211 = 2 \cdot 2 \cdot 11", \\ 4\sigma_{322} &= ({}_1\sigma_2)^2 {}_2\sigma_3, & \text{т. е.} & \quad "322 = 3 \cdot 2 \cdot 2", \\ 4\sigma_{2222} &= ({}_1\sigma_2)^4, & \text{т. е.} & \quad "2222 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2". \end{aligned} \quad (10)$$

Как это работает, можно увидеть на явных примерах в приложении [A](#).

Представим разложение (7) как экспоненту с учетом соотношений (10):

$$\begin{aligned}
 H_R(A, q) = (\sigma_1)^{|R|} \exp \Big\{ & \frac{z}{\sigma_1^2} {}_1\sigma_2 \varphi_R([2]) + \\
 & + \left(\frac{z}{\sigma_1^2} \right)^2 \left({}_2\sigma_1 \varphi_R([1]) + {}_2\sigma_{11} \varphi_R([11]) + {}_2\sigma_3 \varphi_R([3]) + {}_1\sigma_2^2 \left(\varphi_R([22]) - \frac{1}{2} \varphi_R^2([2]) \right) \right) + \\
 & + \left(\frac{z}{\sigma_1^2} \right)^3 \left({}_3\sigma_2 \varphi_R([2]) + {}_3\sigma_{21} \varphi_R([21]) + {}_3\sigma_4 \varphi_R([4]) + \right. \\
 & + {}_1\sigma_2 {}_2\sigma_{11} (\varphi_R([211]) - \varphi_R([2])\varphi_R([11])) - {}_1\sigma_2 {}_2\sigma_1 \varphi_R([2])\varphi_R([1]) + \\
 & + {}_1\sigma_2 {}_2\sigma_3 (\varphi_R([32]) - \varphi_R([2])\varphi_R([3])) + \\
 & \left. + {}_1\sigma_2^3 \left(\varphi_R([222]) - \varphi_R([2])\varphi_R([22]) + \frac{1}{3} \varphi_R^3([2]) \right) \right) + \dots \Big\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Заметим, что члены, пропорциональные

$$\begin{aligned}
 & \varphi_R([11]), \quad \varphi_R([22]) - \frac{1}{2} \varphi_R^2([2]), \quad \varphi_R([211]) - \varphi_R([2])\varphi_R([11]), \\
 & \varphi_R([32]) - \varphi_R([2])\varphi_R([3]), \quad \varphi_R([222]) - \varphi_R([2])\varphi_R([22]) + \frac{1}{3} \varphi_R^3([2]), \quad \dots, \quad (12)
 \end{aligned}$$

могут быть порождены (мультипликативным) базисом $\varphi_R([p])$ с однострочными диаграммами Юнга $[p]$, поэтому формулу (11) можно упростить. С этой целью достаточно заметить, что операторы разрезания и склейки образуют коммутативную ассоциативную алгебру [20]

$$\widehat{W}_{\Delta_1} \widehat{W}_{\Delta_2} = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \widehat{W}_{\Delta}, \quad (13)$$

и то же самое верно для их собственных значений $\varphi_R(\Delta)$. Это определяет соотношения, которые можно использовать для выражения членов (12) через $\varphi_R([p])$. Некоторые примеры $C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta}$ приведены в п. A.1 приложения A, взятом из работ [20]. Тогда экспонента (11) сводится к

$$\begin{aligned}
 H_R(A, q) = (\sigma_1)^{|R|} \exp \Big\{ & \frac{z}{\sigma_1^2} {}_1\bar{\sigma}_2 \varphi_R([2]) + \\
 & + \left(\frac{z}{\sigma_1^2} \right)^2 ({}_2\bar{\sigma}_1 \varphi_R([1]) + {}_2\bar{\sigma}_{11} \varphi_R([1])^2 + {}_2\bar{\sigma}_3 \varphi_R([3])) + \\
 & + \left(\frac{z}{\sigma_1^2} \right)^3 ({}_3\bar{\sigma}_2 \varphi_R([2]) + {}_3\bar{\sigma}_{12} \varphi_R([1])\varphi_R([2]) + {}_3\bar{\sigma}_4 \varphi_R([4])) + \\
 & + \left(\frac{z}{\sigma_1^2} \right)^4 ({}_4\bar{\sigma}_1 \varphi_R([1]) + {}_4\bar{\sigma}_{11} \varphi_R([1])^2 + {}_4\bar{\sigma}_{111} \varphi_R([1])^3 + \\
 & + {}_4\bar{\sigma}_{122} \varphi_R([1])\varphi_R([2])^2 + {}_4\bar{\sigma}_{22} \varphi_R([2])^2 + {}_4\bar{\sigma}_{13} \varphi_R([1])\varphi_R([3]) + \\
 & + {}_4\bar{\sigma}_3 \varphi_R([3]) + {}_4\bar{\sigma}_5 \varphi_R([5])) + \dots \Big\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Заметим, что обозначение $\delta = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ в ${}_i\bar{s}_\delta$ является не одной диаграммой Юнга, а множеством однострочных диаграмм Юнга, так что полином ${}_i\bar{s}_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m}$ умножается на произведение $\varphi_R([\delta_1])\varphi_R([\delta_2])\dots\varphi_R([\delta_m])$. Полиномы ${}_i\bar{s}_\delta$ являются некоторыми комбинациями полиномов ${}_i\sigma_\Delta$. Мультипликативный базис $\varphi_R([p])$ можно заменить любым мультипликативным базисом, лежащим в центре универсальной обертывающей алгебры $GL(\infty)$, т. е. базисом собственных значений операторов Казимира.

3.3. Разложение по родам в аддитивном базисе. Теперь можно использовать соотношения (13) в обратном направлении и заменить (11) на аддитивный базис, т. е. такой, в который характеры $\varphi_R(\Delta)$ входят только линейно. Тогда, несомненно, потребуется полное множество характеров, и полиномы ${}_i\bar{s}_\Delta$ образуют новые линейные комбинации, которые мы обозначаем через ${}_is_\Delta$. В результате можно записать полином ХОМФЛИ (14) как¹⁾

$$H_R^K(A, q) = (\sigma_1^K(A))^{|R|} \exp \left\{ \sum_{j=1}^j \left(\frac{z}{(\sigma_1^K(A))^2} \right)^j \sum_{i=1}^{j+1} \sum_{\Delta: |\Delta|=i} {}_js_\Delta^K(A) \varphi_R(\Delta) \right\}. \quad (15)$$

3.4. Случай (анти)симметрических представлений. Следует сделать важное замечание по поводу разложения (15). Первый порядок разложения ${}_1\bar{\sigma}_R^K$ и второй порядок разложения ${}_2\bar{\sigma}_R^K$ полностью определяются только (анти)симметрическими представлениями, т. е. полиномы ХОМФЛИ фиксируются первыми двумя поправками к специальному полиному в любом представлении.

Аналогичное утверждение имеет место в случае третьего порядка ${}_3\bar{\sigma}_R^K$, несмотря на член ${}_3\sigma_{21}^K \varphi_R([21])$. А именно, этот член может быть определен симметрическим представлением [3], потому что $\varphi_{[3]}([21]) \neq 0$.

Однако в четвертом порядке ${}_4\bar{\sigma}_R^K$ это не так. Дело в том, что $\varphi_R([3])$ и $\varphi_R([111])$ не являются линейно независимыми для (анти)симметрических представлений, но они оба присутствуют в четвертом порядке. Появление несимметрического представления связано с хорошо известным фактом, что полиномы ХОМФЛИ в (анти)симметрических представлениях не различаются для узлов-мутантов. Но они различны в несимметрических представлениях. Например, (зеркальный) узел Конвея $K11n34$ и (зеркальный) узел Киношита–Тересаки $K11n42$ являются парой узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями; общеизвестно, что они трудно различимы и полиномы ХОМФЛИ (или инварианты Васильева типа 11) для них различны только начиная с представления [21] [36].

3.5. Восстановление полинома ХОМФЛИ. Посмотрим теперь, как полином ХОМФЛИ восстанавливается из разложения (7), (8). Этот факт налагает жесткие условия (соотношения) на старшие специальные полиномы. Мы рассматриваем два основных примера: трилистник и узел-восьмерку, оба в фундаментальном представлении.

¹⁾См. улучшенную версию этой формулы в работе [35].

3.5.1. *Трилистник*. В этом случае из формул п. А.2 приложения А имеем

$$\begin{aligned} H_{[1]}^{3_1}(A, q) &= {}_0\bar{\sigma}_1^{3_1}(A) + {}_1\bar{\sigma}_1^{3_1}(A)z + {}_2\bar{\sigma}_1^{3_1}(A)z^2 + {}_3\bar{\sigma}_1^{3_1}(A)z^3 + \dots = \\ &= \frac{2-A^2}{A} + z \cdot 0 + z^2 \left(\frac{A}{2-A^2} \right)^3 \frac{(2-A^2)^3}{A^4} = \frac{2-A^2}{A} + (q-q^{-1})^2 \frac{1}{A} = \\ &= \frac{2}{A} - A + \frac{q^2}{A} - \frac{2}{A} + \frac{1}{Aq^2} = \frac{-A^2q^2 + q^4 + 1}{Aq^2}. \end{aligned}$$

3.5.2. *Узел-восьмерка*. В этом случае из формул п. А.5 приложения А получаем

$$\begin{aligned} H_{[1]}^{4_1}(A, q) &= {}_0\bar{\sigma}_1^{4_1}(A) + {}_1\bar{\sigma}_1^{4_1}(A)z + {}_2\bar{\sigma}_1^{4_1}(A)z^2 + {}_3\bar{\sigma}_1^{4_1}(A)z^3 + \dots = \\ &= \frac{A^4 - A^2 + 1}{A^2} + z \cdot 0 + z^2 \left(\frac{A^2}{A^4 - A^2 + 1} \right)^3 \frac{-(A^4 - A^2 + 1)^3}{A^6} = \\ &= \frac{A^4 - A^2 + 1}{A^2} - (q - q^{-1})^2 = A^2 - 1 + \frac{1}{A^2} - q^2 + 2 - \frac{1}{q^2} = \\ &= A^2 + \frac{1}{A^2} - q^2 + 1 - \frac{1}{q^2} = \frac{A^4q^2 - A^2q^4 + A^2q^2 - A^2 + q^2}{A^2q^2}. \end{aligned}$$

3.6. Новые специальные полиномы. Старшие специальные полиномы ${}_i\sigma_\Delta^K$ в формулах (8) можно вычислить из коэффициентов ${}_i\bar{\sigma}_R^K$ путем записи их в виде суммы по представлениям Δ , хотя это не вполне прямолинейно. На самом деле существует более простой способ вычисления, приводящий к необходимости рассмотрения новых полиномов, которые являются производящими функциями старших полиномов.

Предположим, нам известно, что коэффициенты ${}_i\bar{\sigma}_R^K$ в разложении (7) являются суммами по диаграммам Юнга старших специальных полиномов, умноженным на собственные значения операторов разрезания и склейки, в точности как в (8):

$${}_i\bar{\sigma}_R^K = (\sigma_1^K)^{|R|-2i} \sum_{\Delta} {}_i\sigma_\Delta^K \varphi_R(\Delta).$$

Рассмотрим собственные значения, заданные формулой (9), как матрицу $\varphi_R(\Delta)$ с двумя индексами R и Δ . Тогда можно определить обратную матрицу $\psi_R(\Delta)$ следующим образом:

$$\sum_R \psi_R(\Delta) \varphi_R(\Delta') = \delta_{\Delta\Delta'},$$

и в результате получим

$${}_i\sigma_\Delta^K(A) = \sum_R {}_i\bar{\sigma}_R^K(A) \psi_R(\Delta) (\sigma_1^K(A))^{2i-|R|}.$$

Теперь, используя матрицу $\psi_R(\Delta)$, легко разложить ${}_i\bar{\sigma}_R^K(A)$ в сумму по представлениям, как в (8). Используя матрицу $\psi_R(\Delta)$, можно также определить новые полиномы

$$\Sigma_\Delta^K(A, q) := \sum_R H_R^K \psi_R(\Delta) (\sigma_1^K(A))^{2i-|R|}.$$

Фактически они являются не чем иным, как производящими функциями старших специальных полиномов:

$$\Sigma_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A, q) = \sum_i {}_i\sigma_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A) z^i.$$

В действительности все наши вычисления сделаны с использованием этого технического (возможно, не только технического) трюка.

4. ЗАМЕЧАНИЯ

4.1. Статистическая сумма Оогури–Вафы. Чтобы продемонстрировать различные свойства полиномов ХОМФЛИ, например интегрируемость, зачастую удобнее работать с производящими функциями. Мы определяем производящую функцию [22] полиномов ХОМФЛИ как

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q) = \sum_R \mathcal{H}_R(A, q) S_R\{\bar{p}\} \quad (16)$$

и используем некоторые результаты из раздела 3. Во-первых, нам потребуется формула (5):

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q) = \sum_R \frac{\mathcal{H}_R(A, q)}{S_R\{p^*\}} S_R\{p^*\} S_R\{\bar{p}\} = \sum_R H_R(A, q) S_R\{p^*\} S_R\{\bar{p}\}.$$

Во-вторых, с помощью разложения (7) получаем

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q) = \sum_R ({}_0\sigma_R^{\mathcal{K}}(A) + {}_1\sigma_R^{\mathcal{K}}(A)z + {}_2\sigma_R^{\mathcal{K}}(A)z^2 + \cdots) S_R\{p^*\} S_R\{\bar{p}\}. \quad (17)$$

Наконец, в силу формулы (15) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q) &= \\ &= \sum_R (\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^{|R|} \exp \left\{ \sum_{j=1}^j \left(\frac{z}{(\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^2} \right)^j \sum_{i=1}^{j+1} \sum_{\Delta: |\Delta|=i} {}_j s_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A) \varphi_R(\Delta) \right\} S_R\{p^*\} S_R\{\bar{p}\} = \\ &= \sum_R \exp \left\{ \sum_{j=1}^j \left(\frac{z}{(\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^2} \right)^j \sum_{i=1}^{j+1} \sum_{\Delta: |\Delta|=i} {}_j s_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A) \widehat{W}_{\Delta} \right\} S_R\{\bar{p}\} S_R\{p^*\} (\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^{|R|} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^j \left(\frac{z}{(\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^2} \right)^j \sum_{i=1}^{j+1} \sum_{\Delta: |\Delta|=i} {}_j s_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A) \widehat{W}_{\Delta} \right\} \sum_R S_R\{\bar{p}\} S_R\{p^*\} (\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^{|R|}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q) &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^j \left(\frac{z}{(\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^2} \right)^j \sum_{i=1}^{j+1} \sum_{\Delta: |\Delta|=i} {}_j s_{\Delta}^{\mathcal{K}}(A) \widehat{W}_{\Delta} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \sum_k \frac{1}{k} (\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^k \bar{p}_k p_k^* \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

4.2. Интегрируемость. Интегрируемость статистической суммы Оогури–Вафы (16) означает, что она является тау-функцией иерархии КП. Линейная комбинация характеров $\sum_R \xi_R S_R\{\bar{p}\}$ есть тау-функция тогда и только тогда, когда коэффициенты ξ_R удовлетворяют бесконечному множеству квадратичных соотношений Плюккера:

$$\begin{aligned}
 \xi_{[22]}\xi_{[0]} - \xi_{[21]}\xi_{[1]} + \xi_{[2]}\xi_{[11]} &= 0, \\
 \xi_{[32]}\xi_{[0]} - \xi_{[31]}\xi_{[1]} + \xi_{[3]}\xi_{[11]} &= 0, \\
 \xi_{[221]}\xi_{[0]} - \xi_{[211]}\xi_{[1]} + \xi_{[2]}\xi_{[111]} &= 0, \\
 \xi_{[42]}\xi_{[0]} - \xi_{[41]}\xi_{[1]} + \xi_{[4]}\xi_{[11]} &= 0, \\
 \xi_{[33]}\xi_{[0]} - \xi_{[31]}\xi_{[2]} + \xi_{[3]}\xi_{[21]} &= 0, \\
 \xi_{[321]}\xi_{[0]} - \xi_{[311]}\xi_{[1]} + \xi_{[3]}\xi_{[111]} &= 0, \\
 \xi_{[222]}\xi_{[0]} - \xi_{[211]}\xi_{[11]} + \xi_{[21]}\xi_{[111]} &= 0, \\
 \xi_{[2211]}\xi_{[0]} - \xi_{[2111]}\xi_{[1]} + \xi_{[2]}\xi_{[1111]} &= 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

и т. д.

Приведем некоторые примеры.

4.2.1. Окружность. Полином ХОМФЛИ $H_R(A, q)$ для окружности равен единице. В этом случае статистическая сумма (18) упрощается до выражения

$$\mathcal{Z}^{\text{unknot}}(\bar{p}|A, q) = \exp\left\{\sum_k \frac{1}{k} \bar{p}_k p_k^*\right\}$$

и представляет собой простейшую тау-функцию иерархии КП, а характеры $S_R\{p\}$ удовлетворяют всем соотношениям Плюккера для любого $\{p\}$.

4.2.2. Предел слабой связи. Рассмотрим статистическую сумму Оогури–Вафы (17) в пределе слабой связи:

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q)|_{q=1} = \sum_R (\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^{|R|} S_R\{p^*\} S_R\{\bar{p}\}.$$

Соотношения Плюккера однородны по R , и $S_R\{p^*\}$ удовлетворяют соотношениям Плюккера, поэтому $(\sigma_1^{\mathcal{K}}(A))^{|R|} S_R\{p^*\}$ также удовлетворяют соотношениям Плюккера. Это означает, что для каждого узла *статистическая сумма Оогури–Вафы в планарном пределе является тау-функцией иерархии КП* [6].

К сожалению, полиномы ХОМФЛИ удовлетворяют соотношениям Плюккера только в пределе слабой связи, а в общем случае – нет. Поэтому можно связать соотношения Плюккера (19) только с классическими группами ($q \rightarrow 1$), тогда как общий случай $q \neq 1$, который включает квантовые группы, требует некоторого изменения соотношений Плюккера. Таким образом, ключевой момент в истории интегрируемости полиномов ХОМФЛИ состоит в следующем: необходимо сконструировать “квантовую” версию соотношений Плюккера, которая соответствует этим полиномам.

4.3. Связь с двухточечной статистической суммой Гурвица. Отметим сходство суммы (18) с двухточечной статистической суммой Гурвица, заданной следующей формулой [20]:

$$\mathcal{Z}(p, \bar{p}|\beta) = \exp\left\{\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \widehat{W}_{\Delta}\right\} \exp\left\{\sum_k \frac{1}{k} p_k \bar{p}_k\right\}.$$

Связь со статистической суммой Оогури–Вафы (18) обеспечивается особым выбором β_{Δ} и выходом из топологического локуса $p_k = p_k^*$. Статистическая сумма Гурвица является тау-функцией иерархии КП по p и по $\bar{p}$, если $\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \widehat{W}_{\Delta}$ – это любая (линейная) комбинация операторов Казимира [33], [37], в частности если $\beta_{[2]} \neq 0$, $\beta_{\Delta} = 0$ для всех $\Delta \neq [2]$. Статистическая сумма Оогури–Вафы вообще не является тау-функцией. Однако для торических узлов существует другое представление, полученное Россом и Джонсом [29], [38]:

$$\mathcal{Z}^{T[m,n]}(p, \bar{p}) = q^{-(n/m)\widehat{W}_{[2]}} \exp\left\{\sum_k \frac{1}{k} p_{mk} \bar{p}_k\right\}.$$

На основе этого представления легко проверить, что статистическая сумма Оогури–Вафы для торических узлов (и зацеплений) есть тау-функция иерархии КП по p (но не по $\bar{p}$) [8]. Однако неочевидно, как можно получить данный факт непосредственно из представления (18).

Более подробно о связи статистической суммы Оогури–Вафы со статистической суммой Гурвица можно узнать из работы [35]. В этой работе можно также более детально ознакомиться с интегрируемостью.

4.4. Топологическая рекурсия АММ/ЭО. Очень интересен вопрос о том, удовлетворяет ли разложение по родам (15) топологической рекурсии. Есть определенные свидетельства в пользу этого [30], но все же многое еще нужно сделать для лучшего понимания этой проблемы. Ситуация может упроститься, если представление матричной модели, которое в настоящий момент существует только для случая полиномов ХОМФЛИ торических узлов, станет известно также для произвольных узлов.

4.5. Разложение по родам в представлении матричной модели. В случае торических узлов можно задать представление вакуумных средних от петель Вильсона в терминах матричных интегралов [29], [39]. Точнее, это интеграл по алгебре Картана соответствующей группы (группы $SU(N)$ в нашем случае):

$$W_R^{T[m,n]} = \frac{1}{Z_{m,n}} \int du e^{-u^2/2mn\hbar} \prod_{\alpha>0} 4 \operatorname{sh} \frac{u\alpha}{2n} \operatorname{sh} \frac{u\alpha}{2m} S_R(e^u) = \frac{\langle S_R \rangle}{\langle 1 \rangle}, \quad (20)$$

где u – это элемент $\Lambda_w \otimes \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ – положительные корни и

$$Z_{m,n} = \int du e^{-u^2/2mn\hbar} \prod_{\alpha>0} 4 \operatorname{sh} \frac{u\alpha}{2n} \operatorname{sh} \frac{u\alpha}{2m} = \langle 1 \rangle.$$

В случае группы $SU(N)$ соотношение (20) приводит к формуле Россо–Джонса [29]. Другими словами, формула (20) дает неприведенные полиномы ХОМФЛИ:

$$\frac{\langle S_R \rangle}{\langle 1 \rangle} = H_R(A|q)|_{A=q^N} S_R^*.$$

С другой стороны, интеграл (20) в случае группы $SU(N)$ может рассматриваться как интеграл по собственным значениям эрмитовой матричной модели. Чтобы иметь дело со специальным полиномом, т. е. чтобы работать в пределе $q \rightarrow 1$, необходимо рассмотреть предел больших N (планарный предел) этой матричной модели. Так как S_R – это градуированный полином по $\{p_k\}$ градуировки $|R|$ и в пределе больших N все $p_k \sim N$, получаем

$$S_R \sim \frac{p_1^{|R|}}{d_R}, \quad \frac{\langle S_R \rangle}{\langle 1 \rangle} = \frac{\langle p_1^{|R|}/d_R \rangle}{\langle 1 \rangle} = \frac{\langle p_1^{|R|} \rangle}{d_R \langle 1 \rangle}. \quad (21)$$

Поскольку в планарном пределе корреляторы факторизуются,

$$\frac{\langle p_1^{|R|} \rangle}{\langle 1 \rangle} = \frac{\langle p_1 \rangle^{|R|}}{\langle 1 \rangle^{|R|}}, \quad \frac{\langle S_R \rangle}{\langle 1 \rangle} = \frac{\langle p_1 \rangle^{|R|}}{d_R \langle 1 \rangle^{|R|}}. \quad (22)$$

Таким образом, используя формулы (21) и (22), в планарном пределе получаем

$$\sigma_R = \frac{\langle S_R \rangle}{\langle 1 \rangle S_R^*} = \frac{\langle p_1 \rangle^{|R|}}{d_R \langle 1 \rangle^{|R|}} \frac{d_R}{p_1^{*|R|}} = \left(\frac{\langle p_1 \rangle}{p_1^* \langle 1 \rangle} \right)^{|R|}.$$

Теперь с помощью техники матричных моделей можно вычислить специальный полином σ_1 следующим образом [29]. Спектральная кривая, описывающая планарный предел, задана уравнением

$$y^n(y-1)^m = A^{-m-n}x^{-mn}(yA^2-1)^m, \quad (23)$$

где x и y лежат на кривой. Определим резольвенту $u\alpha$ формулой

$$G(x) = \left\langle \sum_{\alpha} \frac{x}{x - u\alpha} \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} \left\langle \sum_{\alpha} e^{ku\alpha/mn} \right\rangle.$$

В планарном пределе можно проверить, что резольвента $(u\alpha)^n$ равна $\hbar N - \ln y$ [29], другими словами,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{-kn} \left\langle \sum_{\alpha} e^{ku_i/m} \right\rangle = \hbar N - \ln y. \quad (24)$$

Так как $\langle \text{Tr } e^{u\alpha} \rangle = \sigma_1(A)$, уравнение (24) наряду с уравнением спектральной кривой (23) определяет специальный полином из слагаемого с $k = m$, ответ задается формулой (Б.2) приложения Б.

Следующие члены определяются топологической рекурсией АММ/ЭО [31] в матричной модели и нашими старшими полиномами в теории узлов. Нахождение явных соотношений для членов старшего порядка, как это было сделано в планарном пределе, требует дальнейших более тщательных исследований.

4.6. Связь с представлением Оогури–Вафы. Существует еще один естественный путь построения разложения по z , возникающий из теории топологической струны. А именно, в статье [22] авторы предположили, что теория Черна–Саймонса связана с теорией топологической струны на конифолде с разрешенной особенностью. Фактически они выдвинули гипотезу, что статистическая сумма Оогури–Вафы (16) связана со статистической суммой топологической струны. Топологическая природа этого объекта подразумевает, что “связанные” корреляторы $f_R(q, A)$ определяются разложением

$$\ln \mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q) = \sum_{n, R=0}^{\infty} \frac{1}{n} f_R(q^n, A^n) S_R(\bar{p}^{(n)}),$$

где переменные $p_k^{(n)} \equiv p_{nk}$. Эти корреляторы имеют общую структуру:

$$f_R(q, A) = \sum_{n, k} \tilde{N}_{R, n, k} \frac{A^n q^k}{q - q^{-1}}.$$

Следовательно, $f_R(q, A)$ имеет сингулярность типа $1/z$, тогда как соответствующий полином ХОМФЛИ ведет себя, как $1/z^{|R|}$, т. е. лидирующие члены разложения полинома ХОМФЛИ по z сокращаются, а величина $f_R(q, A)$ связана с более высокими порядками разложения по z . Коэффициенты $\tilde{N}_{R, n, k}$ являются целыми числами, и четность по n в сумме совпадает с четностью по $|R|$, тогда как четность по k обратная. Эти числа связаны с целыми числами Гопакумара–Вафы $n_{\Delta, n, k}$ [40] соотношением

$$n_{\Delta, n, k} = \sum_R d_R z_{\Delta} \varphi_R(\Delta) \tilde{N}_{R, n, k},$$

где z_{Δ} – стандартный симметрический фактор диаграммы Юнга (порядок автоморфизма) [21]. Целые числа $\tilde{N}_{R, n, k}$ обладают более тонкими свойствами, так как их целочисленность подразумевает, что $n_{\Delta, n, k}$ – целые числа, но не наоборот. Фактически можно рассмотреть целые числа с еще более тонкими свойствами [28]: числа

$$f_R(q, A) = \sum_{n, k, R_1, R_2} C_{RR_1 R_2} \Xi_{R_1}(q) N_{R_2, n, k} A^n z^{2k-1},$$

где

$$C_{RR_1 R_2} = \sum_{\Delta} z_{\Delta}^2 d_R^3 \varphi_R(\Delta) \varphi_{R_1}(\Delta) \varphi_{R_2}(\Delta),$$

являются коэффициентами Клебша–Гордона симметрической группы, а функция $\Xi_R(q)$ – ненулевым мономом только для угловых диаграмм Юнга $R = [l - d, 1^d]$; он равен $\Xi_R(q) = (-1)^d q^{2d-l+1}$.

Первые несколько членов для f_R имеют вид

$$\begin{aligned} f_{[1]}(q, A) &= H_{[1]}(q, A), \\ f_{[2]}(q, A) &= H_{[2]}(q, A) - \frac{1}{2}(H_{[1]}(q, A)^2 + H_{[2]}(q^2, A^2)), \\ f_{[11]}(q, A) &= H_{[11]}(q, A) - \frac{1}{2}(H_{[1]}(q, A)^2 - H_{[2]}(q^2, A^2)) \end{aligned}$$

или, в терминах $N_{R,n,k}$,

$$\begin{aligned} f_{[1]}(q, A) &= \sum_{n,k} N_{[1],n,k} z^{2k-1} A^n, \\ f_{[2]}(q, A) &= \sum_{n,k} (q^{-1} N_{[2],n,k} - q N_{[11],n,k}) z^{2k-1} A^n, \\ f_{[11]}(q, A) &= \sum_{n,k} (-q N_{[2],n,k} + q^{-1} N_{[11],n,k}) z^{2k-1} A^n. \end{aligned}$$

Выражения, связывающие f_R и полиномы ХОМФЛИ, являются существенно нелинейными, и сумма $\sum_n N_{R,n,k} A^n$ соотносится с нашими ${}_i\bar{\sigma}_R^K(A)$ абсолютно нетривиальным образом, за исключением фундаментального представления, когда они совпадают. Все же сейчас гипотеза Оогури–Вафы явно подтверждается в некоторых нетривиальных примерах [41]–[43] (более подробно см. рассуждения в [23] и в [44]).

4.7. Связь с инвариантами Васильева. Коэффициенты в старших специальных полиномах получаются из инвариантов Васильева. В рамках подхода Васильева [18] полином ХОМФЛИ можно записать как [26], [45]

$$H_R^K(A, q) \Big|_{\substack{A=e^{N\hbar/2} \\ q=e^{\hbar/2}}} = \sum_{i=0}^{\infty} \hbar^i \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_i} r_{i,j}^{(R)} v_{i,j}^K, \quad (25)$$

где $r_{i,j}^{(R)}$ – полиномы степени $|i|$ по N , соответствующие трехвалентным диаграммам [24], [26], а $\mathcal{N}_i$ – размерность векторного пространства, образованного трехвалентными диаграммами. Здесь $v_{i,j}^K$ – инварианты конечного типа, или инварианты Васильева для узла K . Таким образом, выражение в правой части формулы (25) является двойным рядом по степеням $\hbar$ и N таким, что степень величины $\hbar$ больше или равна степени величины N . Этот ряд может быть переписан как двойной ряд по неотрицательным степеням $\alpha = \hbar N$ и $\hbar$:

$$H_R^K(A, q) \Big|_{\substack{A=e^{N\hbar/2} \\ q=e^{\hbar/2}}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_R^{ij} \alpha^i \hbar^j.$$

Таким образом, слагаемые с нулевой степенью $\hbar$ контролируются специальным полиномом

$$\sigma_R^K(A) \Big|_{A=e^{\alpha/2}} = \sum_{i=1}^{\infty} c_R^{i0} \alpha^i.$$

Чтобы определить c_R^{ij} , надо найти трехвалентные диаграммы как полиномы по N . Мы рассматриваем их только до четвертого порядка:

$$\begin{aligned} r_{2,1}^{(R)} &= \frac{1}{4}(-|R|N^2 - 2\varphi_R([2])N + |R|^2), \\ r_{3,1}^{(R)} &= \frac{1}{8}N(|R|N^2 + 2\varphi_R([2])N - |R|^2), \\ r_{4,1}^{(R)} &= \frac{1}{16}(|R|^2N^4 + 4|R|\varphi_R([2])N^3 + 2(2\varphi_R^2([2]) - |R|^3)N^2 - 4\varphi_R([2])|R|^2N + |R|^4), \\ r_{4,2}^{(R)} &= \frac{1}{16}N^2(-|R|N^2 - 2\varphi_R([2])N + |R|^2), \\ r_{4,3}^{(R)} &= \frac{1}{16}(|R|N^4 + 6\varphi_R([2])N^3 + C_1N^2 - C_2N + 2|R|^3), \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 – некоторые коэффициенты.

Принимая во внимание только лидирующие члены, мы получаем специальный полином

$$\sigma_R^K(A)|_{A=e^{\alpha/2}} = 1 - \frac{1}{4}|R|v_{2,1}\alpha^2 + \frac{1}{8}|R|v_{3,1}\alpha^3 + \frac{1}{16}(|R|^2v_{4,1} - |R|v_{4,2} + |R|v_{4,3})\alpha^4 + \dots \quad (26)$$

Равенство $\sigma_R(A) = \sigma_1^{|R|}(A)$ влечет хорошо известные соотношения для инвариантов Васильева $v_{i,j}^K$:

$$v_{4,1} = \frac{1}{2}v_{2,1}^2, \quad v_{5,1} = v_{2,1}v_{3,1}, \quad v_{6,1} = \frac{1}{6}v_{2,1}^3, \dots$$

Первая поправка к специальному полиному контролирует слагаемые с первой степенью $\hbar$. С точки зрения трехвалентных диаграмм это соответствует следующим за лидирующим членам, т. е. мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} {}_1\bar{\sigma}_R^K(A)|_{A=e^{\alpha/2}} &= \sum_{i=1}^{\infty} c_R^{i1} \alpha^i, \\ (\sigma_1^K)^{|R|-2} {}_1\sigma_2^K \varphi_R([2]) &= -\frac{v_{2,1}}{2} \varphi_R([2])\alpha + \frac{v_{3,1}}{4} \varphi_R([2])\alpha^2 + \\ &+ \left(\frac{v_{4,1}}{4} |R| - \frac{v_{4,2}}{8} + \frac{3}{8} v_{4,3} \right) \varphi_R([2])\alpha^3 + \dots \end{aligned}$$

Представим ${}_1\sigma_2^K$ следующим образом:

$${}_1\sigma_2^K = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \alpha^i.$$

Это разложение начинается с линейного члена, следовательно, ${}_1\sigma_2^K \sim A^2 - 1$. Далее, учитывая соотношение (26), мы получаем

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}v_{2,1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{4}v_{3,1}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{8}(4v_{4,1} - v_{4,2} + 3v_{4,3}).$$

Данные формулы подразумевают, что

$$\frac{{}_1\sigma_2^K}{A^2-1}\Big|_{A=1} = -\frac{1}{2}v_{2,1}.$$

Рассмотрим теперь примеры трилистника и узла-восьмерки в фундаментальном представлении.

4.7.1. *Трилистник.* Инварианты Васильева для трилистника в первых четырех порядках таковы:

$$v_{0,1} = 1, \quad v_{1,1} = 1, \quad v_{2,1} = 4, \quad v_{3,1} = -8, \quad v_{4,1} = 8, \quad v_{4,2} = \frac{62}{3}, \quad v_{4,3} = \frac{10}{3}.$$

Из формулы (25) получаем

$$\begin{aligned} H_{[1]}^{3_1}(A, q)\Big|_{\substack{A=e^{N\hbar/2} \\ q=e^{\hbar/2}}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \hbar^i \sum_{j=1}^{N_i} r_{i,j} v_{i,j} = \\ &= 1 + \hbar^2 \frac{-(N^2-1)}{4} \cdot 4 + \hbar^3 \frac{N(N^2-1)}{8} \cdot (-8) + \\ &+ \hbar^4 \left(\left(\frac{-(N^2-1)}{4} \right)^2 8 + \frac{-N^2(N^2-1)}{16} \frac{62}{3} + \frac{(N^2-1)(N^2+2)}{16} \frac{10}{3} \right) + o(\hbar^5). \end{aligned}$$

Теперь легко получить разложение по родам, введя переменную $\alpha = \hbar N$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(A)\Big|_{A=e^{\alpha/2}} &= 1 + \frac{-\alpha^2}{4} \cdot 4 + \frac{\alpha^3}{8} \cdot (-8) + \left(\frac{\alpha^4}{16} 8 + \frac{-\alpha^4}{16} \frac{62}{3} + \frac{\alpha^4}{16} \frac{10}{3} \right) + O(\alpha^5) = \\ &= 1 - \alpha^2 - \alpha^3 - \frac{7}{12}\alpha^4 + o(\alpha^5). \end{aligned}$$

4.7.2. *Узел-восьмерка.* Инварианты Васильева для узла-восьмерки в первых четырех порядках таковы:

$$v_{0,1} = 1, \quad v_{1,1} = 1, \quad v_{2,1} = -4, \quad v_{3,1} = 0, \quad v_{4,1} = 8, \quad v_{4,2} = \frac{34}{3}, \quad v_{4,3} = \frac{14}{3}.$$

Действительно, учитывая, что узел-восьмерка полностью симметричен (в частности, при преобразовании $q \leftrightarrow q^{-1}$, которое соответствует зеркальному отображению), с очевидностью заключаем, что инварианты Васильева для всех нечетных порядков обращаются в нуль.

Из формулы (25) имеем

$$\begin{aligned} H_{[1]}^{4_1}(A, q)\Big|_{\substack{A=e^{N\hbar/2} \\ q=e^{\hbar/2}}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \hbar^i \sum_{j=1}^{N_i} r_{i,j} v_{i,j} = \\ &= 1 + \hbar^2 \frac{-(N^2-1)}{4} \cdot (-4) + \hbar^3 \frac{N(N^2-1)}{8} \cdot 0 + \\ &+ \hbar^4 \left(\left(\frac{-(N^2-1)}{4} \right)^2 8 + \frac{-N^2(N^2-1)}{16} \frac{34}{3} + \frac{(N^2-1)(N^2+2)}{16} \frac{14}{3} \right) + o(\hbar^5). \end{aligned}$$

Теперь просто получить разложение по родам, введя переменную $\alpha = \hbar N$:

$$\begin{aligned}\sigma_1(A)|_{A=e^{\alpha/2}} &= 1 + \frac{-\alpha^2}{4} \cdot (-4) + \left(\frac{\alpha^4}{16} 8 + \frac{-\alpha^4}{16} \frac{34}{3} + \frac{\alpha^4}{16} \frac{14}{3} \right) + O(\alpha^5) = \\ &= 1 + \alpha^2 + \frac{1}{12} \alpha^4 + o(\alpha^6) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2j}}{(2j)!}.\end{aligned}$$

Старшие специальные полиномы требуют дальнейшего тщательного исследования.

4.8. Полином Александера. При $A = 1$ полином ХОМФЛИ превращается в полином Александера $\aleph_R^{\mathcal{K}}(q)$; таким образом, соотношения (8), (11) и (15) обеспечивают разложение по родам для этих полиномов. Однако многие члены в этих разложениях равны нулю, в результате большое количество специальных полиномов ${}_i s_{\Delta}$ пропадает при $A = 1$ для некоторых узлов $\mathcal{K}$. Среди прочего, необходимое условие “двойственной факторизации” [14], [42] выполняется для диаграмм R типа крюка:

$$\aleph_R(q) = \aleph_{\square}(q^{|R|}). \quad (27)$$

Рассмотрим в этом случае предел больших $|R| = r$ при условии, что $q = e^{u/r}$. Из равенства (27) следует, что $\aleph_R(q)$ – это всего лишь $\aleph_{\square}(e^u)$, т.е. этот полином не возрастает с ростом r . С другой стороны, в формуле (11) существуют несколько членов, которые растут линейно с ростом r , тогда как $z \sim 1/r$, а $\varphi_R(\Delta)$ растет не быстрее чем $r^{|\Delta|}$. Коэффициент перед этими линейно растущими членами должен быть равен нулю. Например, $\varphi_R([2]) \sim r^2$, другими словами, член $z\varphi_R([2])_1\sigma_2 \sim r$ в (11) должен обращаться в нуль, и это означает, что ${}_1s_2 = 0$ при $A = 1$. По той же причине ${}_k\sigma_{k+1}^{\mathcal{K}} = 0$ для всех k .

4.9. Предел больших $|R|$. Теперь рассмотрим симметрическое представление и предел большого размера диаграммы $|R| \rightarrow \infty$ при условии, что N фиксированно и конечно, положив $q = e^{u/|R|}$ и $A = q^N = e^{uN/|R|}$. Тогда разложение специального полинома (11) будет означать, что решение ведет себя следующим образом:

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} \sim \sigma_1^{\mathcal{K}}(A)^{|R|} = e^{|R| \ln \sigma_1^{\mathcal{K}}(A)}, \quad (28)$$

т.е. возрастает экспоненциально с ростом $|R| = r$ в соответствии с гипотезой объема [27].

Однако все не так просто, и имеется сильная зависимость от u . Во-первых, поправки к этой формуле могут также давать вклад в экспоненциальный рост. Несомненно, это следующая поправка:

$$\exp \left\{ z \frac{\varphi_R([2])_1 \sigma_2^{\mathcal{K}}(A)}{(\sigma_{\square}(A))^2} \right\}.$$

Проще говоря, $z\varphi_R([2])_1\sigma_2^{\mathcal{K}}(A)$ возрастает линейно при большом r . Однако, как мы только что видели в предыдущем пункте, в силу того что ${}_1\sigma_2^{\mathcal{K}}(A) = 0$ при $A = 1$, на практике линейного роста нет. Подобным образом все члены, которые могли бы расти линейно с ростом r , не делают этого по той же причине, что и в предыдущем

пункте. Это согласуется с хорошо известным фактом, что для достаточно малого u экспоненциальный рост в $J_r(q)|_{q=e^{u/r}}$ отсутствует. Вместо этого

$$J_r(q)|_{q=e^{u/r}} = \exp\left\{\sum_{k \geq 0} \left(\frac{u}{r}\right)^{2k} f_k(u)\right\} = \left(\frac{1}{\aleph(q)} + \sum_{k \geq 1} r^{-k} \frac{w_k(q)}{(\aleph(q))^k}\right)\bigg|_{q=e^{u/r}}$$

с некоторыми полиномами w_k (эта формула была применена для узла-восьмерки в работе [46] и для общих узлов в работе [47] на основе гипотезы Мелвина–Мортон–Рожанского [48]). В частности, $f_0(u) = -\ln \aleph(q)|_{q=e^{u/r}}$, и это замечательно согласуется с разложением специального полинома.

Только когда e^u больше наименьшего корня полинома Александра, возникает другое решение с $f_{-1}(u) \neq 0$. В то же время, если выбрать $u = 2\pi i$, то мы имеем экспоненциальное поведение (28) [49], и результирующий коэффициент перед $|R|$ для полинома Джонса ($A = q^2$) равен гиперболическому объему узла [27] (“гипотеза объема”).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали разложение полинома узла в окрестности точки $q = 1$ при фиксированном $A = q^N$. В действительности это разложение по родам, т. е. разложение слабой связи и большого N при фиксированном значении константы связи t Хоффа A , $\ln A = N \ln q$. В представлении матричной модели, где полиномы узлов являются средними значениями характеров,

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(A, q) = \langle S_R(U) \rangle^{\mathcal{K}},$$

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(\bar{p}|A, q) = \sum_R \mathcal{H}_R(A, q) S_R\{\bar{p}\} = \left\langle \exp\left\{\sum_k \frac{1}{k} \bar{p}_k \operatorname{Tr} U^k\right\}\right\rangle^{\mathcal{K}},$$

данное разложение должно контролироваться топологической рекурсией [31], и основной вопрос состоит в том, является ли эта рекурсия стандартной рекурсией типа Вирасоро или это нечто совершенно иное. В данный момент неясно, как симметрия типа симметрии Вирасоро может выглядеть для полиномов узлов, также остаются некоторые проблемы, связанные с интегрируемостью [7], хотя уже имеются нетривиальные свидетельства в пользу стандартной топологической рекурсии [30], [50].

Заметим, что до сих пор представление матричной модели известно только для полиномов ХОМФЛИ торических узлов [29], [39]. Однако, как мы видели в п. 4.5, факторизация специальных полиномов с точки зрения матричных моделей – это просто факторизация корреляторов в планарном пределе. Поскольку факторизация специальных полиномов является общим свойством, не ограниченным торическими узлами [14], [42], можно сделать предположение, что существует представление матричной модели для произвольных неторических узлов.

В нашей работе мы подошли к изучению проблемы разложения в окрестности точки $q = 1$ напрямую, просто разложив известные полиномы ХОМФЛИ по степеням $z = q - q^{-1} = 2 \operatorname{sh} \hbar$. Основной акцент мы сделали на зависимости от представления, так как она тесно связана со всеми свойствами интегрируемости статистической суммы $\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}\{\bar{p}\}$ Оогури–Вафы, остающимися до сих пор неясными. В сферическом

пределе, когда $q = 1$, свойство факторизации (1) подразумевает интегрируемость типа интегрируемости иерархии КП и цепочки Тоды [6], [7]. Однако поправки более высокого рода портят это свойство: средние значения характеров не вполне являются характеристиками (см. тем не менее работу [51]), и вопрос состоит в том, чем же они являются, какова алгебраическая природа полиномов ХОМФЛИ и других полиномов узлов.

Мы, как и следовало ожидать, обнаружили, что зависимость поправок более высокого рода от R сохраняется как чисто алгебраическая: она контролируется характеристиками $\varphi_R(\Delta)$ симметрической группы, которые появляются при исследовании статистической суммы Гурвица [20]. Но в то же время коэффициенты являются функциями от константы связи t' Хоофта A . Они зависят от узла, и мы называем их старшими специальными полиномами, по крайней мере до тех пор, когда будет понят их истинный смысл. Их, конечно, можно выразить через числа Оогури–Ваффы, но нетривиальным и все еще туманным образом. Они также связаны с инвариантами Васильева, появляющимися в обычном разложении слабой связи (при конечном N), и тот факт, что эти функции являются полиномами по A , подразумевает наличие бесконечного числа нелинейных соотношений между инвариантами Васильева – одни из них универсальны, другие зависят от конкретного узла.

Более того, мы нашли некоторые из этих функций в явном виде для некоторых узлов и заметили, что существуют универсальные (не зависящие от узла) соотношения между старшими специальными полиномами. Эти соотношения обеспечивают представление разложения по родам в виде экспоненты и, следовательно, уменьшают число независимых специальных полиномов универсальным и “умным” образом. Все же остается открытым вопрос о том, как подходящим образом нумеровать эти независимые полиномы. Они зависят от двух представлений (диаграмм Юнга) R и Δ как характеры симметрической группы $\varphi_R(\Delta)$.

Какой-то свет на особенности старших специальных полиномов можно пролить, изучая переход $A = 1$ от полиномов ХОМФЛИ к полиномам Александера, когда специальные полиномы сводятся к нескольким из них. Многие из них просто исчезают, но многие остаются. Свойство “двойственной факторизации” (27) [42], [14] налагает дополнительные связи на эти числа.

Очень интересно было бы рассмотреть переход от разложения по родам полиномов ХОМФЛИ к суперполиномам. Предварительно мы можем отметить следующее: W -операторы [20], которые имели полиномы Шура в качестве своих обычных собственных векторов и характеры симметрической группы $\varphi_R(\Delta)$ в качестве своих собственных значений, поднимаются до своих аналогов типа Макдональда, которые, как известно [6], контролируют эволюцию суперполиномов, по меньшей мере в семействах торических узлов. Некоторые характерные особенности этого разложения по родам и особенно поправок первого порядка обсуждаются в работах [15], [16], но в этом вопросе все еще остается некоторая неясность.

Реальной проблемой прямого подхода к разложению по родам является почти полное отсутствие знаний о полиномах узлов в нетривиальных (несимметрических и кососимметрических) представлениях. До сих пор существует только небольшое количество результатов по исследованию торических и твистованных узлов. Как мы показали в нашей статье, нетривиальные представления начинают вносить свой

вклад начиная с поправок третьего порядка по z в случае полиномов ХОМФЛИ, а в случае суперполиномов наблюдаются уже в первом порядке. Следовательно, дальнейшее развитие вычислений полиномов узлов в духе работ [7], [8], [41] или любых других остается весьма важным. Не менее важны исследования топологической рекурсии для полиномов узлов, основанные на идеях из работ [29], [30] и [50], но они также очень трудоемки и менее доходчивы, чем прямой подход.

В любом случае в настоящей работе мы показали, что разложение по родам для полиномов узлов, несомненно, интересно, раскрывает нетривиальные связи с различными ветвями науки и заслуживает всевозможного внимания наряду с другими направлениями исследований в теории Черна–Саймонса – нашем следующем основном шаге после двумерной конформной теории при изучении фундаментальных свойств квантового поля и теории струн.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Примеры старших специальных полиномов

А.1. Примеры структурных констант. Здесь мы приводим список некоторых примеров структурных констант из соотношений (13): таблица умножения приводится для $|\Delta| \leq 4$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[1]} &= \widehat{W}_{[1]} + 2\widehat{W}_{[11]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[2]} &= 2\widehat{W}_{[2]} + \widehat{W}_{[21]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[11]} &= 2\widehat{W}_{[11]} + 3\widehat{W}_{[111]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[3]} &= 3\widehat{W}_{[3]} + \widehat{W}_{[31]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[21]} &= 3\widehat{W}_{[2,1]} + 2\widehat{W}_{[211]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[111]} &= 3\widehat{W}_{[1,1,1]} + 4\widehat{W}_{[1111]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[4]} &= 4\widehat{W}_{[4]} + \widehat{W}_{[41]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[31]} &= 4\widehat{W}_{[31]} + 2\widehat{W}_{[311]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[22]} &= 4\widehat{W}_{[22]} + \widehat{W}_{[221]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[211]} &= 4\widehat{W}_{[211]} + 3\widehat{W}_{[2111]}, \\
 \widehat{W}_{[1]} \widehat{W}_{[1111]} &= 4\widehat{W}_{[1111]} + 5\widehat{W}_{[11111]}, \\
 \widehat{W}_{[11]} \widehat{W}_{[2]} &= \widehat{W}_{[2]} + 2\widehat{W}_{[21]} + \widehat{W}_{[211]}, \\
 \widehat{W}_{[11]} \widehat{W}_{[11]} &= \widehat{W}_{[11]} + 6\widehat{W}_{[111]} + 6\widehat{W}_{[1111]}, \\
 \widehat{W}_{[2]} \widehat{W}_{[2]} &= \widehat{W}_{[11]} + 3\widehat{W}_{[3]} + 2\widehat{W}_{[22]}, \\
 \widehat{W}_{[11]} \widehat{W}_{[3]} &= 3\widehat{W}_{[3]} + 3\widehat{W}_{[31]} + \widehat{W}_{[311]}, \\
 \widehat{W}_{[11]} \widehat{W}_{[21]} &= 3\widehat{W}_{[21]} + 6\widehat{W}_{[211]} + \widehat{W}_{[2111]}, \\
 \widehat{W}_{[11]} \widehat{W}_{[111]} &= 3\widehat{W}_{[111]} + 12\widehat{W}_{[1111]} + 10\widehat{W}_{[11111]},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_{[2]}\widehat{W}_{[3]} &= \widehat{W}_{[32]} + 4\widehat{W}_{[4]} + 2\widehat{W}_{[21]}, \\
\widehat{W}_{[2]}\widehat{W}_{[21]} &= 2\widehat{W}_{[221]} + 3\widehat{W}_{[31]} + 4\widehat{W}_{[22]} + 3\widehat{W}_{[3]} + 3\widehat{W}_{[111]}, \\
\widehat{W}_{[2]}\widehat{W}_{[111]} &= \widehat{W}_{[21]} + 2\widehat{W}_{[211]} + \widehat{W}_{[2111]}
\end{aligned}$$

и т. д.

Следующие пять пунктов приложения содержат формулы для первых полиномов $i\sigma_\Delta$ в случае некоторых узлов и для семейства твистованных узлов. Выписывая полиномы вплоть до определенного размера $|\Delta|$ диаграммы Юнга, мы приводим только ненулевые полиномы.

А.2. Трилистник. В данном случае

$$\sigma_1(A) = \frac{2 - A^2}{A}, \quad {}_1\sigma_2(A) = \frac{(A - 1)(A + 1)(3A^2 - 5)}{A^2}.$$

Ненулевые полиномы $i\sigma_\Delta(A)$, отвечающие бóльшим $|\Delta|$, приведены ниже.

Для $i = 2$ имеем вплоть до $|\Delta| = 5$

$$\begin{aligned}
\Delta = [1] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2 - A^2)^3}{A^4}, \\
\Delta = [11] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2 - A^2)^2(-22A^2 + 17 + 9A^4)}{2A^4}, \\
\Delta = [3] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)(27A^2 - 44)(A - 1)^2(A + 1)^2}{2A^4}, \\
\Delta = [22] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A - 1)^2(A + 1)^2(3A^2 - 5)^2}{A^4}.
\end{aligned}$$

Для $i = 3$ имеем вплоть до $|\Delta| = 6$

$$\begin{aligned}
\Delta = [2] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{5(A^2 - 2)^4(A - 1)(A + 1)(7A^2 - 17)}{8A^6}, \\
\Delta = [21] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{4(A^2 - 2)^3(A - 1)(A + 1)(27A^4 - 65A^2 + 43)}{3A^6}, \\
\Delta = [4] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^2(A - 1)(A + 1)(432A^6 - 1568A^4 + 1829A^2 - 683)}{6A^6}, \\
\Delta = [211] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^2(A - 1)(A + 1)(3A^2 - 5)(9A^4 - 22A^2 + 17)}{2A^6}, \\
\Delta = [32] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)(A - 1)^3(A + 1)^3(27A^2 - 44)(3A^2 - 5)}{2A^6}, \\
\Delta = [222] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A - 1)^3(A + 1)^3(3A^2 - 5)^3}{A^6}.
\end{aligned}$$

Для $i = 4$ имеем вплоть до $|\Delta| = 8$

$$\begin{aligned}
\Delta = [11] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^6(3A^4 - 13A^2 + 11)}{A^8}, \\
\Delta = [3] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^5(270A^2 - 391)(A - 1)^2(A + 1)^2}{3A^8}, \\
\Delta = [111] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^5(243A^6 - 781A^4 + 905A^2 - 376)}{3A^8}, \\
\Delta = [31] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^4}{8A^8} \times \\
&\quad \times (-11390A^2 + 15643A^4 - 9540A^6 + 2187A^8 + 3060), \\
\Delta = [22] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^4}{12A^8} \times \\
&\quad \times (6089 - 21872A^2 + 30112A^4 - 18412A^6 + 4203A^8), \\
\Delta = [1111] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{3(A^2 - 2)^4(17 - 22A^2 + 9A^4)^2}{4A^8}, \\
\Delta = [5] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^3}{24A^8} \times \\
&\quad \times (10125A^6 - 36872A^4 + 42814A^2 - 15576)(A - 1)^2(A + 1)^2, \\
\Delta = [311] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^3(27A^2 - 44)(17 - 22A^2 + 9A^4)(A - 1)^2(A + 1)^2}{4A^8}, \\
\Delta = [221] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^3}{3A^8} \times \\
&\quad \times (3A^2 - 5)(216A^4 - 511A^2 + 329)(A - 1)^2(A + 1)^2, \\
\Delta = [42] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^2(3A^2 - 5)}{6A^8} \times \\
&\quad \times (432A^6 - 1568A^4 + 1829A^2 - 683)(A - 1)^2(A + 1)^2, \\
\Delta = [33] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^2(27A^2 - 44)^2(A - 1)^4(A + 1)^4}{4A^8}, \\
\Delta = [2211] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)^2(17 - 22A^2 + 9A^4)(A - 1)^2(A + 1)^2(3A^2 - 5)^2}{2A^8}, \\
\Delta = [322] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^2 - 2)(27A^2 - 44)(3A^2 - 5)^2(A - 1)^4(A + 1)^4}{2A^8}, \\
\Delta = [2222] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A - 1)^4(A + 1)^4(3A^2 - 5)^4}{A^8}.
\end{aligned}$$

А.3. Узел $T[2, 5]$. В данном случае

$$\sigma_1(A) = \frac{3 - 2A^2}{A}, \quad {}_1\sigma_2(A) = \frac{(A - 1)(A + 1)(17A^2 - 23)}{A^2}.$$

Ненулевые полиномы ${}_i\sigma_\Delta(A)$, отвечающие бóльшим $|\Delta|$, приведены ниже.

Для $i = 2$ вплоть до $|\Delta| = 6$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta = [1] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2A^2 - 3)^3(A - 2)(A + 2)}{A^4}, \\ \Delta = [11] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2A^2 - 3)^2(83A^4 - 194A^2 + 123)}{2A^4}, \\ \Delta = [3] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2A^2 - 3)(440A^2 - 587)(A - 1)^2(A + 1)^2}{2A^4}, \\ \Delta = [22] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A - 1)^2(A + 1)^2(17A^2 - 23)^2}{A^4}.\end{aligned}$$

Для $i = 3$ имеем вплоть до $|\Delta| = 6$

$$\begin{aligned}\Delta = [2] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{235(2A^2 - 3)^4(A - 1)(A + 1)(3A^2 - 5)}{8A^6}, \\ \Delta = [21] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{2(2A^2 - 3)^3(A - 1)(A + 1)(1427A^4 - 3257A^2 + 1926)}{3A^6}, \\ \Delta = [4] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2A^2 - 3)^2(A - 1)(A + 1)}{6A^6} \times \\ &\quad \times (20303A^6 - 67601A^4 + 74088A^2 - 26712), \\ \Delta = [211] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2A^2 - 3)^2(A - 1)(A + 1)(17A^2 - 23)(83A^4 - 194A^2 + 123)}{2A^6}, \\ \Delta = [32] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(2A^2 - 3)(A - 1)^3(A + 1)^3(440A^2 - 587)(17A^2 - 23)}{2A^6}, \\ \Delta = [222] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A - 1)^3(A + 1)^3(17A^2 - 23)^3}{A^6}.\end{aligned}$$

Для $i = 4$ имеем вплоть до $|\Delta| = 8$

$$\begin{aligned}\Delta = [1] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= -\frac{(-3 + 2A^2)^7}{A^8}, \\ \Delta = [11] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(-3 + 2A^2)^6(263 - 379A^2 + 133A^4)}{A^8}, \\ \Delta = [3] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{2(-3 + 2A^2)^5(6320A^2 - 8063)(A - 1)^2(A + 1)^2}{3A^8}, \\ \Delta = [111] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(-3 + 2A^2)^5(-14191 + 37290A^2 - 33663A^4 + 10429A^6)}{3A^8}, \\ \Delta = [31] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(-3 + 2A^2)^4}{8A^8} \times \\ &\quad \times (206277 - 781148A^2 + 1106241A^4 - 696058A^6 + 164376A^8), \\ \Delta = [22] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(-3 + 2A^2)^4}{12A^8} \times \\ &\quad \times (-1532420A^2 + 2165076A^4 - 1360752A^6 + 320633A^8 + 408399), \\ \Delta = [1111] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{3(-3 + 2A^2)^4(123 - 194A^2 + 83A^4)^2}{4A^8},\end{aligned}$$

$$\Delta = [5] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(-3 + 2A^2)^3(A-1)^2(A+1)^2}{24A^8} \times \\ \times (1373736A^6 - 4574446A^4 + 4997116A^2 - 1785093),$$

$$\Delta = [311] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(-3 + 2A^2)^3(A-1)^2(A+1)^2}{4A^8} \times \\ \times (440A^2 - 587)(123 - 194A^2 + 83A^4),$$

$$\Delta = [221] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(-3 + 2A^2)^3(17A^2 - 23)(A-1)^2(A+1)^2}{3A^8} \times \\ \times (5657A^4 - 12755A^2 + 7428),$$

$$\Delta = [42] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(-3 + 2A^2)^2(17A^2 - 23)(A-1)^2(A+1)^2}{6A^8} \times \\ \times (20303A^6 - 67601A^4 + 74088A^2 - 26712),$$

$$\Delta = [33] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(-3 + 2A^2)^2(440A^2 - 587)^2(A-1)^4(A+1)^4}{4A^8},$$

$$\Delta = [2211] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(-3 + 2A^2)^2(A-1)^2(A+1)^2(17A^2 - 23)^2}{2A^8} \times \\ \times (123 - 194A^2 + 83A^4),$$

$$\Delta = [322] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(-3 + 2A^2)(440A^2 - 587)(17A^2 - 23)^2(A-1)^4(A+1)^4}{2A^8},$$

$$\Delta = [2222] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(A-1)^4(A+1)^4(17A^2 - 23)^4}{A^8}.$$

А.4. Узел $T[3, 4]$. В данном случае

$$\sigma_1(A) = \frac{A^4 - 5A^2 + 5}{A^2}, \quad {}_1\sigma_2(A) = \frac{(A-1)(A+1)(8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98)}{A^4}.$$

Ненулевые полиномы ${}_i\sigma_{\Delta}(A)$, отвечающие бóльшим $|\Delta|$, приведены ниже.

Для $i = 2$ вплоть до $|\Delta| = 6$ имеем

$$\Delta = [1] : \quad {}_2\sigma_{\Delta}(A) = \frac{-5(A^4 - 5A^2 + 5)^3(A^2 - 2)}{A^8},$$

$$\Delta = [11] : \quad {}_2\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^2(-477A^6 + 1312A^4 - 1529A^2 + 650 + 64A^8)}{2A^8},$$

$$\Delta = [3] : \quad {}_2\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)(A-1)^2(A+1)^2}{2A^8} \times \\ \times (192A^8 - 1907A^6 + 6989A^4 - 11049A^2 + 6160),$$

$$\Delta = [22] : \quad {}_2\sigma_{\Delta}(A) = \frac{(A-1)^2(A+1)^2(8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98)^2}{A^8}.$$

Для $i = 3$ имеем вплоть до $|\Delta| = 6$

$$\begin{aligned}
 \Delta = [2] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{5(A^4 - A^2 + 5)^4(A-1)(A+1)}{8A^{12}} \times \\
 &\quad \times (680A^6 - 4579A^4 + 11027A^2 - 8498), \\
 \Delta = [21] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^3(A-1)(A+1)}{3A^{12}} \times \\
 &\quad \times (2048A^{10} - 20610A^8 + 81573A^6 - \\
 &\quad - 157361A^4 + 145965A^2 - 52195), \\
 \Delta = [4] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^2(A-1)(A+1)}{6A^{12}} \times \\
 &\quad \times (8192A^{14} - 118975A^{12} + 723388A^{10} - 2374550A^8 + \\
 &\quad + 4517500A^6 - 4952762A^4 + 2889917A^2 - 692540), \\
 \Delta = [211] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^2(A-1)(A+1)}{2A^{12}} \times \\
 &\quad \times (8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98) \times \\
 &\quad \times (-477A^6 + 1312A^4 - 1529A^2 + 650 + 64A^8), \\
 \Delta = [32] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)}{2A^{12}} \times \\
 &\quad \times (A-1)^3(A+1)^3(8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98) \times \\
 &\quad \times (192A^8 - 1907A^6 + 6989A^4 - 11049A^2 + 6160), \\
 \Delta = [222] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A-1)^3(A+1)^3(8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98)^3}{A^{12}}.
 \end{aligned}$$

Для $i = 4$ имеем вплоть до $|\Delta| = 8$

$$\begin{aligned}
 \Delta = [1] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= -\frac{-(A^4 - 5A^2 + 5)^7(A^2 - 6)}{A^{16}}, \\
 \Delta = [11] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^6}{2A^{16}} \times \\
 &\quad \times (-2719A^6 + 8334A^4 - 10751A^2 + 4950 + 336A^8), \\
 \Delta = [3] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^5(A-1)^2(A+1)^2}{6A^{16}} \times \\
 &\quad \times (27600A^8 - 236483A^6 + 772316A^4 - 1129785A^2 + 601045), \\
 \Delta = [111] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^5}{6A^{16}} \times \\
 &\quad \times (-252572A^{10} + 1073187A^8 - 2398926A^6 + \\
 &\quad + 2954196A^4 - 1899956A^2 + 500665 + 24576A^{12}), \\
 \Delta = [31] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^4}{8A^{16}} \times \\
 &\quad \times (7056904 + 82299068A^4 - 36938869A^2 + 76452748A^8 - \\
 &\quad - 101809662A^6 + 10172398A^{12} - 35724884A^{10} + \\
 &\quad + 110592A^{16} - 1618975A^{14}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = [22] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^4}{12A^{16}} \times \\
&\quad \times (13937464 + 161289145A^4 - 72632094A^2 + 148949118A^8 - \\
&\quad - 198933448A^6 + 19703861A^{12} - 69398084A^{10} + \\
&\quad + 212928A^{16} - 3126850A^{14}), \\
\Delta = [1111] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{3(A^4 - 5A^2 + 5)^4}{4A^{16}} \times \\
&\quad \times (64A^8 - 477A^6 + 1312A^4 - 1529A^2 + 650)^2, \\
\Delta = [5] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^3(A - 1)^2(A + 1)^2}{24A^{16}} \times \\
&\quad \times (512000A^{16} - 8768755A^{14} + 64624025A^{12} - \\
&\quad - 266794450A^{10} + 672123335A^8 - 1053157134A^6 + \\
&\quad + 997632397A^4 - 520542457A^2 + 114331124), \\
\Delta = [311] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^3(A - 1)^2(A + 1)^2}{4A^{16}} \times \\
&\quad \times (64A^8 - 477A^6 + 1312A^4 - 1529A^2 + 650) \times \\
&\quad \times (192A^8 - 1907A^6 + 6989A^4 - 11049A^2 + 6160), \\
\Delta = [221] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^3(A - 1)^2(A + 1)^2}{3A^{16}} \times \\
&\quad \times (8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98) \times \\
&\quad \times (4096A^{10} - 41100A^8 + 162021A^6 - \\
&\quad - 310867A^4 + 286290A^2 - 101450), \\
\Delta = [42] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^2(A - 1)^2(A + 1)^2}{6A^{16}} \times \\
&\quad \times (8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98) \times \\
&\quad \times (8192A^{14} - 118975A^{12} + 723388A^{10} - 2374550A^8 + \\
&\quad + 4517500A^6 - 4952762A^4 + 2889917A^2 - 692540), \\
\Delta = [33] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^2(A - 1)^4(A + 1)^4}{4A^{16}} \times \\
&\quad \times (192A^8 - 1907A^6 + 6989A^4 - 11049A^2 + 6160)^2, \\
\Delta = [2211] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A^4 - 5A^2 + 5)^2(A - 1)^2(A + 1)^2}{2A^{16}} \times \\
&\quad \times (8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98)^2 \times \\
&\quad \times (64A^8 - 477A^6 + 1312A^4 - 1529A^2 + 650), \\
\Delta = [322] : \quad {}_4\sigma_{\Delta}(A) &= \frac{(A - 1)^4(A + 1)^4(A^4 - 5A^2 + 5)}{2A^{16}} \times \\
&\quad \times (8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98)^2 \times \\
&\quad \times (192A^8 - 1907A^6 + 6989A^4 - 11049A^2 + 6160),
\end{aligned}$$

$$\Delta = [2222] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) = \frac{(A-1)^4(A+1)^4(8A^6 - 59A^4 + 139A^2 - 98)^4}{A^{16}}.$$

А.5. Узел-восьмерка. В данном случае

$$\sigma_1(A) = \frac{A^4 - A^2 + 1}{A^2}, \quad {}_1\sigma_2(A) = \frac{(A-1)(A+1)(A^2+1)(2A^4 - 3A^2 + 2)}{A^4}.$$

Ненулевые полиномы ${}_i\sigma_\Delta(A)$ вплоть до $|\Delta| = 3$ приведены ниже.

Для $i = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta = [1] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{-(A^4 - A^2 + 1)^3}{A^6}, \\ \Delta = [11] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - A^2 + 1)^2(-9A^6 + 6A^4 - 9A^2 + 4A^8 + 4)}{2A^8}, \\ \Delta = [3] : \quad {}_2\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - A^2 + 1)(A-1)^2(A+1)^2}{2A^8} \times \\ &\quad \times (12A^8 - A^6 - 3A^4 - A^2 + 12). \end{aligned}$$

Для $i = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta = [2] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - A^2 + 1)^4(A^4 - 1)(10A^4 - 43A^2 + 10)}{8A^{12}}, \\ \Delta = [21] : \quad {}_3\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - A^2 + 1)^3(A^4 - 1)}{3A^{12}} \times \\ &\quad \times (32A^8 - 83A^6 + 94A^4 - 83A^2 + 32). \end{aligned}$$

Для $i = 4$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta = [11] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - A^2 + 1)^6(-7A^6 + 10A^4 - 7A^2 + A^8 + 1)}{2A^{16}}, \\ \Delta = [3] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - A^2 + 1)^5(A-1)^2(A+1)^2}{6A^{16}} \times \\ &\quad \times (105A^8 - 109A^6 - 123A^4 - 109A^2 + 105), \\ \Delta = [111] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) &= \frac{(A^4 - A^2 + 1)^5}{6A^{16}} \times \\ &\quad \times (-283A^{10} + 308A^8 - 260A^6 + 96A^{12} + 308A^4 - 283A^2 + 96). \end{aligned}$$

А.6. Твистованные узлы. Пусть

$$F = F_1^{(k)}(A) = -\frac{A(A^{2k} - 1)}{A - 1/A}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_1 &= \frac{A^2 + A^4F - 2A^2F + F}{A^2}, \\ {}_1\sigma_2 &= \frac{2(A-1)(A+1)}{A^4} (F^2A^6 - 4A^6Fk + A^6F + 2F^2A^6k + 2A^6k - 2F^2A^4 - \\ &\quad - 6F^2A^4k - 2A^4k + 8A^4Fk + A^4F + 6F^2A^2k - 4FA^2k + F^2A^2 - 2F^2k). \end{aligned}$$

Ненулевые полиномы ${}_4\sigma_\Delta(A)$ вплоть до $|\Delta| = 6$ приведены ниже.

$$\Delta = [1] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) = -\frac{4F(A^2 + A^4F - 2FA^2 + F)^3}{A^6},$$

$$\begin{aligned} \Delta = [11] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) = & \frac{2(A^2 + A^4F - 2FA^2 + F)^2}{A^8} \times \\ & \times (4F^2k^2 + 4A^4k^2 - 4A^6k - 8A^6k^2 + 12F^2A^4k - \\ & - 8A^4Fk - 4F^2A^2k + 24F^2A^4k^2 - 24A^4Fk^2 - 16F^2A^2k^2 + \\ & + 8FA^2k^2 - 12F^2A^6k + 16A^6Fk - 16F^2A^6k^2 + 24A^6Fk^2 + \\ & + 4F^2A^8k - 8A^8Fk + 4F^2A^8k^2 - 8A^8Fk^2 + 4A^8k + 4A^8k^2 + \\ & + 3A^8F + F^2A^8 - 5A^4F + 11F^2A^4 - 5F^2A^2 - 2A^6F - 7A^6F^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = [3] : \quad {}_4\sigma_\Delta(A) = & \frac{2(A-1)(A+1)(A^2 + A^4F - 2FA^2 + F)}{A^8} \times \\ & \times (-48F^3A^8k + 72F^3A^6k - 48F^3A^4k + 12F^3A^2k + \\ & + 12F^3A^{10}k + 12F^3A^{10}k^2 - 10F^3A^8 + 12F^3A^6 - \\ & - 6F^3A^4 + F^3A^2 + 3F^3A^{10} - 12A^6k^2 + 30F^2A^4k + \\ & + 144F^2A^4k^2 - 36A^4Fk^2 - 36F^2A^2k^2 - 78F^2A^6k + 24A^6Fk - \\ & - 216F^2A^6k^2 + 108A^6Fk^2 + 66F^2A^8k - 24A^8Fk + \\ & + 144F^2A^8k^2 - 108A^8Fk^2 + 6A^8k + 24A^8k^2 + 9A^8F - \\ & - 12F^2A^8 - 18F^2A^{10}k - 36F^2A^{10}k^2 + 36A^{10}Fk^2 + 6A^{10}k + \\ & + 2A^{10}F + 7F^2A^{10} - 12A^{10}k^2 + 60F^3A^2k^2 - 60F^3A^8k^2 + \\ & + 120F^3A^6k^2 - 120F^3A^4k^2 - 12F^3k^2 + 2F^2A^4 + A^6F + 3A^6F^2). \end{aligned}$$

А.6.1. *Примеры.* Для

$$\sigma_1(A) = 1 + F_1^{(k)}(A)(A - 1/A)^2 = 1 + F_1^{(k)}(A)(A^2 - 2 + A^{-2})$$

при различных k мы имеем:

- при $k = 4$ для узла 9_2 специальный полином $\sigma_1(A) = (-A^8 + A^6 + 1)A^2$,
- при $k = 3$ для узла 7_2 специальный полином $\sigma_1(A) = -(A^6 - A^4 - 1)A^2$,
- при $k = 2$ для узла 5_2 специальный полином $\sigma_1(A) = -(A^4 - A^2 - 1)A^2$,
- при $k = 1$ для узла 3_1 специальный полином $\sigma_1(A) = -(A^2 - 2)A^2$,
- при $k = 0$ для незаузленной петли специальный полином $\sigma_1(A) = 1$,
- при $k = -1$ для узла 4_1 специальный полином $\sigma_1(A) = (-A^2 + A^4 + 1)/A^2$,
- при $k = -2$ для узла 6_1 специальный полином $\sigma_1(A) = (A^6 - A^2 + 1)/A^4$,
- при $k = -3$ для узла 8_1 специальный полином $\sigma_1(A) = (A^8 - A^2 + 1)/A^6$,
- при $k = -4$ для узла 10_1 специальный полином $\sigma_1(A) = (A^{10} - A^2 + 1)/A^8$.

Для полинома ${}_1\sigma_2(A)$ при различных k мы имеем:

при $k = 4$ для узла 9_2

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = 9A^{14} - 8A^{12} - 3A^6 - 2A^4 - 2A^2 - 2,$$

при $k = 3$ для узла 7_2

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = 7A^{10} - 6A^8 - 3A^4 - 2A^2 - 2,$$

при $k = 2$ для узла 5_2

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = 5A^6 - 4A^4 - 3A^2 - 2,$$

при $k = 1$ для узла 3_1

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = 3A^2 - 5,$$

при $k = 0$ для незаузленной петли ${}_1\sigma_2(A) = 0$,

при $k = -1$ для узла 4_1

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = \frac{(1+A^2)(2A^4-3A^2+2)}{A^8},$$

при $k = -2$ для узла 6_1

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = \frac{2A^{10} + 2A^8 - A^6 - 3A^2 + 4}{A^{12}},$$

при $k = -3$ для узла 8_1

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = \frac{2A^{14} + 2A^{12} + 2A^{10} - A^8 - 5A^2 + 6}{A^{16}},$$

при $k = -4$ для узла 10_1

$$\frac{{}_1\sigma_2(A)}{2A^5(A-1/A)} = \frac{2A^{18} + 2A^{16} + 2A^{14} + 2A^{12} - A^{10} - 7A^2 + 8}{A^{20}}.$$

Для полинома ${}_2\sigma_1(A)$ при различных k мы имеем:

при $k = 4$ для узла 9_2

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = (1+A^2)(1+A^4),$$

при $k = 3$ для узла 7_2

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = (A^2 + A + 1)(A^2 - A + 1),$$

при $k = 2$ для узла 5_2

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = 1 + A^2,$$

при $k = 1$ для узла 3_1

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = 1,$$

при $k = 0$ для незаузленной петли ${}_2\sigma_1(A) = 0$,

при $k = -1$ для узла 4_1

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = -\frac{1}{A^2},$$

при $k = -2$ для узла 6_1

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = -\frac{1 + A^2}{A^4},$$

при $k = -3$ для узла 8_1

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = -\frac{(A^2 + A + 1)(A^2 - A + 1)}{A^6},$$

при $k = -4$ для узла 10_1

$$\frac{{}_2\sigma_1(A)}{4A^2\sigma_1(A)} = -\frac{(1 + A^2)(1 + A^4)}{A^8}.$$

Для полинома ${}_2\sigma_{11}(A)$ при различных k мы имеем:

при $k = 4$ для узла 9_2

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = 81A^{16} - 149A^{14} + 64A^{12} - 5A^8 + 9A^6 + 4A^4 + 4A^2 + 8,$$

при $k = 3$ для узла 7_2

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = 49A^{12} - 89A^{10} + 36A^8 - 5A^6 + 9A^4 + 4A^2 + 8,$$

при $k = 2$ для узла 5_2

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = 25A^8 - 45A^6 + 11A^4 + 9A^2 + 8,$$

при $k = 1$ для узла 3_1

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = 17 + 9A^4 - 22A^2,$$

при $k = 0$ для незаузленной петли ${}_2\sigma_1(A) = 0$,

при $k = -1$ для узла 4_1

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = \frac{4A^8 - 9A^6 + 6A^4 - 9A^2 + 4}{A^8},$$

при $k = -2$ для узла 6_1

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = \frac{4A^{12} - 4A^{10} - 9A^8 + 5A^6 + 9A^4 - 29A^2 + 16}{A^{12}},$$

при $k = -3$ для узла 8_1

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = \frac{4A^{16} - 4A^{14} - 4A^{12} - 9A^{10} + 5A^8 + 25A^4 - 65A^2 + 36}{A^{16}},$$

при $k = -4$ для узла 10_1

$$\frac{{}_2\sigma_{11}(A)}{{}_2\sigma_1(A)^2} = \frac{4A^{20} - 4A^{18} - 4A^{16} - 4A^{14} - 9A^{12} + 5A^{10} + 49A^4 - 117A^2 + 64}{A^{20}}.$$

Для полинома ${}_2\sigma_3(A)$ при различных k мы имеем:

при $k = 4$ для узла 9_2

$$\begin{aligned} \frac{{}_2\sigma_3(A)}{2A^8(A - 1/A)^2\sigma_1(A)} &= -243A^{20} + 190A^{18} - 2A^{16} - 2A^{14} + 86A^{12} + \\ &+ 61A^{10} + 61A^8 + 61A^6 + 36A^4 + 24A, \end{aligned}$$

при $k = 3$ для узла 7_2

$$\frac{{}_2\sigma_3(A)}{2A^8(A - 1/A)^2\sigma_1(A)} = -147A^{14} + 106A^{12} - 2A^{10} + 68A^8 + 49A^6 + 49A^4 + 24A^2 + 12,$$

при $k = 2$ для узла 5_2

$$\frac{{}_2\sigma_3(A)}{2A^8(A - 1/A)^2\sigma_1(A)} = -75A^8 + 46A^6 + 50A^4 + 37A^2 + 12,$$

при $k = 1$ для узла 3_1

$$\frac{{}_2\sigma_3(A)}{2A^8(A - 1/A)^2\sigma_1(A)} = -27A^2 + 44,$$

при $k = 0$ для незаузленной петли ${}_2\sigma_1(A) = 0$,

при $k = -1$ для узла 4_1

$$\frac{{}_2\sigma_3(A)}{2A^8(A-1/A)^2\sigma_1(A)} = \frac{12A^8 - A^6 - 3A^4 - A^2 + 12}{A^{12}},$$

при $k = -2$ для узла 6_1

$$\frac{{}_2\sigma_3(A)}{2A^8(A-1/A)^2\sigma_1(A)} = \frac{1}{A^{18}}(12A^{14} + 24A^{12} + 11A^{10} + 11A^8 - 9A^6 + 2A^4 - 25A^2 + 48),$$

ТАБЛИЦА 1. Характеры $\varphi_R(\Delta)$.

$\Delta \setminus R$	[1]	[2]	[11]	[3]	[21]	[111]	[4]	[31]	[22]	[211]	[1111]
[1]	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4
[2]	0	1	-1	3	0	-3	6	2	0	-2	-6
[11]	0	1	1	3	3	3	6	6	6	6	6
[3]	0	0	0	2	-1	2	8	0	-4	0	8
[21]	0	0	0	3	0	-3	12	4	0	-4	-12
[111]	0	0	0	1	1	1	4	4	4	4	4
[4]	0	0	0	0	0	0	6	-2	0	2	-6
[31]	0	0	0	0	0	0	8	0	-4	0	8
[22]	0	0	0	0	0	0	3	-1	3	-1	3
[211]	0	0	0	0	0	0	6	2	0	-2	-6
[1111]	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

ТАБЛИЦА 2. Характеры $\varphi_R(\Delta)$ (продолжение).

$\Delta \setminus R$	[5]	[41]	[32]	[311]	[221]	[2111]	[11111]
[1]	5	5	5	5	5	5	5
[2]	10	5	2	0	-2	-5	-10
[11]	10	10	10	10	10	10	10
[3]	20	5	-4	0	-4	5	20
[21]	30	15	6	0	-6	-15	-30
[111]	10	10	10	10	10	10	10
[4]	30	0	-6	0	6	0	-30
[31]	40	10	-8	0	-8	10	40
[22]	15	0	3	-5	3	0	15
[211]	30	15	6	0	-6	-15	-30
[1111]	5	5	5	5	5	5	5
[5]	24	-6	0	4	0	-6	24
[41]	30	0	-6	0	6	0	-30
[32]	20	-5	4	0	-4	5	-20
[311]	20	5	-4	0	-4	5	20
[221]	15	0	3	-5	3	0	15
[2111]	10	5	2	0	-2	-5	-10
[11111]	1	1	1	1	1	1	1

при $k = -3$ для узла 8_1

$$\frac{2\sigma_3(A)}{2A^8(A-1/A)^2\sigma_1(A)} = \frac{1}{A^{24}}(12A^{20} + 24A^{18} + 36A^{16} + 23A^{14} + 23A^{12} + 23A^{10} - 15A^8 + 2A^6 + 2A^4 - 73A^2 + 108),$$

при $k = -4$ для узла 10_1

$$\frac{2\sigma_3(A)}{2A^8(A-1/A)^2\sigma_1(A)} = \frac{1}{A^{30}}(12A^{26} + 24A^{24} + 36A^{22} + 48A^{20} + 35A^{18} + 35A^{16} + 35A^{14} + 35A^{12} - 21A^{10} + 2A^8 + 2A^6 + 2A^4 - 145A^2 + 192).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Примеры специальных полиномов

В этом разделе мы приводим явные примеры специальных полиномов для торических узлов, для твистованных узлов (неторических узлов) и для торических зацеплений.

Б.1. Специальные полиномы для торических узлов. Для торических узлов

$$\sigma_{\square}^{[m,n]}(A) = \frac{A^{-(m-1)n}}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{A^{m-1-2i}}{i!(m-1-i)!} \prod_{j=1}^{m-1-i} (n+j) \prod_{j=1}^i (n-j), \quad (\text{Б.1})$$

где m обозначает число нитей. В частности,

$$\begin{aligned} m=2: \quad \sigma_{\square}^{[m,n]}(A) &= \frac{1}{2A^n} ((n+1)A - (n-1)A^{-1}), \\ m=3: \quad \sigma_{\square}^{[m,n]}(A) &= \frac{1}{6A^{2n}} ((n+1)(n+2)A^2 - 2(n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)A^{-2}), \\ m=4: \quad \sigma_{\square}^{[m,n]}(A) &= \frac{1}{24A^{3n}} ((n+1)(n+2)(n+3)A^3 - 3(n+1)(n+2)(n-1)A + \\ &\quad + 3(n+1)(n-1)(n-2)A^{-1} - (n-1)(n-2)(n-3)A^{-3}). \end{aligned}$$

Формула (Б.1) может быть рассмотрена как деформация наивного выражения

$$\frac{n^{m-1}}{m!} (A - 1/A)^{m-1}$$

с восстановленной симметрией $m \leftrightarrow n$. Это можно сделать в явном виде, если формулу (Б.1) переписать следующим образом [6], [52]:

$$\sigma_{\square}^{[m,n]}(A) = \frac{A^{-mn}}{mn} \sum_{i=1}^{\min(m,n)} (-1)^{i-1} A^{m+n-i} \frac{(n+m-i)!}{(i-1)!(m-i)!(n-i)!}. \quad (\text{Б.2})$$

Б.2. Старший специальный полином ${}_1\sigma_2$ для некоторых торических узлов. Приведем список полиномов ${}_1\sigma_2$ для некоторых особых семейств торических узлов. Имеем

$$T[2, 2k + 1] : {}_1\sigma_2 = \frac{k(k+1)(A-1)(A+1)(A^2 + 8A^2k - 8k - 7)}{6A^2},$$

$$\begin{aligned} T[3, 3k + 1] : {}_1\sigma_2 = & \frac{k(2+3k)(A-1)(A+1)}{40A^4} ((126k^3 - 69k^2 + 6k + 1)A^6 + \\ & + (-378k^3 - 183k^2 + 82k + 7)A^4 + \\ & + (378k^3 + 573k^2 + 178k - 17)A^2 - 321k^2 - 126k^3 - 71 - 266k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[3, 3k + 2] : {}_1\sigma_2 = & \frac{(k+1)(3k+1)(A-1)(A+1)}{40A^4} ((126k^3 + 57k^2 + 2k)A^6 + \\ & + (-378k^3 - 561k^2 - 166k)A^4 + (378k^3 + 951k^2 + 686k + 120)A^2 - \\ & - 200 - 126k^3 - 447k^2 - 522k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[4, 4k + 1] : {}_1\sigma_2 = & \frac{k(1+2k)(A-1)(A+1)}{630A^6} \times \\ & \times ((19456k^5 - 26976k^4 + 12928k^3 - 2334k^2 + 61k + 15)A^{10} + \\ & + (-97280k^5 + 32288k^4 + 28992k^3 - 12326k^2 + 773k + 93)A^8 + \\ & + (194560k^5 + 140608k^4 - 49024k^3 - 27148k^2 + 5454k + 360)A^6 + \\ & + (-194560k^5 - 345792k^4 - 156160k^3 + 14100k^2 + 13670k - 318)A^4 + \\ & + (97280k^5 + 275488k^4 + 278784k^3 + 114218k^2 + 11701k - 1941)A^2 - \\ & - 19456k^5 - 75616k^4 - 86510k^2 - 31659k - 4509 - 115520k^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[4, 4k + 3] : {}_1\sigma_2 = & \frac{(k+1)(1+2k)(A-1)(A+1)}{630A^6} \times \\ & \times ((19456k^5 + 21664k^4 + 7616k^3 + 914k^2 + 15k)A^{10} + \\ & + (-97280k^5 - 210912k^4 - 149632k^3 - 42006k^2 - 4065k)A^8 + \\ & + (194560k^5 + 627008k^4 + 718592k^3 + 353428k^2 + 72642k + 5040)A^6 + \\ & + (-194560k^5 - 832192k^4 - 1334144k^3 - 982028k^2 - 323046k - 37170)A^4 + \\ & + (97280k^5 + 518688k^4 + 1072960k^3 + 1067226k^2 + 503151k + 87570)A^2 - \\ & - 19456k^5 - 124256k^4 - 397534k^2 - 248697k - 61740 - 315392k^3). \end{aligned}$$

Другие конкретные примеры старших специальных полиномов можно найти в приложении А.

Б.3. Старшие специальные полиномы для некоторых неторических узлов. Твистованные узлы. Твистованный узел $Tw^{(k)}$ получается из косы с противоположной ориентацией нитей перекручиванием ее концов. В этом случае удобно ввести функцию [13]

$$F^{(k)} := -\frac{A(A^{2k} - 1)}{A - 1/A}.$$

Первые два специальных полинома таковы:

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_1(A) &= \frac{A^2 + A^4 F^{(k)} - 2A^2 F^{(k)} + F^{(k)}}{A^2}, \\ {}_1\sigma_2(A) &= \frac{2(A-1)(A+1)}{A^4} \left((F^{(k)})^2 A^6 - 4A^6 F^{(k)} k + A^6 F^{(k)} + 2(F^{(k)})^2 A^6 k + 2A^6 k - \right. \\ &\quad \left. - 2(F^{(k)})^2 A^4 - 6(F^{(k)})^2 A^4 k - 2A^4 k + 8A^4 F^{(k)} k + A^4 F^{(k)} + 6(F^{(k)})^2 A^2 k - \right. \\ &\quad \left. - 4F^{(k)} A^2 k + (F^{(k)})^2 A^2 - 2(F^{(k)})^2 k \right). \end{aligned}$$

Далее имеем следующее:

в случае узла 4_1

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_1(A) &= \frac{A^4 - A^2 + 1}{A^2}, \\ {}_1\sigma_2(A) &= \frac{(A-1)(A+1)(A^2+1)(2A^4-3A^2+2)}{A^4}; \end{aligned}$$

в случае узла 5_2

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_1(A) &= \frac{-A^4 + A^2 + 1}{A^2}, \\ {}_1\sigma_2(A) &= \frac{(A-1)(A+1)(5A^6 - 4A^4 - 3A^2 - 2)}{A^4}; \end{aligned}$$

в случае узла 6_3

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_1(A) &= -\frac{(A^2 + A - 1)(-1 - A + A^2)}{A^2}, \\ {}_1\sigma_2(A) &= \frac{(A-1)(1+A)(1+A^2)(A^2 + A - 1)(-1 - A + A^2)}{A^4}; \end{aligned}$$

в случае узла 8_{21}

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_1(A) &= \frac{3 + A^4 - 3A^2}{A^2}, \\ {}_1\sigma_2(A) &= \frac{(4A^4 - 9A^2 + 7)(A-1)^2(1+A)^2}{A^4}. \end{aligned}$$

Б.4. Разложение специальных полиномов для торических зацеплений.

Начнем с двух примеров.

Торическое зацепление $T[l, lk]$ содержит l компонент, которые являются окружностями $T[1, k]$. Если связать представления $R_1, \dots, R_l$ с компонентами зацепления $T[l, lk]$, то специальный полином равен

$$\sigma_{R_1 \dots R_l}^{T[l, lk]} = \prod_{i=1}^l (\sigma_1^{T[1, k]})^{|R_i|}.$$

Торическое зацепление $T[4, 4k+2]$ содержит две компоненты, которые являются двустрендовыми узлами $T[2, 2k+1]$. Если связать представления R_1, R_2 с зацеплением $T[4, 4k+2]$, то специальный полином равен

$$\sigma_{R_1 R_2}^{T[4, 4k+2]} = (\sigma_1^{T[2, 2k+1]})^{|R_1|} (\sigma_1^{T[2, 2k+1]})^{|R_2|}.$$

Эти два примера показывают, что специальные полиномы для зацеплений ведут себя так же, как полиномы ХОМФЛИ для составных узлов, т. е.

$$H_{R_1 R_2}^{T[4, 4k+2]}(A, q)|_{q=1} = H_{R_1}^{T[2, 2k+1]}(A, q) H_{R_2}^{T[2, 2k+1]}(A, q)|_{q=1}.$$

Рассмотрим отклонение полинома ХОМФЛИ для зацепления $T[4, 4k+2]$ от полинома ХОМФЛИ для составного узла $T[2, 2k+1] \# T[2, 2k+1]$. Разложим это отклонение по переменной z :

при z^0 имеем

$$H_{R_1 R_2}^{T[4, 4k+2]}(A, q) - H_{R_1}^{T[2, 2k+1]}(A, q) H_{R_2}^{T[2, 2k+1]}(A, q) = 0;$$

при z^1 имеем

$$H_{R_1 R_2}^{T[4, 4k+2]}(A, q) - H_{R_1}^{T[2, 2k+1]}(A, q) H_{R_2}^{T[2, 2k+1]}(A, q) = 0;$$

при z^2 имеем

$$\begin{aligned} H_{R_1 R_2}^{T[4, 4k+2]}(A, q) - H_{R_1}^{T[2, 2k+1]}(A, q) H_{R_2}^{T[2, 2k+1]}(A, q) = \\ = z^2 (2k+1) |R_1| |R_2| ({}_0\sigma_1^{T[2, 2k+1]})^{|R_1|+|R_2|-1} L_1^{T[4, 4k+2]}(A), \end{aligned}$$

где ${}_0\sigma_1^{T[2, 2k+1]}$ – это специальный полином, а $L_1^{T[4, 4k+2]}(A)$ – рациональная функция, которая зависит от переменной A и зацепления $T[4, 4k+2]$ и не зависит от представления;

при z^3 имеем следующее: если $R_1 = [1]$, а R_2 произвольно, то

$$\begin{aligned} H_{[1] R_2}^{T[4, 4k+2]}(A, q) - H_{[1]}^{T[2, 2k+1]}(A, q) H_{R_2}^{T[2, 2k+1]}(A, q) = \\ = z^3 \varphi_{R_2}([2]) ({}_1\sigma_2^{T[2, 2k+1]})^{|R_2|-2} L_{[R_2]}^{T[4, 4k+2]}(A), \end{aligned}$$

где полином ${}_1\sigma_2^{T[2, 2k+1]}$ такой же, как в формулах (8), а $L_{[R_2]}^{T[4, 4k+2]}(A)$ – рациональная функция.

Благодарности. Наша работа частично поддержана Министерством образования и науки РФ, Brazilian National Council for Scientific and Technological Development (А. Ю. М.), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3349.2012.2), а также РФФИ (гранты № 13-02-00457 (А. Д. М. и А. В. С.) и № 13-02-00478 (А. Ю. М.) и совместные гранты № 12-02-92108-Yaf_a, 13-02-90459-Ukr-f_a, 13-02-90618-Arm_a, 13-02-91371-ST_a).

Список литературы

- [1] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millet, A. Ocneanu, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**:2 (1985), 239–246; J. H. Przytycki, K. P. Traczyk, *Kobe J. Math.*, **4**:2 (1987), 115–139.
- [2] S.-S. Chern, J. Simons, *Ann. Math. (2)*, **99**:1 (1974), 48–69; E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399; G. Moore, N. Seiberg, *Phys. Lett. B*, **220**:3 (1989), 422–430; V. Fock, Ya. I. Kogan, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:17 (1990), 1365–1371.
- [3] S. Gukov, A. Schwarz, C. Vafa, *Lett. Math. Phys.*, **74**:1 (2005), 53–74, arXiv: hep-th/0412243; N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen, *Experiment. Math.*, **15**:2 (2006), 129–159, arXiv: math/0505662.
- [4] M. Khovanov, *Duke Math. J.*, **101**:3 (2000), 359–426; D. Bar-Natan, *Algeb. Geom. Topol.*, **2** (2002), 337–370, arXiv: math/0201043; M. Khovanov, L. Rozhansky, *Fund. Math.*, **199**:1 (2008), 1–91, arXiv: math.QA/0401268; *Geom. Topol.*, **12**:3 (2008), 1387–1425, arXiv: math.QA/0505056; V. Dolotin, A. Morozov, *JHEP*, **01** (2013), 065, 48 pp., arXiv: 1208.4994; *J. Phys. Conf. Ser.*, **411**:1 (2013), 012013, 22 pp., arXiv: 1209.5109.
- [5] M. Aganagic, Sh. Shakirov, *Knot homology from refined Chern–Simons theory*, arXiv: 1105.5117.
- [6] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, A. Smirnov, *JHEP*, **03** (2013), 021, 87 pp., arXiv: 1106.4305.
- [7] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, “Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations”, *Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind. The Legacy of Maximilian Kreuzer*, eds. A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, E. Scheidegger, World Sci., Hackensack, NJ, 2013, 101–118, arXiv: 1112.5754.
- [8] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *JHEP*, **03** (2012), 034, 34 pp., arXiv: 1112.2654.
- [9] H. Morton, S. Lukac, *J. Knot Theory Ramifications*, **12**:3 (2003), 395–416, arXiv: math.GT/0108011.
- [10] R. Gelca, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **133**:2 (2002), 311–323, arXiv: math/0004158; R. Gelca, J. Sain, *J. Knot Theory Ramifications*, **12**:2 (2003), 187–201, arXiv: math/0201100; S. Gukov, *Commun. Math. Phys.*, **255**:3 (2005), 577–627, arXiv: hep-th/0306165; S. Garoufalidis, “On the characteristic and deformation varieties of a knot”, *Proceedings of the Casson Fest* (Fayetteville, AR, USA, April 10–12, 2003; Austin, TX, USA, May 19–21, 2003), *Geometry and Topology Monographs*, **7**, eds. C. Gordon, Y. Rieck, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004, 291–309, arXiv: math/0306230.
- [11] E. Gorsky, A. Oblomkov, J. Rasmussen, *On stable Khovanov homology of torus knots*, arXiv: 1206.2226.
- [12] A. Mironov, A. Morozov, “Equations on knot polynomials and 3d/5d duality”, *The Sixth International School on Field Theory and Gravitation–2012* (Petropolis – RJ, Brazil, 23–27 April 2012), *AIP Conference Proceedings*, **1483**, 2012, 189–211, arXiv: 1208.2282.

- [13] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, *Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials*, [arXiv:1306.3197](#).
- [14] Sh. Zhu, *Colored HOMFLY polynomial via skein theory*, [arXiv:1206.5886](#).
- [15] A. Morozov, *The first-order deviation of superpolynomial in an arbitrary representation from the special polynomial*, [arXiv:1211.4596](#); *Special colored superpolynomials and their representation-dependence*, [arXiv:1208.3544](#).
- [16] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, *Knot polynomials in the first non-symmetric representation*, [arXiv:1211.6375](#).
- [17] J. M. F. Labastida, E. Pérez, *J. Math. Phys.*, **39**:10 (1998), 5183–5198, [arXiv:hep-th/9710176](#); S. Chmutov, S. Duzhin, “The Kontsevich integral”, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, v. 3, eds. J.-P. Francoise, G. L. Naber, S. T. Tsou, Elsevier, Oxford, 2006, 231–239, [arXiv:math/0501040](#).
- [18] M. Kontsevich, “Vassiliev’s Knot Invariants”, *I. M. Gel’fand Seminar*, Advances in Soviet Mathematics, **16**(2), AMS, Providence, RI, 1993, 137–150; M. Alvarez, J. M. F. Labastida, E. Pérez, *Nucl. Phys. B*, **488**:3 (1997), 677–718, [arXiv:hep-th/9607030](#); S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, [arXiv:1103.5628](#).
- [19] А. С. Анохина, А. А. Морозов, “Процедура каблирования для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ”, *ТМФ*, **178** (2014), [arXiv:1307.2216](#) (в печати).
- [20] А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, С. М. Натанзон, *ТМФ*, **166**:1 (2011), 3–27; A. D. Mironov, A. Yu. Morozov, S. M. Natanzon, *J. Geom. Phys.*, **62**:2 (2012), 148–155, [arXiv:1012.0433](#).
- [21] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, Oxford Univ. Press, New York, 1958; М. Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Едиториал УРСС, М., 2002; W. Fulton, *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*, London Mathematical Society Student Texts, **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [22] H. Ooguri, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **577**:3 (2000), 419–438, [arXiv:hep-th/9912123](#); J. Labastida, M. Mariño, *Commun. Math. Phys.*, **217**:2 (2001), 423–449, [arXiv:hep-th/0004196](#); M. Mariño, C. Vafa, “Framed knots at large N ”, *Orbifolds in Mathematics and Physics* (Madison, WI, 2001), Contemporary Mathematics, **310**, eds. A. Adem, J. Morava, Y. Ruan, AMS, Providence, RI, 2002, 185–204, [arXiv:hep-th/0108064](#).
- [23] K. Liu, P. Peng, *J. Differ. Geom.*, **85**:3 (2010), 479–525, [arXiv:0704.1526](#); *Math. Res. Lett.*, **17**:3 (2010), 493–506, [arXiv:1012.2636](#).
- [24] M. Alvarez, J. M. F. Labastida, *Nucl. Phys. B*, **433**:3 (1995), 555–596, [arXiv:hep-th/9407076](#); J. M. F. Labastida, “Chern–Simons Gauge Theory: Ten Years After”, *Trends in Theoretical Physics II* (Buenos Aires, 1998), AIP Conference Proceedings, **484**, Amer. Inst. Phys., Woodbury, NY, 1999, 1–40, [arXiv:hep-th/9905057](#).
- [25] J. M. F. Labastida, M. Mariño, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:7 (1995), 1045–1089, [arXiv:hep-th/9402093](#).
- [26] P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov, A. Smirnov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **28**:17 (2013), 1330025, 38 pp., [arXiv:1112.5406](#).

- [27] R. Kashaev, *Lett. Math. Phys.*, **39**:3 (1997), 269–275; H. Murakami, J. Murakami, *Acta Math.*, **186**:1 (2001), 85–104; S. Gukov, H. Murakami, *Lett. Math. Phys.*, **86**:2–3 (2008), 79–98, arXiv: math/0608324; H. Murakami, “An introduction to the volume conjecture”, *Interactions Between Hyperbolic Geometry, Quantum Topology and Number Theory*, Contemporary Mathematics, **541**, eds. A. Champanerkar, O. Dasbach, E. Kalfagianni, I. Kofman, W. Neumann, N. Stoltzfus, AMS, Providence, RI, 2011, 1–40, arXiv: 1002.0126.
- [28] J.M.F. Labastida, M. Mariño, C. Vafa, *JHEP*, **11** (2000), 007, 41 pp., arXiv: hep-th/0010102.
- [29] A. Brini, B. Eynard, M. Mariño, *Ann. H. Poincaré*, **13**:8, 1873–1910, arXiv: 1105.2012.
- [30] R. Dijkgraaf, H. Fuji, M. Manabe, *Nucl. Phys. B*, **849**:1 (2011), 166–211, arXiv: 1010.4542.
- [31] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163, arXiv: hep-th/0310113; *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 126–167, arXiv: hep-th/0608228; *JHEP*, **12** (2009), 053, 51 pp., arXiv: 0906.3305; A.C. Александров, А.Д. Миронов, А.Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192, arXiv: hep-th/0605171; A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, P. Putrov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:27 (2009), 4939–4998, arXiv: 0811.2825; B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 5 pp., arXiv: hep-th/0407261; L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014, 18 pp., arXiv: hep-th/0504116; **12** (2006), 026, 29 pp., arXiv: math-ph/0604014; N. Orantin, *Symplectic invariants, Virasoro constraints and Givental decomposition*, arXiv: 0808.0635.
- [32] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1984.
- [33] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *J. Phys. A*, **45**:4 (2012), 045209, 10 pp., arXiv: 1103.4100.
- [34] A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *JHEP*, **11** (2011), 097, 32 pp., arXiv: 1108.0885.
- [35] A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *Europ. Phys. J. C*, **73** (2013), 2492, arXiv: 1304.7499.
- [36] H.R. Morton, P.R. Cromwell, *J. Knot Theory Ramifications*, **5**:2 (1996), 225–238.
- [37] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051, arXiv: hep-th/9312210.
- [38] M. Rosso, V.F.R. Jones, *J. Knot Theory Ramifications*, **2**:1 (1993), 97–112; X.-S. Lin, H. Zheng, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:1 (2010), 1–18, arXiv: math/0601267; S. Stevan, *Ann. H. Poincaré*, **11**:7 (2010), 1201–1224, arXiv: 1003.2861.
- [39] R. Lawrence, L. Rozhansky, *Commun. Math. Phys.*, **205**:2 (1999), 287–314; M. Mariño, *Commun. Math. Phys.*, **253** (2005), 25–49, arXiv: hep-th/0207096; C. Beasley, E. Witten, *J. Diff. Geom.*, **70**:2 (2005), 183–323, arXiv: hep-th/0503126; Y. Dolivet, M. Tierz, *J. Math. Phys.*, **48**:2 (2007), 023507, 20 pp., arXiv: hep-th/0609167.
- [40] R. Gopakumar, C. Vafa, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **3**:5 (1999), 1415–1443, arXiv: hep-th/9811131.
- [41] P. Ramadevi, T. Sarkar, *Nucl. Phys. B*, **600**:3 (2001), 487–511, arXiv: hep-th/0009188; Zodinmawia, P. Ramadevi, *Nucl. Phys. B*, **870**:1 (2013), 205–242, arXiv: 1107.3918.
- [42] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *JHEP*, **07** (2012), 131, 21 pp., arXiv: 1203.5978.
- [43] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27**:19 (2012), 1250099, 85 pp., arXiv: 1204.4785.
- [44] M. Aganagic, T. Ekhholm, L. Ng, C. Vafa, *Topological strings, D-model, and knot contact homology*, arXiv: 1304.5778.
- [45] Д.В. Галахов, А.Д. Миронов, А.Ю. Морозов, А.В. Смирнов, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 73–99.

- [46] H. Murakami, *JP J. Geom. Topol.*, **7**:2 (2007), 249–269, arXiv:math/0502428.
- [47] S. Garoufalidis, T. T. Q. Le, *An analytic version of the Melvin–Morton–Rozansky conjecture*, arXiv:math/0503641.
- [48] P. Melvin, H. Morton, *Commun. Math. Phys.*, **169**:3 (1995), 501–520; L. Rozansky, *Adv. Math.*, **134**:1 (1998), 1–31, arXiv:q-alg/9604005.
- [49] K. Hikami, H. Murakami, *Commun. Contemp. Math.*, **10**, suppl. 1 (2008), 815–834, arXiv:0711.2836.
- [50] S. Gukov, P. Sułkowski, *JHEP*, **02** (2012), 070, 56 pp., arXiv:1108.0002.
- [51] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *J. Phys. A*, **45**:35 (2012), 355202, 11 pp., arXiv:1203.0667.
- [52] E. Gorsky, “ q, t -Catalan numbers and knot homology”, *Zeta Functions in Algebra and Geometry*, Contemporary Mathematics, **566**, eds. A. Campillo, G. Cardona, A. Melle-Hernández, W. Veys, W. A. Zúñiga-Galindo, AMS, Providence, RI, 2012, 213–232, arXiv:1003.0916.

Поступила в редакцию 13.05.2013