Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зотов, А. В. Смирнов, Модификации расслоений,
эллиптические интегрируемые системы и связанные за-
дачи, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 1, 3–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:05:04

© 2013 г.

А. В. Зотов^{*†‡}, А. В. Смирнов^{*§}

МОДИФИКАЦИИ РАССЛОЕНИЙ, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ

Описано построение эллиптических интегрируемых систем по расслоениям с нетривиальными характеристическими классами. Особое внимание уделено процедуре модификации расслоений, которая связывает модели, отвечающие разным характеристическим классам. Обсуждаются такие приложения и связанные задачи, как уравнения Книжника–Замолотникова–Бернара, классические и квантовые R -матрицы, монополи, спектральная дуальность, уравнения Пенлеве и классическо-квантовое соответствие. Для $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоений на эллиптической кривой с нетривиальными характеристическими классами получены уравнения изомонодромных деформаций.

Ключевые слова: интегрируемые системы, уравнения Пенлеве, системы Хитчина, модификации расслоений.

DOI: 10.4213/tmf8551

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Голоморфные расслоения и характеристические классы	8
2.1. Голоморфные расслоения	9
2.2. G -расслоения над эллиптической кривой	11
2.3. Пример: $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения над эллиптической кривой	12
2.4. Классификация	13
2.5. Обобщенный базис в алгебрах Ли	14

Статья написана по заказу Редколлегии

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: zotov@itep.ru, asmirnov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

[§]Department of Mathematics, Columbia University, New York, USA

3. Эллиптические интегрируемые системы.....	18
3.1. Системы Годена на эллиптической кривой.....	18
3.2. Система Калоджеро.....	19
3.3. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок Эйлера–Арнольда.....	20
3.4. Классификация по характеристическим классам.....	21
3.5. Пример: взаимодействующие волчки.....	23
4. Классические и квантовые R -матрицы.....	26
4.1. Классические r -матрицы и уравнения Книжника–Замолотчикова–Бернара.....	26
4.2. Квантовые R -матрицы.....	27
5. Модификации расслоений.....	29
5.1. Характеристические классы: локальное описание и модификация....	30
5.2. Соответствие между системой частиц Калоджеро и интегрируемыми волчками Эйлера–Арнольда.....	33
5.3. Группа петель и $(1 + 1)$ -полевые обобщения.....	36
5.4. Уравнения отражения, гиростата и Пенлеве VI.....	37
6. Модификации расслоений и монополь Дирака.....	38
6.1. Уравнения Богомольного.....	38
6.2. Рациональное решение в скалярном случае.....	40
6.3. Эллиптическое решение и функциональное уравнение.....	41
6.4. Случай произвольного ранга.....	45
7. Классическо-квантовое соответствие для уравнений Пенлеве.....	45
8. Спектральная дуальность.....	52
Приложение А. Эллиптические функции.....	53
Приложение Б. Группа Ли $SL(N, \mathbb{C})$	61

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемые системы классической механики, при всем их богатстве, являются простейшим примером в ряде задач, описываемых уравнениями нулевой кривизны. С одной стороны, эти задачи имеют совершенно разные постановки и приводят к различным нелинейным уравнениям, с другой – все они естественным образом описываются в рамках теоретико-группового подхода, основой которого является метод гамильтоновой редукции [1]. Его применение к пространствам с групповыми симметриями позволило ранее воспроизвести (и даже в некоторых случаях решить) ряд классических интегрируемых систем [2]. Последние возникали в результате факторизации по групповым симметриям. Интересующими нас обобщениями являются бесконечномерные пространства, связанные с расслоениями на кривых. Исходная теория поля является свободной, а в результате редукции по калибровочным симметриям она ограничивается на “модули” расслоений, т. е. на пространство параметров, которые играют роль динамических переменных¹⁾. Матричнозначные поля после редукции становятся операторами Лакса и удовлетворяют уравнениям нулевой кривизны. В зависимости от типа калибровочной симметрии и алгебро-геометрических особенностей конструкции в итоге можно описать широкий

¹⁾Существование классических интегрируемых систем на модулях расслоений было обнаружено Хитчином [3], поэтому все подобные конструкции часто называют системами Хитчина.

класс задач [4]–[7]. Приведем основной для наших целей набор уравнений нулевой кривизны:

$$\begin{aligned}\partial_t L &= [L, M], \\ \partial_t L - k\partial_x M &= [L, M], \\ \partial_t L - \kappa\partial_z M &= [L, M], \\ \partial_t L - \kappa\partial_z M - k\partial_x M &= [L, M],\end{aligned}\tag{1.1}$$

где t – время, а $L = L(z)$ и $M = M(z)$ можно понимать как матричнозначные функции от динамических переменных и спектрального параметра z . Более точно, $L(z) \in \Gamma(E, \Sigma)$ – сечение некоторого голоморфного расслоения E над комплексной кривой Σ со значениями в некоторой алгебре $\mathcal{G}$ (или группе Ли G). При этом z является локальной координатой на кривой Σ . Все уравнения являются тождествами по спектральному параметру, т.е. он не входит в уравнения движения. Более точно, уравнения на динамические переменные возникают как условия равенства коэффициентов при разных базисных сечениях от z (например, степеней z^k) левых и правых частей уравнений (1.1). Первое уравнение в (1.1) называется уравнением Лакса. Оно описывает динамику интегрируемых систем классической механики, таких, например, как многочастичные системы Калоджеро–Тоды–Руджинарса и интегрируемые волчки Эйлера–Арнольда–Манакова. В этих случаях полноценно работают алгебро-геометрические методы, разработанные Кричевером [8] и позволяющие строить решения в терминах данных спектральной кривой $\det(\lambda - L(z)) = 0$. Второе уравнение в (1.1) описывает $(1+1)$ -интегрируемые теории поля (солитонные уравнения), для которых применим тот же набор алгебро-геометрических методов (для конечнозонных решений) и метод обратной задачи рассеяния [9]. Динамическими переменными в этом случае являются поля от вещественной переменной x (например, на окружности $x \in \mathbb{S}^1$). Третий тип уравнений называется уравнениями изомонодромных деформаций [10]–[16]. В этом случае время t явно входит в пару Лакса и уравнения движения, т.е. эти уравнения описывают неавтономную механику, такую как уравнения Пенлеве или Шлезингера. Так, например, уравнение Пенлеве VI в эллиптической форме [17], [18] имеет тот же вид, что и соответствующая эллиптическая автономная система (модель ВС₁ Калоджеро–Иноземцева [19]), но с заменой времени на модулярный параметр эллиптической кривой τ :

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} = - \sum_{a=0}^3 \nu_a^2 \wp'(q + \omega_a, \tau),\tag{1.2}$$

где $\wp$ – функция Вейерштрасса от модулярного параметра τ , $\omega_a = \{0, 1/2, \tau/2, (\tau + 1)/2\}$ – полупериоды эллиптической кривой Σ_τ , а ν_a – четыре константы связи. Аналогично системы Шлезингера являются неавтономными аналогами моделей Годена с заменой некоторого набора времен на координаты отмеченных точек. Примечательно, что L – M -пары в уравнениях Лакса и изомонодромных деформациях могут буквально совпадать. Это наблюдение является одной из формулировок *классического соответствия Калоджеро–Пенлеве* [20]. Квантовая версия этого утверждения обсуждается в конце статьи. Наконец, четвертое уравнение в (1.1) описывает $(1+1)$ -полевое обобщение уравнений изомонодромных деформаций [21].

Уравнения нулевой кривизны (1.1) обладают естественной калибровочной инвариантностью. Например, уравнение Лакса инвариантно относительно преобразований

$$L \rightarrow gLg^{-1}, \quad M \rightarrow gMg^{-1} - \partial_t g g^{-1}. \quad (1.3)$$

Аналогично определяются калибровочные преобразования и для остальных уравнений с учетом того, что во втором уравнении L – компонента связности $k\partial_x + L$, в третьем – $\kappa\partial_z + L$, а в четвертом – $k\partial_x + \kappa\partial_z + L$, что приводит к соответствующим “удлинениям” калибровочных преобразований.

В каждом из приведенных в (1.1) случаях существует целый набор параметров – групповых и алгебро-геометрических данных, выбор которых фиксирует ту или иную нелинейную систему. Нас будут особенно интересовать специальные топологические инварианты (заряды) исходной теории поля. На языке расслоений они являются элементами из $H^2(\Sigma, \mathcal{Z}(\bar{G}))$, где $\bar{G}$ – односвязная накрывающая простой комплексной группы Ли G , являющейся, в свою очередь, структурной группой расслоения E , а $\mathcal{Z}(\bar{G})$ – ее центр. По этой причине их называют характеристическими классами, подобно классам Штифеля–Уитни для ортогональных групп. Характеристические классы являются препятствиями для поднятия присоединенного G^{ad} -расслоения до G -расслоения. Это следует из точных последовательностей:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow \bar{G} \rightarrow G^{\text{ad}} \rightarrow 1, \\ \dots \rightarrow H^1(\Sigma, \bar{G}) \rightarrow H^1(\Sigma, G^{\text{ad}}) \rightarrow H^2(\Sigma, \mathcal{Z}(\bar{G})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для устранения препятствия (из $H^2(\Sigma, \mathcal{Z}(\bar{G}))$) можно рассмотреть конформные расширения групп. Подробная конструкция характеристических классов и соответствующих интегрируемых систем изложена в работах [22], [23]. В действительности группа когомологий $H^2(\Sigma, \mathcal{Z}(\bar{G}))$ изоморфна $\mathcal{Z}(\bar{G})$. Поэтому характеристические классы описываются перечислением элементов центра $\bar{G}$. Например, для группы $SL(N, \mathbb{C})$ центром является циклическая группа $\mathbb{Z}_N$, состоящая из корней из единицы $\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{N-1}\}$, где $\zeta = e^{2\pi i/N}$.

Явно описать интегрируемые системы можно в эллиптическом случае. Тогда кривая $\Sigma = \Sigma_\tau$ задается фундаментальным параллелограммом $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$. В этом случае известно лаково описание для широкого круга систем [24]–[26]. Все известные ранее примеры отвечали двум семействам с топологическим зарядом $\mu = 1$ либо $\mu = \zeta$. Первое семейство ($\mu = 1$) состоит из многочастичных интегрируемых систем, таких как модель Калоджеро и ее обобщения. Модель Калоджеро описывает попарное взаимодействие частиц с потенциалом, заданным $\wp$ -функцией:

$$H^{\text{Cal}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \nu^2 \sum_{i \neq j} \wp(q_i - q_j, \tau), \quad (1.5)$$

а скобки Пуассона имеют канонический вид $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Второе семейство состоит из интегрируемых эллиптических волчков и их обобщений. Скобки Пуассона в этом случае линейные, а гамильтониан квадратичен по переменным фазового пространства $S_{\alpha_1 \alpha_2}$:

$$H^{\text{top}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1}^N S_{\alpha_1 \alpha_2} S_{N-\alpha_1, N-\alpha_2} \wp\left(\frac{\alpha_1 + \tau \alpha_2}{N}, \tau\right), \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = S_{\alpha+\beta} C_{\alpha, \beta}, \quad (1.6)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $C_{\alpha,\beta} = 2i \sin \pi(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)/N$. То есть эта система описывает вращение N -мерного твердого тела со специальным тензором инерции. В простейшем случае это волчок Эйлера в трехмерном пространстве:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha}^2 J_{\alpha}, \quad \{S_{\alpha}, S_{\beta}\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\gamma}.$$

Поясним происхождение различия между фазовыми пространствами. Конфигурационное пространство редуцированной системы является пространством модулей расслоений $\mathfrak{Bun}_G(E, \Sigma)$. Однако для правильного описания необходимо также введение дополнительных, "спиновых", степеней свободы в отмеченной точке (полюсе $L(z)$). Это означает, что факторизация по действию группы происходит в данной точке кривой не полностью, а только по той ее части, которая сохраняет в данной точке флаг (это называется квазипараболической структурой) [6]. При этом оставшаяся в точке нередуцированная часть является орбитой коприсоединенного действия G , которая и описывается переменными типа S_{α} . Размерность пространства модулей расслоений $\mathfrak{Bun}_{SL(N, \mathbb{C})}(E, \Sigma_{\tau})$ зависит от характеристического класса. Для $\mu = 1$ она равна $N - 1$, т.е. числу степеней свободы для системы Калоджеро в системе центра масс, а для $\mu = \zeta$ – нулю. Таким образом, в последнем случае (для волчка) остаются только "спиновые" степени свободы. При наличии же модулей для интегрируемости необходимо провести еще одну редукцию – по остаточной калибровочной симметрии, которая генерируется соответствующей подгруппой Картана $H \in SL(N, \mathbb{C})$. При определенных условиях (для орбиты наименьшей размерности) эта дополнительная редукция полностью замораживает спиновые степени свободы, оставляя только многочастичные. Таким способом описывается система Калоджеро (1.5). В случае общей орбиты описанная конструкция воспроизводит спиновое обобщение системы Калоджеро.

В общем случае ($\mu = \zeta^j$) размерность пространства модулей равна

$$\dim \mathfrak{Bun}_{SL(N, \mathbb{C})}(E_{\mu=\zeta^j}, \Sigma_{\tau}) = \text{НОД}(N, j) - 1, \quad (1.7)$$

где НОД – наибольший общий делитель. В случае, когда ранг является составным числом $N = pl$, возникает промежуточная интегрируемая система, которую можно интерпретировать как p взаимодействующих $SL(l, \mathbb{C})$ -волчков (или наоборот – l взаимодействующих $SL(p, \mathbb{C})$ -волчков) [27]. В более общем случае, когда G – произвольная простая комплексная группа Ли, ответ для произвольного μ был получен в работах [22], [23]. Важным элементом конструкции являлось построение обобщенного базиса синус-алгебры, обобщающего обычный базис синус-алгебры в алгебре Ли $gl(N, \mathbb{C})$, который задается структурными константами $C_{\alpha,\beta}$ (1.6): $[T_{\alpha}, T_{\beta}] = C_{\alpha,\beta} T_{\alpha+\beta}$. Обобщенный базис строится по системе корней алгебры Ли и подалгебре Картана, отвечающей модулям расслоений с данным характеристическим классом. В отличие от обычного базиса, в алгебре Ли (типа Шевалле) этот базис (t_{α}^k) содержит дополнительный индекс k (градуировку), по которому делается дискретное преобразование Фурье [22].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 описаны расслоения Хиггса и характеристические классы, на которых впоследствии задаются интегрируемые системы. Проведена классификация таких расслоений на эллиптической кривой, а в алгебре Ли построен удобный базис, в котором функции переклейки диагональны, — так называемый обобщенный GS-базис. В разделе 3 приведены основные примеры эллиптических интегрируемых систем, рассматриваемых в работе. Изложена общая конструкция для систем Хитчина, отвечающих нетривиальным характеристическим классам. В разделе 4 полученная классификация используется для построения классических и квантовых динамических R -матриц. Отдельно разобран случай $SL(N, \mathbb{C})$, в котором нетривиальные характеристические классы отвечают существованию нетривиального делителя ранга $N = pl$. Далее, в разделе 5, показано, что расслоения с разными характеристическими классами связаны процедурой модификации, являющейся сингулярным калибровочным преобразованием, действующим на уравнениях Лакса. Аналогично эта процедура действует и на других уравнениях нулевой кривизны. В частности, действуя на уравнения Захарова–Шабата, процедура связывает $(1+1)$ -теорию поля Калоджеро и модель Ландау–Лифшица, а действуя на уравнениях изомонодромных деформаций, она дает описание уравнения Пенлеве VI в форме неавтономного гиростата Жуковского–Вольтерра. В разделе 6 описана монополярная интерпретация модификации. Связь между классической и квантовой задачами для уравнений Пенлеве обсуждается в разделе 7. Эта связь отвечает специальному выбору переменных и калибровки. В разделе 8 описана еще одна связь в классе алгебраически интегрируемых систем — спектральная дуальность. В приложениях А и Б приведены необходимые сведения об эллиптических функциях и группе Ли $SL(N, \mathbb{C})$ соответственно.

2. ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

Пусть G — простая комплексная группа Ли с нетривиальным центром $\mathcal{Z}(G)$. Универсальная накрывающая группа $\bar{G}$ группы G во всех случаях, кроме G_2 , F_4 и E_8 , имеет нетривиальный центр $\mathcal{Z}(\bar{G})$. Этот центр можно определить в терминах решеток ковесов $P^\vee$ и корней $Q^\vee$ в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ [28]. А именно, $\mathcal{Z}(\bar{G}) \sim P^\vee/Q^\vee$. Центр $\mathcal{Z}(\bar{G})$ является циклической группой, кроме случая $\mathfrak{g} = D_{2n}$. В последнем случае у группы $\bar{G} = \text{Spin}_{4n}(\mathbb{C})$ есть нетривиальный центр²⁾ $\mathcal{Z}(\text{Spin}_{4n}) = (\mu_2^L \times \mu_2^R)$, $\mu_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если центр $\mathcal{Z}(\bar{G})$ циклический, то существует фундаментальный ковес $\varpi^\vee \in P^\vee$, задающий $\mathcal{Z}(\bar{G})$. Это означает, что $\text{ord}(\mathcal{Z}(\bar{G}))\varpi^\vee \in Q^\vee$. Присоединенное действие группы дается фактором $G^{\text{ad}} = \bar{G}/\mathcal{Z}(\bar{G})$. Для A_{n-1} (когда число $n = pl$ не простое) и D_n центр $\mathcal{Z}(\bar{G})$ имеет нетривиальные подгруппы $\mathbb{Z}_l \sim \mu_l = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. Пусть (p, l) взаимно просты. Тогда определены фактор-группы

$$G_l = \bar{G}/\mathbb{Z}_l, \quad G_p = G_l/\mathbb{Z}_p, \quad G^{\text{ad}} = G_l/\mathcal{Z}(G_l), \quad (2.1)$$

где $\mathcal{Z}(G_l)$ — центр G_l , а $\mathcal{Z}(G_l) \sim \mu_p = \mathcal{Z}(\bar{G})/\mathbb{Z}_l$. Группа $\mathbb{Z}_l$ генерируется ковесом $\varpi^\vee$, так что $j\varpi^\vee \notin Q^\vee$ для $0 < j < l$ и $l\varpi^\vee \in Q^\vee$. Пусть $N = \text{ord}(\mathcal{Z}(\bar{G}))$. Тогда имеем

²⁾Центр $\mathcal{Z}(\text{Spin}_{4n})$ генерируется ковесами левых и правых спиноров.

следующую диаграмму:

Ниже под группой G мы будем понимать описанную группу G_l . Если $l = 1$ или $l = \text{ord } \mathcal{Z}(\bar{G})$, то G совпадает с $\bar{G}$ или G^{ad} .

2.1. Голоморфные расслоения. Пусть $\pi_1(\Sigma_g)$ – фундаментальная группа кривой Σ_g рода g . $2g$ ее генераторов $\{a_\alpha, b_\alpha\}$ отвечают ее фундаментальным циклам

$$\prod_{\alpha=1}^g [a_\alpha, b_\alpha] = 1, \quad (2.2)$$

где $[a_\alpha, b_\alpha] = a_\alpha b_\alpha a_\alpha^{-1} b_\alpha^{-1}$ – групповой коммутатор. Пусть ρ – представление π_1 в $\mathbb{C}^N$. Рассмотрим присоединенное голоморфное $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоение E на Σ_g . На самом деле E есть $PGL(N, \mathbb{C}) \sim PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоение, так как центр $GL(N, \mathbb{C})$ присоединенно не действует. Расслоение E можно задать голоморфными функциями (матрицами) переклейки его сечений $s \in \Gamma(E)$ вокруг фундаментальных циклов. Пусть $z \in \Sigma_g$ – фиксированная точка. Тогда

$$s(a_\alpha z) = \rho(a_\alpha) s(z), \quad s(b_\beta z) = \rho(b_\beta) s(z). \quad (2.3)$$

Вследствие (2.2) имеем

$$\prod_{\alpha=1}^g [\rho(a_\alpha), \rho(b_\alpha)] = \text{Id}. \quad (2.4)$$

Пусть $\mathcal{K}$ – расширение π_1 циклической группой $\mathbb{Z}_N \sim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow 1. \quad (2.5)$$

Группа $\mathcal{K}$ определяется соотношением $\prod_{\alpha=1}^g [a_\alpha, b_\alpha] = \omega$, $\omega^N = 1$. Пусть $\hat{\rho}$ – представление $\mathcal{K}$ в $GL(N, \mathbb{C})$. Тогда, используя $\hat{\rho}$ как функции переклейки, можно определить расслоение на Σ_g . Однако теперь вместо (2.4) имеем

$$\prod_{\alpha=1}^g [\hat{\rho}(a_\alpha), \hat{\rho}(b_\alpha)] = \omega \text{Id}, \quad (2.6)$$

где ωId – генератор центра $\mathcal{Z}(SL(N, \mathbb{C})) \sim \mathbb{Z}_N$ в $SL(N, \mathbb{C})$. Это означает, что $\hat{\rho}$ можно использовать для функций переклейки только $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоений, но не

$SL(N, \mathbb{C})$ - или $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоений. Обратим внимание, что слои $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоений суть пространства представлений со старшими весами из корневой решетки Q , включая присоединенное представление со старшим весом $\varpi_1 + \varpi_{N-1}$. Для $SL(N, \mathbb{C})$ -представлений старшие веса лежат в решетке весов P . Таким образом, элементы фактор-группы $P/Q \sim \mathcal{Z}(SL(N, \mathbb{C}))$ (Б.10) описывают препятствие к поднятию $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоений до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоений. Указанные препятствия имеют когомологическую интерпретацию. Из (Б.1) следует точная последовательность

$$\cdots \rightarrow H^1(\Sigma_g, SL(N, \mathbb{C})) \rightarrow H^1(\Sigma_g, PSL(N, \mathbb{C})) \rightarrow H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z}(SL(N, \mathbb{C}))) \rightarrow \cdots \quad (2.7)$$

Группы $H^1(\Sigma_g, SL(N, \mathbb{C}))$ и $H^1(\Sigma_g, PSL(N, \mathbb{C}))$ – пространства модулей $SL(N, \mathbb{C})$ - и $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоений. Тогда $H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z}(SL(N, \mathbb{C})))$ определяет препятствие к поднятию $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоений до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоений. Произвольный элемент из группы $\xi \in H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}_N)$ будем называть *характеристическим классом* $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Как известно, $H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}_N) \sim \mathbb{Z}_N$, и ω из (2.6) и есть представитель $\xi \in H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}_N)$.

Данная конструкция обобщается до любой фактор-группы $G_l = SL(N, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_l$, где l – нетривиальный делитель N ($N = pl$, $l \neq 1, N$). Рассмотрим расширение $\mathcal{K}_l$ группы $\pi_1(\Sigma_g)$ с помощью $\mathbb{Z}_l$ (см. (2.5)):

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_l \rightarrow \mathcal{K}_l \rightarrow \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow 1. \quad (2.8)$$

Пусть E_l – голоморфное G_l -расслоение. Слои E_l лежат в неприводимом представлении G_l со старшим весом $\nu \in \Gamma(G_l)$ (Б.12). Тогда функции переклейки удовлетворяют соотношению

$$\prod_{\alpha=1}^g [\hat{\rho}(a_\alpha), \hat{\rho}(b_\alpha)] = \omega^p \text{Id}, \quad (\omega^p)^l = 1. \quad (2.9)$$

Из точной последовательности

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_l \rightarrow SL(N, \mathbb{C}) \rightarrow G_l \rightarrow 1 \quad (2.10)$$

следует, что элемент из $H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}_l) \sim \mathbb{Z}_l$ является препятствием к поднятию G_l -расслоения E_l до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Группу $\mathbb{Z}_l$ можно отождествить с центром двойственной по Ленглендсу группы ${}^L G_l \sim G_p = SL(N, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_p$ (см. (Б.17) и (Б.16)). Таким образом, препятствия к поднятию G_l -расслоений E_l до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоений определяются $H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z}({}^L G_l))$. С другой стороны, так как $\mathbb{Z}_p$ – центр G_l , имеем последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow G_l \rightarrow PSL(N, \mathbb{C}) \rightarrow 1, \quad (2.11)$$

где $\mathbb{Z}_p$ – центр G_l . Тогда элементы из $H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z}(G_l))$ – препятствия к поднятию $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоения до G_l -расслоения. Подводя итог, отметим, что определены два типа характеристических классов:

$$H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z}(G_l)) \text{ – препятствия к поднятию } PSL(N, \mathbb{C})\text{-расслоения} \\ \text{до } G_l\text{-расслоения,} \quad (2.12)$$

$$H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z}({}^L G_l)) \text{ – препятствия к поднятию } G_l\text{-расслоения} \\ \text{до } SL(N, \mathbb{C})\text{-расслоения.} \quad (2.13)$$

Хотя для $\omega \neq 1$ $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоения не могут быть подняты до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоений, их можно поднять до $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоений. Из точной последовательности

$$1 \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{\det} GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow PGL(N, \mathbb{C}) \rightarrow 1 \quad (2.14)$$

имеем

$$H^1(\Sigma_g, GL(N, \mathbb{C})) \rightarrow H^1(\Sigma_g, PGL(N, \mathbb{C})) \rightarrow H^2(\Sigma_g, \mathcal{O}^*). \quad (2.15)$$

Группа Брауэра $H^2(\Sigma_g, \mathcal{O}^*)$ тривиальна, и, следовательно, препятствий к поднятию расслоений $PGL(N, \mathbb{C}) \sim PSL(N, \mathbb{C})$ до $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоений нет.

2.2. G -расслоения над эллиптической кривой. Пусть $\mathcal{E}_G$ – главное G -расслоение над эллиптической кривой $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$. Для G -модуля V определим голоморфное G -расслоение $E = \mathcal{E}_G \times_G V$ (или просто E_G) на Σ_τ . В E_G определено пространство сечений $\Gamma(E_G) = \{s\}$, где s принимает значение в V . Само расслоение E_G определено склеивающим коциклом (функциями переклейки) сечений вокруг фундаментальных циклов. Тогда сечения $E_G(V)$ ведут себя на решетке следующим образом:

$$s(z+1) = \mathcal{Q}(z)s(z), \quad s(z+\tau) = \Lambda(z)s(z), \quad (2.16)$$

где $\mathcal{Q}(z), \Lambda(z) \in \text{End } V$. Далее $\mathcal{Q}(z), \Lambda(z)$ удовлетворяют условию коцикла

$$\mathcal{Q}(z+\tau)\Lambda(z)\mathcal{Q}(z)^{-1}\Lambda^{-1}(z+1) = \text{Id}. \quad (2.17)$$

Из результатов [29] следует, что эти операторы могут быть выбраны постоянными. Тогда получаем уравнение

$$\mathcal{Q}\Lambda\mathcal{Q}^{-1}\Lambda^{-1} = \text{Id}. \quad (2.18)$$

Решения этого уравнения, определенные с точностью до сопряжений, описывают пространство модулей $E_{\bar{G}}$ -расслоений на Σ_τ . Вместо (2.18) рассмотрим уравнение

$$\mathcal{Q}\Lambda\mathcal{Q}^{-1}\Lambda^{-1} = \zeta \text{Id},$$

где ζ – генератор центра $\mathcal{Z}(\bar{G})$. В этом случае $(\mathcal{Q}, \Lambda)$ – мультипликаторы G^{ad} -расслоений, но не $\bar{G}$ -расслоений, а ζ играет роль препятствия к поднятию G^{ad} -расслоения до $\bar{G}$ -расслоения. Пусть $p = \text{ord}(\mathcal{Z}(\bar{G}))/l$. Рассмотрим расслоение с сечениями, заданными условиями

$$s(z+1) = \mathcal{Q}s(z), \quad s(z+\tau) = \Lambda_p s(z), \quad (2.19)$$

такое, что

$$\mathcal{Q}\Lambda_p\mathcal{Q}^{-1}\Lambda_p^{-1} = \zeta^p \text{Id}, \quad (2.20)$$

где ζ^p генерирует $\mathbb{Z}_l$. Это означает, что ζ^p – препятствие к поднятию G_l -расслоения до $\bar{G}$ -расслоения. Препятствия формулируются в терминах когомологий Σ_τ . А именно, первые когомологии $H^1(\Sigma_\tau, G(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau}))$ с коэффициентами в аналитических пучках $G(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau})$ определяют пространство модулей $\mathcal{M}(G, \Sigma_\tau)$ голоморфного G -расслоения на Σ_τ . Пользуясь (2.1), получаем три коротких точных последовательности:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow \bar{G}(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau}) \rightarrow G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau}) \rightarrow 1, \\ 1 &\rightarrow \mathbb{Z}_l \rightarrow \bar{G}(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau}) \rightarrow G_l(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau}) \rightarrow 1, \\ 1 &\rightarrow \mathcal{Z}(G_l) \rightarrow G_l(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau}) \rightarrow G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_{\Sigma_\tau}) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Из них следуют длинные точные последовательности:

$$\cdots \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, \bar{G}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(\bar{G})) \sim \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow 0, \quad (2.21)$$

$$\cdots \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, \bar{G}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, G_l(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^2(\Sigma_\tau, \mathbb{Z}_l) \sim \mu_l \rightarrow 0, \quad (2.22)$$

$$\cdots \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, G_l(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(G_l)) \sim \mu_p \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Элементы из H^2 являются препятствиями, а именно:

$\zeta(E_{G^{\text{ad}}}) \in H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(\bar{G}))$ – препятствие к поднятию $E_{G^{\text{ad}}}$ -расслоения
до $E_{\bar{G}}$ -расслоения,

$\zeta(E_{G_l}) \in H^2(\Sigma_\tau, \mathbb{Z}_l)$ – препятствие к поднятию E_{G_l} -расслоения
до $E_{\bar{G}}$ -расслоения,

$\zeta^\vee(E_{G^{\text{ad}}}) \in H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(G_l))$ – препятствие к поднятию $E_{G^{\text{ad}}}$ -расслоения
до E_{G_l} -расслоения.

Напомним, что по определению образы $H^1(\Sigma_\tau, G(\mathcal{O}_\Sigma))$ в $H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z})$ называются характеристическими классами $\zeta(E_G)$ G -расслоений. В работе [22] было показано, что для общих расслоений решение (2.20) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \mathbf{e}(\kappa), \quad \Lambda_p = \mathbf{e}(\mathbf{u})\Lambda_0, \quad \Lambda_0^l = \text{Id}, \\ \kappa &= \mathbf{e}\left(\frac{\rho^\vee}{h}\right), \quad \rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha^\vee > 0} \alpha^\vee, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где h – число Кокстера, $\{\alpha^\vee\}$ – кокорни $\mathfrak{g}$. Λ_0 однозначно определяется по элементу из $\mathcal{Z}(G)$, лежащему в группе Вейля $W(\mathfrak{h})$ (он действует симметрией на расширенную диаграмму Дынкина [28]). Более того, $\mathbf{u} \in \text{Ker}(\Lambda_0 - \text{Id})$ и $\mathbf{u}$ лежит в подалгебре Картана $\tilde{\mathfrak{h}}_0 \subset \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана, содержащая $\mathcal{Q}$, $\mathbf{u}$ играют роль параметров на пространстве модулей $\mathcal{M}_G$ голоморфных G_l -расслоений на Σ_τ , $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ – подалгебра Картана инвариантной подалгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_0 \subset \mathfrak{g}$ [22]. Существует базис $\tilde{\Pi}^\vee$ в $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ такой, что $\tilde{\Pi}$ – система простых корней для $\tilde{\mathfrak{g}}_0$. Если $p = N$, получаем тривиальные расслоения. В этом случае $\Lambda_0 = \text{Id}$, $\tilde{\mathfrak{h}}_0 = \mathfrak{h}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}$. Пусть решетка $\tilde{Q}^\vee$ кокорней в $\tilde{\mathfrak{h}}_0$, сгенерированная $\tilde{\Pi}^\vee$ и $\tilde{P}^\vee$, есть решетка ковесов. Большую клетку в пространстве модулей $\mathcal{M}_{G_l}$ G_l -расслоений можно отождествить с фундаментальными областями C^Γ аффинной группы Вейля $W \ltimes (\tau\Gamma^\vee \oplus \Gamma^\vee)$, где Γ – подрешетка $\tilde{Q}^\vee \subseteq \Gamma \subseteq \tilde{P}^\vee$ в $\tilde{\mathfrak{h}}_0$:

$$\mathbf{u} \in C^\Gamma = \tilde{\mathfrak{h}}_0 / (W \ltimes (\tau\Gamma \oplus \Gamma)). \quad (2.25)$$

2.3. Пример: $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения над эллиптической кривой. В этом случае общие функции переклейки в G_l -расслоениях можно построить явно. Кривая имеет два фундаментальных цикла: a ($z \rightarrow z + 1$) и b ($z \rightarrow z + \tau$). Определим тривиальное расслоение E на Σ_τ парой коммутирующих матриц:

$$s(z + 1) = \rho_a s(z), \quad s(z + \tau) = \rho_b s(z), \quad [\rho_a, \rho_b] = \text{Id}. \quad (2.26)$$

Это $PGL(N, \mathbb{C})$ -расслоение, которое поднимается до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Рассмотрим представление $\hat{\rho}\mathcal{K}$, действующее на сечениях E :

$$s(z + 1) = \hat{\rho}_a s(z), \quad s(z + \tau) = \hat{\rho}_b s(z) \quad (2.27)$$

с коммутационными соотношениями (2.6)

$$[\hat{\rho}_a, \hat{\rho}_b] = \omega \text{Id}. \quad (2.28)$$

Можно выбрать $\hat{\rho}_a = \mathcal{Q}$, $\hat{\rho}_b = \Lambda$ из (A.28), (A.29). Расслоение с такими функциями переклейки не поднимается до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Заменяем $\hat{\rho}_b$ на

$$\hat{\rho}'_b = e^{-2\pi i(z+\tau/2)/N} \Lambda. \quad (2.29)$$

Это $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоение, так как $[\hat{\rho}_a, \hat{\rho}'_b] = \text{Id}$ и $\det \hat{\rho}'_b \neq 1$. Из (2.29) следует, что сечение детерминантного расслоения есть тета-функция

$$\vartheta(z, \tau) = q^{1/8} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i(n(n+1)\tau + 2nz)}, \quad q = e^{2\pi i\tau}. \quad (2.30)$$

Она имеет простой ноль в фундаментальной области $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$. Следовательно, степень расслоения равна единице. Такое расслоение называется тета-расслоением. В общем случае [27] ранг имеет вид произведения $N = pl$, а матрицы перехода (мультипликаторы)

$$\hat{\rho}_a = \mathcal{Q}, \quad \hat{\rho}_b = \mathbf{e}(\vec{u}_l) \Lambda^p, \quad (2.31)$$

где

$$\vec{u}_l = \text{diag}(\overbrace{\mathbf{u}_p, \dots, \mathbf{u}_p}^l), \quad \mathbf{u}_p = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p). \quad (2.32)$$

Так как $[\mathcal{Q}, \Lambda^p] = \omega^p \text{Id}_l$, $\omega^p = e^{2\pi i/l}$, имеем

$$[\hat{\rho}_a, \hat{\rho}_b] = \omega^p \text{Id}_N. \quad (2.33)$$

Сравнивая полученное равенство с (2.9), заключаем, что соотношения (2.31) задают мультипликаторы G_l -расслоения на Σ_τ . Следовательно, ω^p – элемент из $H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(\mathbf{L}G_l)) \sim \mathbb{Z}_p$, т.е. имеет место препятствие (2.13). Как и в (2.31), преобразуем матрицу:

$$\hat{\rho}_b \rightarrow \hat{\rho}'_b = e^{2\pi i(z+\tau/2)/p} \hat{\rho}_b. \quad (2.34)$$

В итоге получим $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоение степени $p \pmod{N}$.

2.4. Классификация. Пусть $\bar{G}$ – односвязная накрывающая простой, комплексной группы Ли G , а $\mathcal{Z}(\bar{G})$ – ее центр. Нужно найти все решения (по модулю гладких калибровочных преобразований) уравнения

$$\mathcal{Q} \Lambda \mathcal{Q}^{-1} \Lambda^{-1} = \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{Z}(\bar{G}). \quad (2.35)$$

Указанная задача была решена в работах [22], [23]. В частности, было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{Q}$ – полупростой элемент, $\mathcal{Q} \in \mathcal{H}_{\bar{G}}$, где $\mathcal{H}_{\bar{G}}$ – подгруппа Картана. Тогда пространство решений (2.35) $\mathcal{M}(G) = (\mathcal{Q}, \Lambda)$ может быть записано в виде

$$\mathcal{Q} = e^{2\pi i \rho^\vee / h} U, \quad \Lambda = \Lambda^0 V, \quad (2.36)$$

ТАБЛИЦА 2.1

G	$\text{ord}(\Lambda^0)$	$\tilde{\mathfrak{g}}_0$	$\mathfrak{g}_0$
$SL(N, \mathbb{C})$ ($N = pl$)	N/p	sl_p	$sl_p \oplus_{j=1}^{l-1} gl_p$
$SO(2n+1)$	2	$so(2n-1)$	$so(2n)$
$Sp(2l)$	2	$so(2l)$	gl_{2l}
$Sp(2l+1)$	2	$so(2l+1)$	gl_{2l+1}
$SO(4l+2)$	4	$so(2l-1)$	$so(2l) \oplus so(2l) \oplus \underline{1}$
$SO(4l+2)$	2	$so(4l-1)$	$so(4l) \oplus \underline{1}$
$SO(4l)$	2	$so(2l)$	$so(2l) \oplus so(2l)$
$SO(4l)$	2	$so(4l-3)$	$so(4l-2) \oplus \underline{1}$
E_6	3	g_2	$so(8) \oplus 2 \cdot \underline{1}$
E_7	2	f_4	$e_6 \oplus \underline{1}$

где $\rho^\vee$ – полусумма положительных корней, h – число Кокстера, а Λ^0 – элемент группы Вейля, определяемый по ζ и соответствующий симметрии расширенной диаграммы Дынкина для алгебры Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\bar{G})$. V и U – произвольные элементы подгруппы в подгруппе Картана $\tilde{\mathcal{H}}_0 \subset \mathcal{H}_{\bar{G}}$, коммутирующие с Λ^0 , а $\tilde{\mathfrak{H}}_0 = \text{Lie}(\tilde{\mathcal{H}}_0)$ – подалгебра Картана “инвариантной” группы Ли $\tilde{G}_0 \subset \bar{G}$.

Элементы центра являются препятствиями для поднятия G^{ad} -расслоения до G -расслоения, т. е. соответствуют характеристическим классам, таким как классы Штифеля–Уитни для ортогональных групп. Действительно, из короткой точной последовательности $1 \rightarrow \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow \bar{G}(\mathcal{O}_\Sigma) \rightarrow G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_\Sigma) \rightarrow 1$ следует длинная последовательность

$$\cdots \rightarrow H^1(\Sigma_g, \bar{G}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^1(\Sigma_g, G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z}(\bar{G})) \sim \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow 0.$$

Тогда образы $H^1(\Sigma_g, G(\mathcal{O}_\Sigma))$ (эта группа когомологий с коэффициентами в аналитических пучках как раз описывает пространство модулей голоморфных G -расслоений) в $H^2(\Sigma_g, \mathcal{Z})$ являются препятствием для поднятия G^{ad} -расслоения до G -расслоения и называются характеристическими классами G -расслоений. Инвариантные подгруппы Ли $\tilde{G}_0 \subset \bar{G}$, упомянутые в теореме, получены явно в каждом нетривиальном случае (см. табл. 2.1).

2.5. Обобщенный базис в алгебрах Ли. Алгебра $\mathfrak{g}$ допускает корневое разложение: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} = \sum_{\beta \in R} \mathfrak{R}_\beta$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{R}_\beta = 1$. Базис Шевалле в алгебре $\mathfrak{g}$ образован элементами

$$\{E_{\beta_j} \in \mathfrak{R}_{\beta_j}, \beta_j \in R, H_{\alpha_k} \in \mathfrak{h}, \alpha_k \in \Pi\}, \quad (2.27)$$

где R – система корней (см. приложение Б), элементы Π – простые корни, а H_{α_k} определены коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [E_{\alpha_k}, E_{-\alpha_k}] &= H_{\alpha_k}, & [H_{\alpha_k}, E_{\pm\alpha_j}] &= a_{kj} E_{\pm\alpha_k}, & \alpha_k, \alpha_j &\in \Pi, \\ [H_{\alpha_j}, E_{\alpha_k}] &= a_{kj} E_{\alpha_k}, & [E_\alpha, E_\beta] &= C_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Постоянные $C_{\alpha,\beta}$ – структурные константы $\mathfrak{g}$, а a_{kj} – матрица Картана. Пусть $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathfrak{H}$, тогда элементы H_α отождествляются с корнями: $H_\alpha = \alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Тогда

$$(H_\alpha, H_\beta) = \frac{4(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} a_{\alpha, \beta}.$$

Форма Киллинга на алгебре может быть выражена в терминах (α, α) :

$$(E_\alpha, E_\beta) = \delta_{\alpha, -\beta} \frac{2}{(\alpha, \alpha)}.$$

Структурные константы $C_{\alpha,\beta}$ обладают следующими важными свойствами:

$$C_{\alpha,\beta} = -C_{\beta,\alpha}, \quad C_{\lambda\alpha,\beta} = C_{\alpha,\lambda^{-1}\beta}, \quad \lambda \in W, \quad C_{\alpha+\beta, -\alpha} = \frac{|\beta|^2}{|\alpha + \beta|^2} C_{-\alpha, -\beta}. \quad (2.39)$$

Рассмотрим элемент $\zeta \in \mathcal{Z}(\bar{G})$ порядка l . Найдем соответствующий элемент из группы Вейля $\Lambda^0 \in W$. Элемент Λ^0 является генератором циклической группы $\mu_l = (\Lambda^0, (\Lambda^0)^2, \dots, (\Lambda^0)^l = 1)$, изоморфной центру $\mathcal{Z}(\bar{G})$. Так как $(\Lambda^0)^l = \text{Id}$, имеем l -периодичную градуировку

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{a=0}^{l-1} \mathfrak{g}_a, \quad \lambda(\mathfrak{g}_a) = \omega^a \mathfrak{g}_a, \quad \omega = e^{2\pi i/l}, \quad \lambda = \text{Ad}_{\Lambda^0}, \quad (2.40)$$

$$[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] = \mathfrak{g}_{a+b} \pmod{l}, \quad (2.41)$$

где $\mathfrak{g}_0$ – инвариантная подалгебра $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, а подпространства $\mathfrak{g}_a$ являются ее представлениями. Поскольку $\Lambda^0 \in W$, его действие сохраняет систему корней R . Определим соответствующий фактор $\mathcal{T}_l = R/\mu_l$. Тогда R распадается в объединение μ_l -орбит:

$$R = \bigcup_{\mathcal{T}_l} \mathcal{O}.$$

Обозначим через $\mathcal{O}(\bar{\beta})$ орбиту, порожденную корнем β :

$$\mathcal{O}(\bar{\beta}) = \{\beta, \lambda(\beta), \dots, \lambda^{l-1}(\beta)\}, \quad \bar{\beta} \in \mathcal{T}_l.$$

Число элементов в орбите $\mathcal{O}$ (длина $\mathcal{O}$) равно $l/p_\alpha = l_\alpha$, где p_α является некоторым делителем l . Пусть ν_α – число орбит $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ длины l_α . Тогда $\sharp R = \sum \nu_\alpha l_\alpha$. Заметим, что если орбита $\mathcal{O}(\bar{\beta})$ имеет длину l_β ($l_\beta \neq 1$), то корни $\lambda^k \beta$ и $\lambda^{k+l_\beta} \beta$ совпадают. Определим орбиту в $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}_{\bar{\beta}} = \{E_\beta, E_{\lambda(\beta)}, \dots, E_{\lambda^{l-1}(\beta)}\},$$

соответствующую орбите в множестве корней $\mathcal{O}(\bar{\beta})$. Как и выше, $\mathcal{E} = \bigcup_{\bar{\beta} \in \mathcal{T}_l} \mathcal{E}_{\bar{\beta}}$. Для каждой орбиты $\mathcal{O}(\bar{\beta})$ определим набор целых чисел

$$J_{p_\alpha} = \{a = mp_\alpha \mid m \in \mathbb{Z} \text{ } (p_\alpha = l/l_\alpha)\}. \quad (2.42)$$

Дискретное преобразование Фурье корневого базиса Шевалле на $\mathcal{O}(\bar{\beta})$ определяется следующим образом:

$$\mathfrak{t}_{\bar{\beta}}^a = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{m=0}^{l-1} \omega^{ma} E_{\lambda^m(\beta)}, \quad \omega = e^{2\pi i/l}, \quad a \in J_{\beta}. \quad (2.43)$$

Таким образом, мы определили новый базис на корневой части алгебры $\{\mathfrak{t}_{\bar{\beta}}^a, (a \in J_l, \bar{\beta} \in \mathcal{T}_l)\}$. Похожая конструкция существует в подалгебре Картана $\mathfrak{H}$. Аналогично, Λ^0 является генератором циклической группы μ_l . Поскольку действие Λ^0 сохраняет расширенную диаграмму Дынкина, оно сохраняет также расширенную систему кокорней $(\Pi^\vee)^{\text{ext}} = (\Pi^\vee) \cup \alpha_0^\vee$ в $\mathfrak{H}$. Рассмотрим фактор-множество $\mathcal{K}_l = (\Pi^\vee)^{\text{ext}}/\mu_l$ и определим орбиту $\mathcal{H}(\bar{\alpha})$ длины $l_\alpha = l/p_\alpha$ в $(\Pi^\vee)^{\text{ext}}$, проходящую через элемент $H_\alpha \in (\Pi^\vee)^{\text{ext}}$:

$$\mathcal{H}(\bar{\alpha}) = \{H_\alpha, H_{\lambda(\alpha)}, \dots, H_{\lambda^{l-1}(\alpha)}\}, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{K}_l = (\Pi^\vee)^{\text{ext}}/\mu_l.$$

Таким образом, множество $(\Pi^\vee)^{\text{ext}}$ распадается в объединение (непересекающихся) орбит $\mathcal{H}(\bar{\alpha})$: $(\Pi^\vee)^{\text{ext}} = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \mathcal{K}_l} \mathcal{H}(\bar{\alpha})$. Определим дискретное преобразование Фурье:

$$\mathfrak{h}_{\bar{\alpha}}^c = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{m=0}^{l-1} \omega^{mc} H_{\lambda^m(\alpha)}, \quad \omega = e^{2\pi i/l}, \quad c \in J_\alpha. \quad (2.44)$$

Основным свойством данного базиса, важным для построения операторов Лакса интегрируемых систем с нетривиальным характеристическим классом, является диагонализация в нем операторов переклейки. Действительно, поскольку $\lambda(E_\alpha) = E_{\lambda(\alpha)}$, для оператора переклейки $\text{Le}(\tilde{\mathbf{u}})$, $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathfrak{H}}_0$, получаем

$$\text{Ad}_\Lambda(\mathfrak{t}_{\bar{\beta}}^a) = \mathbf{e}\left(\langle \tilde{\mathbf{u}}, \beta \rangle - \frac{a}{l}\right) \mathfrak{t}_{\bar{\beta}}^a, \quad \mathbf{e}(x) = e^{2\pi i x}. \quad (2.45)$$

Для второго оператора переклейки находим

$$\text{Ad}_Q(\mathfrak{t}_{\bar{\beta}}^a) = \mathbf{e}(\langle \kappa, \beta \rangle) \mathfrak{t}_{\bar{\beta}}^a. \quad (2.46)$$

Данное соотношение следует из равенства $Q = e^{2\pi i(\rho^\vee/h + \mathbf{q})}$. Существование базиса, в котором операторы переклейки одновременно диагонализуются, является следствием того, что они коммутируют в присоединенном представлении. Изложенная выше процедура дает явную конструкцию данного базиса.

Если выбрать другой элемент Λ' , соответствующий другому характеристическому классу и подгруппе $\mathcal{Z}_{l'}$ ($l' \neq l$), получим новый набор орбит и новый GS-базис (generalized sine-basic). Таким образом, такой базис можно построить для каждой подгруппы центра $\mathcal{Z}(\bar{G})$ (т. е. для каждого расслоения имеем собственный базис, естественно с ним связанный).

Коммутационные соотношения в GS-базисе могут быть найдены с использованием соотношений в базисе Шевалле (2.38). Принимая во внимание инвариантность структурных констант относительно действия группы Вейля $C_{\lambda\alpha, \lambda\beta} = C_{\alpha, \beta}$, коммутационные соотношения в GS-базисе несложно получить из (2.43) и (2.44). Коммутаторы между корневыми элементами имеют вид

$$[\mathfrak{t}_\alpha^a, \mathfrak{t}_\beta^b] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{l-1} \omega^{bs} C_{\alpha, \lambda^s \beta} \mathfrak{t}_{\alpha+\lambda^s \beta}^{a+b}, & \alpha \neq -\lambda^s \beta, \\ \frac{p_\alpha}{\sqrt{l}} \omega^{sb} \mathfrak{h}_\alpha^{a+b}, & \alpha = -\lambda^s \beta, \end{cases} \quad (2.47)$$

коммутаторы корневых и картановских элементов –

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}_\alpha^k, \mathfrak{t}_\beta^m] &= \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{l-1} \omega^{-ks} \frac{2(\alpha, \lambda^s \beta)}{(\alpha, \alpha)} \mathfrak{t}_\beta^{k+m}, \\ [\mathfrak{h}_\alpha^k, \mathfrak{t}_\beta^m] &= \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{s=0}^{l-1} \omega^{-ks} \frac{(\alpha, \alpha)}{2} (\hat{\alpha}, \lambda^s \beta) \mathfrak{t}_\beta^{k+m}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь $\hat{\alpha}$ обозначает элемент, дуальный простому корню $(\hat{\alpha}_i, \beta_j) = \delta_{ij}$. Как следует из (2.43), форма Киллинга принимает вид

$$(\mathfrak{t}_\alpha^{c_1}, \mathfrak{t}_\beta^{c_2}) = \delta_{\alpha, -\lambda^r(\beta)} \delta^{(c_1+c_2, 0 \pmod{l})} \omega^{-rc_1} \frac{2p_\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \quad (2.49)$$

где $p_\alpha = l/l_\alpha$ и l_α – длина орбиты $\mathcal{O}(\bar{\alpha})$. В частности, $(\mathfrak{t}_\alpha^a, \mathfrak{t}_{-\alpha}^{-a}) = 2p_\alpha/(\alpha, \alpha)$. В дальнейшем будет также удобно использовать дуальный базис $\mathfrak{T}_\alpha^b$:

$$(\mathfrak{T}_{\alpha_1}^{b_1}, \mathfrak{T}_{\alpha_2}^{b_2}) = \delta^{(b_1+b_2, 0 \pmod{l})} \delta_{\bar{\alpha}_1, -\bar{\alpha}_2}, \quad \mathfrak{T}_\alpha^b = \mathfrak{t}_{-\alpha}^{-b} \frac{(\alpha, \alpha)}{2p_\alpha}. \quad (2.50)$$

Форма Киллинга в данном базисе обратна форме (2.49):

$$(\mathfrak{T}_{\alpha_1}^{a_1}, \mathfrak{T}_{\alpha_2}^{a_2}) = \delta_{\alpha_1, -\lambda^r(\alpha_2)} \delta^{(a_1+a_2, 0 \pmod{l})} \omega^{ra_1} \frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{2p_{\alpha_1}}.$$

В частности, $(\mathfrak{T}_\alpha^a, \mathfrak{T}_{-\alpha}^{-a}) = (\alpha, \alpha)/2p_\alpha$. Рассмотрим теперь форму Киллинга на картановской части алгебры Ли. Форма Киллинга в новом базисе имеет вид

$$(\mathfrak{h}_\alpha^a, \mathfrak{h}_\beta^b) = \delta^{(a+b, 0 \pmod{l})} \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^a, \quad \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^a = \frac{2}{(\beta, \beta)} \sum_{s=0}^{l-1} \omega^{-sa} a_{\beta, \lambda^s(\alpha)}, \quad (2.51)$$

где $a_{\alpha, \beta}$ – элементы матрицы Картана. Дуальный базис образован векторами $\mathfrak{H}_\alpha^a$:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}_\alpha^a, \mathfrak{h}_\beta^b) &= \delta^{(a+b, 0 \pmod{l})} \delta_{\alpha, \beta}, \\ \mathfrak{H}_\alpha^a &= \sum_{\beta \in \Pi} (\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^a)^{-1} \mathfrak{h}_\beta^{-a}, \quad \mathfrak{h}_\beta^a = \sum_{\alpha \in \Pi} (\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^{-a}) \mathfrak{H}_\alpha^{-a}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Форма Киллинга в дуальном базисе принимает вид

$$(\mathfrak{H}_{\alpha_1}^{a_1}, \mathfrak{H}_{\alpha_2}^{a_2}) = \delta^{(a_1+a_2, 0 \pmod{l})} (\mathcal{A}_{\alpha_1, \bar{\alpha}_2}^{a_1})^{-1}. \quad (2.53)$$

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

3.1. Системы Годена на эллиптической кривой. Пусть Σ_τ – эллиптическая кривая с периодами $(1, \tau)$, $\{z_i\}$, $i = 1, \dots, m$, – набор точек на ней, а V – голоморфное векторное расслоение ранга N и степени k . По аналогии с рациональным случаем определим матрицу Лакса $L^{m|k|N}(z)$ системы Годена $EG(m|k|N)$ на эллиптической кривой Σ как мероморфное сечение расслоения $\text{End } V$ с простыми полюсами в точках $\{z_i\}$ и фиксированными вычетами $S^i \in \mathfrak{sl}^*(N, \mathbb{C})$. Соответствующая 1-форма $L^{m|k|N}(z) dz$ в конструкции Хитчина [3], [30] является редуцированным полем Хиггса. Выбор векторного расслоения V задает квазипериодические граничные условия на решетке $\langle 1, \tau \rangle = \mathbb{Z} \oplus \tau \mathbb{Z}$:

$$L^{m|k|N}(z+1) = g_1 L^{m|k|N}(z) g_1^{-1}, \quad L^{m|k|N}(z+\tau) = g_\tau L^{m|k|N}(z) g_\tau^{-1}.$$

По существу, различаются расслоения разных степеней. Размерность пространства модулей расслоений фиксированной степени, ассоциированных с главным $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоением, равна $\text{НОД}(N, k) - 1$ [31]. Она максимальна для $k = 0 \pmod{N}$ и минимальна для $k = 1 \pmod{N}$. Рассмотрим эти два случая более подробно.

Случай $\deg V = 0$ был впервые рассмотрен в работе [26]. Расслоения определяются N параметрами $\{u_i\}$, $i = 1, \dots, N$: $u_1 + \dots + u_N = 0$. Мультипликаторы заданы в виде

$$g_1 = \text{Id}_N, \quad g_\tau = \mathbf{e}(-\mathbf{u}) = \text{diag}(\mathbf{e}(-u_1), \dots, \mathbf{e}(-u_N)), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{e}(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$. Эти условия фиксируют матрицу Лакса системы $EG(m|0|N)$

$$L_{ij}^{m|0|N}(z) = \delta_{ij} v_i + \delta_{ij} \sum_{l=1}^m S_{ii}^l E_1(z - z_l) + (1 - \delta_{ij}) \sum_{l=1}^m S_{ij}^l \phi(z - z_l, u_i - u_j) \quad (3.2)$$

с точностью до сопряжения произвольным элементом из подгруппы Картана $\mathbf{H}$ в группе $SL(N, \mathbb{C})$. Функции $\phi(x, y)$ имеют вид $\phi(x, y) = \vartheta'(0)\vartheta(x+y)/\vartheta(x)\vartheta(y)$, а $E_1(z) = \partial_z \vartheta(z)$. Гамильтонова редукция прямого произведения орбит коприсоединенного действия $\{\mathcal{O}^1 \times \dots \times \mathcal{O}^m\}/\mathbf{H}$ по этой симметрии описывает “спиновую” часть [32] фазового пространства системы Годена. Отображение момента, соответствующее указанному действию, имеет вид

$$\mu = \sum_{l=1}^m S_{ii}^l. \quad (3.3)$$

Уравнение $\mu = 0$ вместе с некоторым выбором фиксации действия подгруппой $\mathbf{H}$ окончательно задает матрицу $L^{m|0|N}(z)$. Бесспиновая часть фазового пространства, соответствующая динамике N частиц в системе центра масс с импульсами v_i и координатами u_i , является кокасательным расслоением к пространству модулей голоморфных векторных расслоений степени ноль.

Случай $\deg V = 1$ был впервые рассмотрен в работе [25]. Мультипликаторы расслоения V задаются в виде

$$g_1 = \mathcal{Q}^{-1}, \quad g_\tau = -\mathbf{e}\left(\frac{\tau}{2N} + \frac{z}{N}\right) \Lambda^{-1}, \quad (3.4)$$

где $\mathcal{Q}$ и Λ – матрицы, задающие стандартное представление конечной группы Гейзенберга. Запишем матрицу Лакса в специальном базисе $\{E_\alpha\}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$:

$$L^{m|1|N}(z) = \sum_{l=1}^m \sum_{\alpha \neq 0} E_\alpha S_\alpha^l \varphi_\alpha(z - z_l), \quad (3.5)$$

$$\varphi_\alpha(z) = \mathbf{e}(z \partial_\tau \omega_\alpha) \phi(z, \omega_\alpha), \quad \omega_\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \tau}{N}.$$

Фазовым пространством $EG(1|1|N)$ является прямое произведение орбит $\mathcal{O}^1 \times \dots \times \mathcal{O}^m$:

$$\{S_\alpha^i, S_\beta^j\} = 2\sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{N} (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \delta^{ij} S_{\alpha+\beta}^i. \quad (3.6)$$

Скобки Пуассона (3.6) можно задать в R -матричной форме

$$\{L_1^{m|1|N}(z), L_2^{m|1|N}(w)\} = [L_1^{m|1|N}(z) + L_2^{m|1|N}(w), r(z, w)] \quad (3.7)$$

с r -матрицей Белавина–Дринфельда [33]

$$r(z, w) = \sum_{\alpha \neq 0} E_\alpha \otimes E_{-\alpha} \varphi_\alpha(z - w). \quad (3.8)$$

M -операторы можно найти, например, в работе [34].

3.2. Система Калоджеро. Отметим важный частный случай. Система Годена ($\deg V = 0$) с одной отмеченной точкой, которой соответствует орбита коприсоединенного действия наименьшей размерности, совпадает после редукции в подгруппе Картана из $SL(N, \mathbb{C})$ с эллиптической $sl(N, \mathbb{C})$ -системой Калоджеро–Мозера [35]:

$$L_{ij}^{1|0|N}(z) = L_{ij}^{\text{CM}} = \delta_{ij} v_i + (1 - \delta_{ij}) \nu \phi(z, u_i - u_j), \quad (3.9)$$

где ν – константа взаимодействия. Квадратичный гамильтониан имеет вид

$$H^{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} v_i^2 - \nu^2 \sum_{i \neq j} \wp(u_i - u_j). \quad (3.10)$$

Вектор-столбец $e_1 = (1, 1, \dots, 1)$ является собственным вектором:

$$L_{-1}^{\text{CM}} e_1 = (N - 1) \nu e_1. \quad (3.11)$$

Кроме того, имеется $(N - 1)$ -мерное собственное подпространство T_{N-1} , соответствующее собственному значению $-\nu$:

$$L_{-1}^{\text{CM}} e_{\mathbf{a}} = -\nu e_{\mathbf{a}}, \quad e_{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_N), \quad \sum_n a_n = 0. \quad (3.12)$$

Матрица M^{CM} , отвечающая квадратичному гамильтониану (3.10), имеет вид

$$M^{\text{CM}} = -\delta_{ij} \sum_{k \neq j} \wp(u_j - u_k) + \nu(1 - \delta_{ij}) f(z, u). \quad (3.13)$$

В дальнейшем под $\phi'(z, u_j - u_k)$ будем иметь в виду производную по второму аргументу.

3.3. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок Эйлера–Арнольда. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок является примером волчка Эйлера–Арнольда, фазовое пространство которого задается орбитой коприсоединенного действия группы $SL(N, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{R}^{\text{rot}} = \{\mathbf{S} \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C}), \mathbf{S} = g^{-1}\mathbf{S}^{(0)}g\}, \quad (3.14)$$

где g определено по модулю левых сдвигов G_0 , коммутирующих с $\mathbf{S}^{(0)}$. Иными словами, в терминах группы G орбита есть факторпространство G_0/G по стабилизатору, который в случае общего положения является подгруппой Картана $T \in G$. На фазовом пространстве волчка $\mathcal{R}^{\text{rot}}$ существует невырожденная симплектическая форма Кириллова–Костанта

$$\omega^{\text{rot}} = \text{tr}(\mathbf{S}^{(0)} Dgg^{-1} Dgg^{-1}). \quad (3.15)$$

Динамика задается гамильтонианом

$$H^{\text{rot}} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}J(\mathbf{S})), \quad (3.16)$$

где J – линейный оператор на алгебре Ли ($\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$). Обратный к нему оператор обычно называют тензором инерции. Уравнения движения имеют вид

$$\partial_t \mathbf{S} = [J(\mathbf{S}), \mathbf{S}]. \quad (3.17)$$

Рассмотрим специальный случай $J = \hat{\wp}$. При этом описанная выше система окажется интегрируемой. А именно,

$$\hat{\wp}S = \sum_{mn} \hat{\wp}_{mn} s_{mn} E_{mn}, \quad S = \sum_{mn} s_{mn} E_{mn},$$

где $\{E_{mn}\}$ – некоторый специальный базис в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, образующий синус-алгебру (A.31), s_{mn} – компоненты разложения S в этом базисе, а $\hat{\wp}_{mn}$ – компонента линейного оператора $\wp$ в базисе $\{E_{mn}\}$:

$$\hat{\wp} = \{\hat{\wp}_{mn}\} = \left\{ \wp \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \right\}, \quad \wp \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \wp \left(\frac{m + n\tau}{N}, \tau \right) \equiv \wp_{mn}, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

Выпишем уравнения движения в базисе $\{E_{mn}\}$:

$$\partial_t S_{mn} = \frac{N}{\pi} \sum_{k,l} S_{k,l} S_{m-k,n-l} \wp_{kl} \sin \frac{\pi}{N} (kn - ml). \quad (3.19)$$

Эллиптический волчок, описанный выше, является примером системы Хитчина, отвечающей $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоению Хиггса ($\deg(E) = 1$) с квазипараболической структурой над эллиптической кривой Σ_τ с одной отмеченной точкой $z = 0$ [36]. Поясним это утверждение. Несложно доказать, что уравнения (3.19) эквивалентны уравнениям Лакса. В базисе $\{E_{mn}\}$ пара Лакса имеет вид

$$L^{\text{rot}} = \sum_{m,n} S_{mn} \wp_{mn}(z) E_{mn}, \quad \wp_{mn}(z) = \mathbf{e} \left(-\frac{nz}{N} \right) \phi \left(-\frac{m + n\tau}{N}; z \right), \quad (3.20)$$

$$M^{\text{rot}} = \sum_{m,n} S_{mn} f_{mn}(z) E_{mn}, \quad f_{mn}(z) = \mathbf{e} \left(-\frac{nz}{N} \right) \partial_u \phi(u; z)|_{u=-(m+n\tau)/N}. \quad (3.21)$$

Тогда уравнения Лакса оказываются эквивалентными уравнениям (3.19) тождественно по z . Далее, вычислим гамильтониан с помощью разложения

$$\frac{1}{N} \operatorname{tr}(L^{\operatorname{rot}})^2 = -2H^{\operatorname{rot}} + \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 \wp(z),$$

где H^{rot} – гамильтониан (3.16) для $J = \hat{\wp}$. Оператор Лакса (3.20) удовлетворяет уравнению на поле Хиггса

$$\bar{\partial} L^{\operatorname{rot}} = 0, \quad \operatorname{Res} L^{\operatorname{rot}}|_{z=0} = 2\pi\sqrt{-1}\mathbf{S},$$

и обладает следующими квазипериодическими свойствами:

$$L^{\operatorname{rot}}(z+1) = \mathcal{Q}(\tau)L^{\operatorname{rot}}(z)\mathcal{Q}^{-1}(\tau), \quad (3.22)$$

$$L^{\operatorname{rot}}(z+\tau) = \tilde{\Lambda}(z, \tau)L^{\operatorname{rot}}(z)(\tilde{\Lambda}(z, \tau))^{-1}, \quad (3.23)$$

где $\tilde{\Lambda}(z, \tau) = -\mathbf{e}^{(-z-\tau/2)/N}\Lambda$.

3.4. Классификация по характеристическим классам. Оператор Лакса определяется как мероморфное сечение расслоения в присоединенном представлении и полностью определяется следующими условиями. Он имеет единственный полюс в точке $z = 0$ с вычетом, принимающим значение в коприсоединенной орбите $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} L|_{z=0} = \mathbf{S} &= \sum_{\alpha \in \Pi} \frac{1}{2}(\alpha, \alpha) S_{\alpha}^{\mathfrak{H}} \sum_{\beta \in \Pi} a_{\alpha, \beta}^{-1} H_{\beta} + \sum_{\beta \in R} S_{\beta}^{\mathfrak{S}} \frac{(\beta, \beta)}{2} E_{-\beta} = \\ &= \sum_{j=1}^n S_j e_j + \sum_{\beta \in R} S_{\beta}^{\mathfrak{S}} \frac{(\beta, \beta)}{2} E_{-\beta}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

а при обходе вокруг циклов эллиптической кривой он преобразуется следующим образом:

$$L(z+1) = \mathcal{Q}L(z)\mathcal{Q}^{-1}, \quad L(z+\tau) = \Lambda L(z)\Lambda^{-1}, \quad (3.25)$$

где $\mathcal{Q}$ и Λ – операторы переклеек, задающие расслоения. Отождествим $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$, используя форму Киллинга. Тогда координаты на фазовом пространстве представляют собой линейные функции на $\mathfrak{g}$

$$S_{\alpha}^{\mathfrak{H}} = (\mathbf{S}, H_{\alpha}) \quad (\text{или } S_j = (\mathbf{S}, e_j)), \quad S_{\beta}^{\mathfrak{S}} = (\mathbf{S}, E_{\beta}).$$

Скобки Пуассона для $S_{\alpha}^{\mathfrak{H}}(S_j)$, $S_{\beta}^{\mathfrak{S}}$ имеют те же структурные константы, что и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (2.38), (2.39). Можно переписать (3.24) в дуальном GS-базисе. При этом будем использовать градуировку на алгебре (2.40), так что оператор Лакса имеет вид

$$L(z) = \sum_{a=0}^{l-1} L_a(z) \quad (3.26)$$

и нулевая компонента, отвечающая λ -инвариантному подпространству в алгебре, имеет дополнительное разложение. Как было показано в [22] прямой проверкой для

случая всех систем корней, инвариантное подпространство распадается на прямую сумму подалгебры Ли и ее некоторого представления $\mathfrak{g}_0 = \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus V$ (см. раздел 5, табл. 4 в [22]). В соответствии с этим для нулевой компоненты оператора Лакса получим

$$L_0(z) = \tilde{L}_0(z) + L'_0(z).$$

Тогда

$$\mathbf{S} = \text{Res } L|_{z=0} = \text{Res } \tilde{L}_0|_{z=0} + \text{Res } L'_0|_{z=0} + \sum_{a=1}^{l-1} \text{Res } L_a|_{z=0} = \tilde{\mathbf{S}}_0 + \mathbf{S}'_0 + \sum_{a=1}^{l-1} \mathbf{S}_a,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_0 &= \sum_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\Pi}} \tilde{S}_{\tilde{\alpha}}^{\mathfrak{H}} \frac{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}{4(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} H_{\tilde{\beta}} + \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{R}} \tilde{S}_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{E}} \frac{(\tilde{\beta}, \tilde{\beta})}{2} E_{-\tilde{\beta}}, \\ \mathbf{S}'_0 &= \sum_{\tilde{\beta} \in \mathcal{T}'_l} S'_{\tilde{\beta}} \mathfrak{T}_{\tilde{\beta}}^0, \quad \mathbf{S}_a = \sum_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{K}_l} S_{\tilde{\alpha}}^{\mathfrak{H}, a} \mathfrak{H}_{\tilde{\alpha}}^{l-a} + \sum_{\tilde{\beta} \in \mathcal{T}_l} S_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{E}, a} \mathfrak{T}_{-\tilde{\beta}}^{l-a}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В координатах

$$S_{\tilde{\alpha}}^{\mathfrak{H}, a} = (\mathbf{S}, \mathfrak{h}_{\tilde{\alpha}}^a), \quad S'_{\tilde{\beta}} = (\mathbf{S}, \mathfrak{t}_{\tilde{\beta}}^0), \quad S_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{E}, a} = (\mathbf{S}, \mathfrak{t}_{\tilde{\beta}}^a), \quad \tilde{S}_{\tilde{\alpha}}^{\mathfrak{H}} = (\mathbf{S}, H_{\tilde{\alpha}}), \quad S_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{E}} = (\mathbf{S}, E_{\tilde{\beta}})$$

структурные константы имеют такой же вид, как в (2.47), (2.48). Переход от одной записи оператора Лакса к другой выполняется с использованием описанного выше преобразования Фурье.

Выпишем матрицу оператора Лакса. Для этого рассмотрим функции (сечения) (A.66)

$$\varphi_{\beta}^a(\mathbf{x}, z) = \mathbf{e}(\langle \kappa, \beta \rangle z) \phi\left(\langle \mathbf{x} + \kappa \tau, \beta \rangle + \frac{a}{l}, z\right) = \mathbf{e}\left(\frac{zf_{\beta}}{h}\right) \phi\left(\langle \mathbf{x}, \beta \rangle + \frac{\tau f_{\beta}}{h} + \frac{a}{l}, z\right).$$

Последнее тождество следует из $\langle \kappa, \alpha \rangle = (1/h)\langle \rho^{\vee}, \alpha \rangle = f_{\alpha}/h$. Данная функция имеет в точности нужные нам квазипериодические условия:

$$\varphi_{\beta}^a(\mathbf{x}, z+1) = \mathbf{e}(\langle \kappa, \beta \rangle) \varphi_{\beta}^a(\mathbf{x}, z), \quad \varphi_{\beta}^a(\mathbf{x}, z+\tau) = \mathbf{e}\left(-\langle x, \beta \rangle - \frac{a}{l}\right) \varphi_{\beta}^a(\mathbf{x}, z).$$

Окончательно из (3.25) находим

$$\begin{aligned} L_a(z) &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{K}_l} S_{\tilde{\alpha}}^{\mathfrak{H}, a} \phi\left(\frac{a}{l}, z\right) \mathfrak{H}_{\tilde{\alpha}}^{l-a} + \sum_{\tilde{\beta} \in \mathcal{T}_l} S_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{E}, a} \varphi_{\tilde{\beta}}^a(-\tilde{\mathbf{u}}, z) \mathfrak{T}_{-\tilde{\beta}}^{l-a}, \\ L'_0(z) &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{T}'_l} S'_{\tilde{\alpha}} \varphi_{\tilde{\alpha}}^0(-\tilde{\mathbf{u}}, z) \mathfrak{T}_{-\tilde{\alpha}}^0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В дуальном базисе в $\mathfrak{H}$ оператор Лакса $L_a(z)$ принимает вид

$$L_a(z) = \sum_{s \in \mathcal{C}_l} S_s^{\mathfrak{H}, a} \phi\left(\frac{a}{l}, z\right) \mathfrak{h}_s^{-a} + \sum_{\tilde{\beta} \in \mathcal{T}_l} S_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{S}, a} \varphi_{\tilde{\beta}}^a(-\tilde{\mathbf{u}}, z) \mathfrak{T}_{-\tilde{\beta}}^{l-a}.$$

В исходном GS-базисе можно переписать его как

$$\begin{aligned} L_a(z) &= \sum_{s \in \mathcal{C}_l} S_s^{\mathfrak{H}, a} \phi\left(\frac{a}{l}, z\right) \mathfrak{h}_s^{-a} + \sum_{\tilde{\beta} \in \mathcal{T}_l} S_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{S}, a} \varphi_{\tilde{\beta}}^a(-\tilde{\mathbf{u}}, z) \mathfrak{t}_{\tilde{\beta}}^a \frac{(\beta, \beta)}{2p_{\beta}}, \\ L'_0(z) &= \sum_{\tilde{\alpha} \in \mathcal{T}'_l} S'_{\tilde{\alpha}} \varphi_{\tilde{\alpha}}^0(-\tilde{\mathbf{u}}, z) \mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^0 \frac{(\alpha, \alpha)}{2p_{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Рассмотрим инвариантную подалгебру $\tilde{\mathfrak{g}}_0$. Для $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ выпишем компоненты матрицы Лакса в базисе Шевалле. Если $p \leq n$ – ранг алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, $(e_1, \dots, e_p)$ – ортонормальный базис в $\tilde{\mathfrak{H}}_0$, а $E_{\tilde{\alpha}}$ – корневые генераторы, тогда компоненты $\tilde{L}_0$ могут быть построены с помощью функций $\varphi_{\tilde{\beta}}^0$ (A.66) и функции Эйзенштейна:

$$\tilde{L}_0(z) = \sum_{j=1}^p (v_j + \tilde{S}_j^{\mathfrak{H}} E_1(z)) e_j + \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{R}} \tilde{S}_{\tilde{\beta}}^{\mathfrak{S}} \varphi_{\tilde{\alpha}}^0(-\tilde{\mathbf{u}}, z) E_{\tilde{\beta}}. \quad (3.30)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{v}} = (v_1, \dots, v_p)$ – вектор импульсов, двойственный относительно скобок Пуассона координатам $\tilde{\mathbf{u}} = (u_1, \dots, u_p)$. По соответствующим элементам вычета следует провести редукцию аналогично (3.3).

3.5. Пример: взаимодействующие волчки. В работе [27] исследовались классические интегрируемые системы, отвечающие $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоениям с нетривиальными характеристическими классами. Рассмотрим этот случай с $N = lp$, $l, p \in \mathbb{Z}$. Расслоения заданы мультипликаторами (2.16) и элементом центра

$$\zeta = e^{2\pi i p/N} = e^{2\pi i/l} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

из условия (2.20). Мультипликаторы записываются явно в терминах $SL(N, \mathbb{C})$ -значных генераторов конечномерного представления группы Гейзенберга (A.28) и (A.29):

$$\mathcal{Q} \Lambda^p \mathcal{Q}^{-1} \Lambda^{-p} = e^{2\pi i p/N} \text{Id}, \quad \mathcal{Q}, \Lambda \in SL(N, \mathbb{C}). \quad (3.31)$$

Размерность пространства модулей таких расслоений равна $\text{НОД}(N, p) = p$ [31], [37], [38]. Действительно, несложно видеть, что картановский элемент алгебры Ли $\mathbf{u} \in \mathfrak{h} \subset sl(N, \mathbb{C})$ коммутирует одновременно с $\mathcal{Q}$ и Λ^p :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \text{diag}(u_1, \dots, u_p, u_1, \dots, u_p, \dots, u_1, \dots, u_p) = \bigoplus_{j=1}^l \mathbf{u}_{p \times p}, \quad \sum_{j=1}^p u_j = 0, \\ \mathbf{u}_{p \times p} &= \text{diag}(u_1, \dots, u_p) \in \tilde{\mathfrak{h}}_0 \subset sl(p, \mathbb{C}), \\ \text{Ad}_{\mathcal{Q}} \mathbf{u} &= 0, \quad \text{Ad}_{\Lambda} \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Как было показано в [27], существует такая числовая матрица S (комбинация перестановок), что

$$\begin{aligned} SuS^{-1} &= \bigoplus_{J=1}^p u_J \text{Id}_{l \times l}, \\ SQS^{-1} &= \bigoplus_{J=1}^p \mathbf{e}\left(\frac{J-l}{N}\right) \mathcal{Q}_{l \times l}, \\ S\Lambda^n S^{-1} &= \bigoplus_{J=1}^p \Lambda_{l \times l}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

То есть сечения $L(z) \in \Gamma(\text{End}(E_{SL(N, \mathbb{C})}(V)))$ определяются следующими квазипериодическими свойствами:

$$\begin{aligned} L_{IJ}(z+1) &= \mathbf{e}\left(\frac{I-J}{N}\right) \mathcal{Q}_{l \times l} L_{IJ}(z) \mathcal{Q}_{l \times l}^{-1}, \\ L_{IJ}(z+\tau) &= \mathbf{e}(-u_I) \Lambda_{l \times l} L_{IJ}(z) \Lambda_{l \times l}^{-1} \mathbf{e}(u_J). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Множитель $\mathbf{e}((I-J)/N)$ устраняется сдвигами $L_{IJ}(z) \rightarrow L_{IJ}(z)\mathbf{e}(-z(I-J)/N)$, $u_I \rightarrow u_I - I\tau/N$. Окончательно граничные условия приобретают вид

$$\begin{aligned} L_{IJ}(z+1) &= \mathcal{Q}_{l \times l} L_{IJ}(z) \mathcal{Q}_{l \times l}^{-1}, \\ L_{IJ}(z+\tau) &= \mathbf{e}(-u_I) \Lambda_{l \times l} L_{IJ}(z) \Lambda_{l \times l}^{-1} \mathbf{e}(u_J). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Следовательно, естественным и удобным является тензорный базис

$$E_{ij}^a = E_{ij} \otimes T_a \in gl(N, \mathbb{C}), \quad E_{ij} \in gl(p, \mathbb{C}), \quad T_a \in gl(l, \mathbb{C}), \quad (3.36)$$

в алгебре Ли $gl(N, \mathbb{C})$, где E_{ij} – стандартный базис в $gl(p, \mathbb{C})$, а T_a – базис в $gl(l, \mathbb{C})$ (A.31). Базис (3.36) будем использовать далее для построения квантовой R -матрицы. Отметим, что в работе [27] описанные расслоения были использованы для построения системы взаимодействующих волчков. L -оператор можно легко получить:

$$\begin{aligned} L_{IJ}(z) &= \frac{1}{p} \delta_{IJ} v_I + \sum_{m,n} (S_{IJ})_{mn} \phi_{mn}(z, u_{IJ}) E_{mn}, \\ \phi_{mn}(z, u_{IJ}) &= \mathbf{e}\left(\frac{-nz}{N}\right) \phi\left(u_{IJ} - \frac{m+n\tau}{l}, z\right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Скобки Пуассона на матричные элементы S задаются в виде скобок Пуассона–Ли, построенных по структурным константам алгебры Ли $gl(N, \mathbb{C})$:

$$\{(S_{IJ})_{ab}, (S_{KL})_{cd}\} = \delta_{KJ} (S_{IL})_{a+c, b+d} \kappa_{ab, cd} - \delta_{IL} (S_{KJ})_{a+c, b+d} \kappa_{cd, ab}. \quad (3.38)$$

Для системы Калоджеро (спиновой) имеет место классическое соответствие Калоджеро–Пенлеве [20]. Оно заключается в том, что одна и та же L -пара удовлетворяет одновременно и уравнениям Лакса, и уравнениям изомонодромных деформаций. В первом случае уравнения описывают интегрируемую механику, а во втором – ее неавтономное обобщение, в котором роль времен выполняют параметры

деформации (отмеченные точки либо модули кривой). Приведем пример. Рассмотрим спиновую модель Калоджеро [39]. Она задается следующей $sl(N, \mathbb{C})$ -значной L - A -парой:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \delta_{ij}(p_i + S_{ii}E_1(z)) + (1 - \delta_{ij})S_{ij}\phi(z, q_i - q_j), \\ M_{ij} &= (1 - \delta_{ij})S_{ij}f(z, q_i - q_j). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Уравнения Лакса $\partial_t L = [L, M]$ выполняются при условии

$$S_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.40)$$

и приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \sum_{k \neq i} S_{ik} S_{ki} E_2'(q_{ik}), \quad q_{ik} = q_i - q_k, \\ \dot{S}_{ij} &= \sum_{k \neq i, j} S_{ik} S_{kj} (E_2(q_{ik}) - E_2(q_{kj})). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Эти уравнения должны быть еще дополнены дираковскими слагаемыми, появляющимися в результате редукции по связям (3.40), дополненным условиями фиксации действия подгруппы Картана из $SL(N, \mathbb{C})$. Пример такой редукции можно найти в работах [40], [41]. Утверждение о классическом соответствии Калоджеро–Пенлеве состоит в том, что та же пара матриц (3.39) удовлетворяет и уравнению $\partial_\tau L - \partial_z M = [L, M]$. Уравнения динамики имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\tau p_i &= \sum_{k \neq i} S_{ik} S_{ki} E_2'(q_{ik}), \quad q_{ik} = q_i - q_k, \\ \partial_\tau S_{ij} &= \sum_{k \neq i, j} S_{ik} S_{kj} (E_2(q_{ik}) - E_2(q_{kj})), \end{aligned} \quad (3.42)$$

т. е. совпадают с (3.41), где время заменено на τ . Технически это происходит потому, что производная $\partial_t a u L$ по явной зависимости от τ равна $\partial_z M$ в силу уравнения теплопроводности (для тета-функций).

Аналогичным образом соответствие переносится и на случай системы взаимодействующих волчков. Действительно, рассмотрим L - A -пару

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^p E_{ii}^0(p_i + S_{ii}^0 E_1(z)) + \sum_{a \in \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_l} \sum_{i \neq j}^p E_{ij}^a \varphi_a(z, q_{ij} + \omega_a), \\ M &= \sum_{a \in \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_l} \sum_{i \neq j}^p E_{ij}^a f_a(z, q_{ij} + \omega_a) \end{aligned} \quad (3.43)$$

в базисе E_{ij}^a (3.36), где

$$\varphi_a(z, q_{ij} + \omega_a) = e^{2\pi i z \partial_\tau \omega_a / l} \phi(z, q_{ij} + \omega_a), \quad \omega_a = \frac{a_1 + a_2 \tau}{l}. \quad (3.44)$$

При условиях

$$S_{ii}^0 = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.45)$$

выполняются уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \sum_{k \neq i} \sum_{c \in \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_l} S_{ik}^c S_{ki}^{-c} E_2'(q_{ik} + \omega_c), \\ \dot{S}_{ij}^a &= \sum_{k \neq i, j} \sum_{b \in \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_l} \kappa_{b,a} S_{ik}^b S_{kj}^{a-b} (E_2(q_{ik} + \omega_b) - E_2(q_{jk} + \omega_{a-b})), \end{aligned} \quad (3.46)$$

которые приобретают дираковские дополнительные члены после редукции по подгруппе размерности p в подгруппе Картана из $SL(N, \mathbb{C})$. В изомонодромном случае выполняются те же уравнения, но с заменой времени на $|\tau|$, так как

$$\partial_\tau \varphi_a(z, x + \omega_a) = \partial_z f_a(z, x + \omega_a), \quad \partial_\tau x = 0, \quad (3.47)$$

в силу уравнения теплопроводности.

4. КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ R -МАТРИЦЫ

4.1. Классические r -матрицы и уравнения Книжника–Замолотчикова–Бернара. Для доказательства интегрируемости по Лиувиллю необходимо предъявить нужное количество (равное количеству степеней свободы) независимых интегралов движения в инволюции относительно данной скобки Пуассона. С точки зрения уравнений Лакса эти интегралы возникают из разложения по спектральному параметру производящих функций $\text{tr } L^k(z) = \sum z^m H_{m,k}$. Сохранение этих величин, очевидно, следует из первого уравнения Лакса в (1.1). Для доказательства инволютивности обычно используется классическая r -матрица. Уже само ее наличие гарантирует выполнение равенства $\{\text{tr } L^k(z), \text{tr } L^n(w)\} = 0$. Существуют разные r -матричные структуры. Приведем наиболее известные:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z), r_{12}(z, w)] - [L_2(z), r_{21}(w, z)], \quad (4.1)$$

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z) L_2(w), r_{12}(z, w)], \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \{L_1(z), L_2(w)\} &= \frac{1}{2} [L_1(z) L_2(w), r^-(z, w)] - \frac{1}{2} L_1(z) r^+(z, w) L_2(w) + \\ &+ \frac{1}{2} L_2(w) r^+ L_1(z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В последнем уравнении, которое называется *классическим уравнением отражения*, $r^\pm = r(z \pm w)$ [42]. Эти структуры, так же как и сами представления Лакса, можно получить гамильтоновой редукцией, начиная с простой скобки Пуассона в исходной теории поля [43], [44].

Интегрируемые системы, соответствующие нетривиальным характеристическим классам, содержат “многочастичную” динамику (так как пространство модулей нетривиально). Такие системы отвечают динамическим r -матрицам. В работах [22], [23] (см. также [45]) нами была предложена общая формула для классических динамических r -матриц, отвечающих расслоениям с произвольным характеристическим

КЛАССОМ:

$$r_{ac} = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\alpha \in R} |\alpha|^2 \varphi_{\alpha}^k(z_a - z_c) \mathbf{t}_{\alpha}^{k,a} \mathbf{t}_{-\alpha}^{-k,c} + \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\alpha \in \Pi} \varphi_0^k(z_a - z_c) \mathfrak{H}_{\alpha}^{k,a} \mathfrak{h}_{\alpha}^{k,c}, \quad (4.4)$$

$$\varphi_{\beta}^m(\mathbf{u}, z) = \mathbf{e}(\langle \kappa^{\vee}, \beta \rangle z) \phi\left(\langle \mathbf{u} + \kappa^{\vee} \tau, \beta \rangle + \frac{m}{l}, z\right), \quad \phi(u, z) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+u)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{t}_{\alpha}^{k,a}$, $\mathfrak{h}_{\alpha}^{k,c}$ (или двойственные $\mathfrak{H}_{\alpha}^{k,a}$) – генераторы обобщенного базиса синус-алгебры, $\vartheta(z)$ – стандартная нечетная тета-функция, а суммы берутся по всей системе корней $\mathcal{R}$ алгебры Ли $\text{Lie}(G)$ и по простым корням Π для картановской части соответственно. Кроме того, $\kappa^{\vee} = \rho^{\vee}/h \in \mathfrak{H}$, где l – некоторый делитель порядка центра $\text{ord}(\mathcal{Z}(G))$ (аналогично обсуждавшемуся выше случаю $SL(N, \mathbb{C})$), h – число Кокстера, а

$$\rho^{\vee} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha^{\vee} \in (R^{\vee})^{+}} \alpha^{\vee}$$

– полусумма положительных кокорней. Для этих r -матриц было доказано классическое динамическое уравнение Янга–Бакстера. Полученные классические r -матрицы должны (это следует из общих соображений) удовлетворять уравнениям Книжника–Замолодчикова–Бернара (КЗБ). И действительно, в работе [46] было доказано, что

$$\begin{aligned} [\nabla_a, \nabla_b]\psi &= 0, & a, b &= 1, \dots, n, \\ [\nabla_a, \nabla_{\tau}]\psi &= 0, & a &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\nabla_a = \partial_{z_a} + l \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{h}_{\alpha}^{0,a} \partial_{u_{\hat{\alpha}}} + \sum_{c \neq a} r_{ac}, \quad (4.7)$$

$$\nabla_{\tau} = 2\pi i \partial_{\tau} + \frac{l}{2} \sum_{\alpha \in \Pi} \sum_{s=0}^{l-1} \partial_{u_{\alpha}} \partial_{u_{\lambda^s \hat{\alpha}}} + \frac{1}{2} \sum_{b,d} f^{bd}, \quad (4.8)$$

где f^{bd} определяются аналогично компонентам r -матрицы r^{ac} [46]. Тем самым описан большой класс уравнений КЗБ. В дальнейшем планируется описать общую схему действия операторов Гекке (модификаций, см. ниже) на конформные блоки ψ . Эти преобразования будут связывать различных представителей из описанного класса уравнений и соответствующие конформные блоки.

4.2. Квантовые R -матрицы. Квантование r -матричных структур (4.1)–(4.3) является основой квантового метода обратной задачи рассеяния [47]. В случае нединамических R -матриц, отвечающих системам типа волчков, определяющим соотношением является квантовое уравнение Янга–Бакстера

$$R_{12}(z-w)R_{13}(z)R_{23}(w) = R_{23}(w)R_{13}(z)R_{12}(z-w). \quad (4.9)$$

Эллиптические решения были перечислены Белапиным (и Дринфельдом в классическом случае) [48]. С помощью R -матрицы (решения (4.9)) строится квантование оператора Лакса и соответствующая квантовая алгебра:

$$R_{12}(z-w)\hat{L}_1(z)\hat{L}_2(w) = \hat{L}_2(w)\hat{L}_1(z)R_{12}(z-w). \quad (4.10)$$

В простейшем случае для GL_2 -значного оператора

$$\hat{L}(z) = \sum_{a=0}^3 \hat{S}_a \varphi_a^{\hbar}(z) \sigma_a \quad (4.11)$$

уравнение (4.10) дает алгебру Складина:

$$\begin{aligned} i[\hat{S}_\gamma, \hat{S}_0]_+ &= [\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta], & [\hat{S}_\gamma, \hat{S}_0] &= i \frac{K_\beta - K_\alpha}{K_\gamma} [\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta]_+, \\ K_\alpha &= E_1(\hbar + \omega_\alpha) - E_1(\hbar) - E_1(\omega_\alpha), & E_1(x) &= \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Динамическая R -матричная структура более сложная. Явные примеры были получены Фельдером [49]. Уравнение Янга–Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} R_{12}(z - w, \mathbf{u}) R_{13}(z, \mathbf{u} - \hbar \mathbf{h}_{(2)}) R_{23}(w, \mathbf{u}) &= \\ = R_{23}(w, \mathbf{u} - \hbar \mathbf{h}_{(1)}) R_{13}(z, \mathbf{u}) R_{12}(z - w, \mathbf{u} - \hbar \mathbf{h}_{(3)}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\mathbf{u}$ – модули, $\mathbf{h}_{(i)}$ – соответствующие элементы подалгебры Картана в i -й компоненте тензорного произведения, $\hbar$ – постоянная Планка. Опишем общую конструкцию. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. отождествим ее с двойственным пространством $\mathfrak{h}^*$ с помощью формы Киллинга. Рассмотрим конечномерный $\bar{G}$ -модуль V_j , $j = 1, 2, 3$, и пусть $V = \bigoplus_{\mu \in P} V[\mu]$ – его весовое разложение. Пусть также $z \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр и $\mathbf{u} \in \mathfrak{h}_0$. Квантовой эллиптической динамической R -матрицей $R(\mathbf{u}, z)$ является отображение $\mathfrak{h}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(V_j \otimes V_k)$, $j, k = 1, 2, 3$, $j \neq k$, зависящее от константы Планка $\hbar$. R -матрица удовлетворяет следующим условиям.

1. R -матрица квазипериодична на эллиптической кривой $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{Q}$ и Λ – фиксированные элементы G (функции переклейки), удовлетворяющие (2.20). Тогда

$$R(\mathbf{u}, z + 1) = \text{Ad}_{\mathcal{Q}} R(\mathbf{u}, z), \quad R(\mathbf{u}, z + \tau) = \text{Ad}_{\Lambda_p(\mathbf{u})} R(\mathbf{u}, z), \quad (4.14)$$

где операторы в присоединенном представлении (2.24) действуют на первый множитель $\text{End}(V_j \otimes V_k)$. Это означает, что $R(\mathbf{u}, z)$ является сечением расслоения $\text{End}(V_j \otimes V_k)$ на эллиптической кривой $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$. Расслоение обладает характеристическим классом, определяемым ζ^p (2.20). Последний является препятствием к поднятию End -расслоения (рассматриваемого как G_l -расслоение) до $\bar{G}$ -расслоения³). Динамические параметры $\mathbf{u}$ играют роль касательного вектора к пространству модулей расслоения.

2. R -матрица удовлетворяет квантовому динамическому уравнению Янга–Бакстера на $\text{Aut}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$.

3. Справедливо условие унитарности

$$R^{12}(\mathbf{u}, z_{12}) R^{21}(\mathbf{u}, z_{21}) \sim \text{Id}_{V_1 \otimes V_1}. \quad (4.15)$$

³)Здесь возникает кажущееся противоречие: V является только $\bar{G}$ -модулем, но не G_l -модулем. Однако в определении R -матрицы рассматриваются модули $\text{End } V$, а они являются и G_l -модулями, и даже G^{ad} -модулями для любого V . В частности, рассматриваемая ниже R -матрица Бакстера–Белавина отвечает нетривиальному $(PSL(N, \mathbb{C}) = \text{End } V_N)$ -расслоению, которое определено для N -мерного векторного представления V_N .

4. Выполняется условие нулевого веса

$$[X^1 + X^2, R^{12}(\mathbf{u}, z_{12})] = 0 \quad \forall X \in \tilde{\mathfrak{h}}_0. \quad (4.16)$$

5. Имеет место классический предел $\hbar \rightarrow 0$

$$R(\mathbf{u}, z) = \frac{1}{\hbar} \text{Id} \otimes \text{Id} + r(\mathbf{u}, z) + O(\hbar), \quad (4.17)$$

где матрица $r(\mathbf{u}, z)$, определенная ниже, является классической r -матрицей. В этом смысле $R(\mathbf{u}, z)$ является квантованием классической r -матрицы $r(\mathbf{u}, z)$. В частных случаях получим классическую нединамическую r -матрицу Белавина–Дринфельда [33] и эллиптическую нединамическую r -матрицу [50], [51].

В работе [52] была определена новая R -матрица, включающая оба описанных выше случая, подобно тому как система взаимодействующих волчков включала в себя оба типа степеней свободы. Рассмотрим базис (3.36) в $GL(N, \mathbb{C}) \simeq GL(p, \mathbb{C}) \times GL(l, \mathbb{C})$ с $N = lp$, $l, p \in \mathbb{Z}$:

$$E_{ij}^a = E_{ij} \otimes T_a, \quad E_{ij} \in gl(p, \mathbb{C}), \quad T_a \in gl(l, \mathbb{C}), \quad (4.18)$$

где E_{ij} – стандартный матричный базис в фундаментальном представлении $GL(p, \mathbb{C})$, а T_a – базис $GL(l, \mathbb{C})$, определенный в (A.31). Из (A.32) следует

$$E_{ij}^a E_{kl}^b = \kappa_{a,b} \delta_{kj} E_{il}^{a+b}. \quad (4.19)$$

Определим теперь следующую R -матрицу:

$$R_{12}(\mathbf{u}, z) = \sum_{i,j} \sum_{a \in \Gamma_l}^p r_{ij}^a(\mathbf{u}, z) E_{ij}^a \otimes E_{ji}^{-a} + \sum_{\mu \neq \nu}^p \rho_{\mu\nu}^0 E_{\mu\mu}^0 \otimes E_{\nu\nu}^0, \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} r_{ij}^a(\mathbf{u}, z) &\equiv r_{ij}^a(z) = \varphi_{-a}(-u_{ij} - \delta_{ij}\hbar, z), & \rho_{ij}^0 &= \phi(-lu_{ij}, l\hbar), \\ u_{ij} &= u_i - u_j, & \omega_a &= \frac{a_1 + \tau a_2}{l}, \end{aligned}$$

а функции ϕ , как и ранее в (4.5), определяются отношением тета-функций. Как показано в [52], R -матрица (4.20) удовлетворяет квантовому динамическому уравнению Янга–Бакстера. Заметим, что частный случай (4.20) $l = 1$, $p = N$ отвечает R -матрице Фельдера, а $l = N$, $p = 1$ – нединамической R -матрице Белавина–Дринфельда. Таким образом, получена более общая эллиптическая R -матрица, отвечающая характеристическому классу $\mu = \zeta^p$.

5. МОДИФИКАЦИИ РАССЛОЕНИЙ

Выше объяснялось, что тип интегрируемой системы зависит от характеристического класса расслоений, в которых задается исходная теория поля. Оказывается, системы, отличающиеся только топологическими зарядами, могут быть связаны специальным калибровочным преобразованием, вырожденным (или сингулярным)

в некоторой точке кривой. Матрицы Лакса L и до и после редукции являются полями в присоединенном представлении (это означает, что E является расслоением эндоморфизмов некоторого векторного расслоения V). Вследствие вырожденности калибровочного преобразования в сечения векторного расслоения V (в фундаментальном представлении) добавляется ноль, а это меняет топологический заряд. Такая процедура и называется *модификацией* расслоения. Эта процедура может быть описана локально и глобально. С локальной точки зрения она описывается отображением Ξ между парой голоморфных векторных расслоений V и $\tilde{V}$ ранга N над кривой Σ :

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{\Xi} \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}|_{z_0} \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

т. е. устанавливает изоморфизм всюду, кроме точки $z_0 \in \Sigma$, в которой это отображение имеет одномерное коядро. Локально расслоение тривиализуется, т. е. в некотором базисе голоморфных сечений $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ оно разлагается в прямую сумму N линейных расслоений $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_N$. Тогда модификация описывается отображением вида $\mathcal{L}_j \rightarrow \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{O}(m_j)$, или, в локальных координатах, $s_j \rightarrow (z - z_0)^{-m_j} s_j$.

Глобально модификация определяется граничными условиями на $L(z)$. Матрица Лакса определяется своими вычетами (в полюсах) и квазипериодическими условиями (3.25), причем функции переклейки ($\mathcal{Q}$ и Λ) должны удовлетворять условию совместности (коцикла):

$$\mathcal{Q}\Lambda\mathcal{Q}^{-1}\Lambda^{-1} = \mu. \quad (5.2)$$

Решение этого уравнения для произвольной простой комплексной группы G и характеристического класса $\mu \in \mathcal{Z}(G)$ получено в работах [22], [23]. Там же показано, что при некотором фиксированном выборе одного мультипликатора ($\mathcal{Q}$) другой (Λ) порождает симметрии диаграммы Дынкина расширенной системы корней алгебры Ли $\text{Lie}(G)$. Модификация действует на L калибровочным преобразованием, т. е. для уравнений Лакса

$$L'(z, \mu') = \Xi L(z, \mu) \Xi^{-1}, \quad \Xi = \Xi(z, \mu, \mu'), \quad (5.3)$$

и переводит одни граничные условия в другие. Например, для систем Калодже-ро и эллиптического волчка преобразование было явно построено в работе [6] (см. также [53]) в терминах тета-функций с характеристиками:

$$\Xi_{ij}(z) = \theta \left[\begin{array}{c} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ \frac{N}{2} \end{array} \right] (z - Nq_j, N\tau) \times \text{diag} \left((-1)^l \prod_{\substack{j < k, \\ j, k \neq l}} \vartheta(q_k - q_j, \tau)^{-1} \right). \quad (5.4)$$

Это позволяет получить и явную замену переменных $S_\alpha = S_\alpha(p_i, q_j)$. Таким образом, в частности для группы $SL(N, \mathbb{C})$, возникает N калибровочно-эквивалентных систем, соответствующих характеристическим классам $\mu = e^{2\pi i k/N}$, $k = 0, \dots, N-1$, и связанных модификациями. Эта конструкция была описана в работе [18] и названа *симплектическим соответствием Гекке*. Опишем конструкцию более детально.

5.1. Характеристические классы: локальное описание и модификация.

Существует другое описание голоморфных расслоений на Σ_g . Пусть w_0 – фиксированная точка на Σ_g , а D_{w_0} ($D_{w_0}^\times$) – проколотый диск с центром в w_0 и локальной

координатой z . Расслоение E на Σ_g можно тривиализовать над D и над $\Sigma_g \setminus w_0$. Две эти тривиализации связаны $GL(N, \mathbb{C})$ -значным преобразованием $g(z)$, голоморфным на $D_{w_0}^\times$. Выбирая другую тривиализацию над D , мы умножаем g слева на обратимую в D матрицу h . Аналогично, меняя тривиализацию над $\Sigma_g \setminus w_0$, получим умножение справа $g \rightarrow gh$, где $h \in GL(N, \mathbb{C})$ голоморфна на $\Sigma_g \setminus w_0$. Таким образом, множество классов изоморфных векторных расслоений ранга N описывается двойным факторпространством

$$GL(N, \mathbb{C})(D_{w_0}) \backslash GL(N, \mathbb{C})(D_{w_0}^\times) / GL(N, \mathbb{C})(\Sigma_g \setminus w_0), \quad (5.5)$$

где $GL(N, \mathbb{C})(U)$ обозначает группу $GL(N, \mathbb{C})$ -значных голоморфных функций на U . Пусть $\det g(z) = 1$. Если $g(ze^{2\pi i}) = g(z)$, то определено $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоение на Σ_g . Но если монодромия нетривиальна,

$$g(ze^{2\pi i}) = \omega g(z), \quad \omega^N = 1, \quad (5.6)$$

то $g(w)$ – функция переклейки $PSL(N, \mathbb{C})$ -расслоения, но не $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Это аналогично (2.6). Выберем тривиализацию E над D с помощью N линейно независимых голоморфных сечений $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$. Тогда E над D представляется суммой N линейных расслоений $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_N$. Сечения над $\Sigma_g \setminus w_0$ получаются действием функции переклейки $\vec{s}' = \vec{s}g$. Пусть $\vec{m}$ лежит в решетке корней ($\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N) \in Q$). Преобразуем ограничение сечения $\vec{s}$ на $D_{w_0}^\times$ следующим образом:

$$s_j \rightarrow z^{-m_j} s_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.7)$$

Тогда функция переклейки преобразуется диагональной матрицей:

$$g(z) \rightarrow \text{diag}(z^{-m_1}, z^{-m_2}, \dots, z^{-m_N})g(z). \quad (5.8)$$

Это подразумевает преобразование линейных расслоений над D

$$\mathcal{L}_j \rightarrow \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{O}(m_j). \quad (5.9)$$

Тем самым мы получили новое *модифицированное расслоение* $\tilde{E}$. Оно задано новыми функциями переклейки (5.8). Преобразование от E к $\tilde{E}$ (точнее, преобразование пучков сечений)

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\Xi(\vec{m})} \Gamma(\tilde{E}), \quad \Xi(\vec{m}) \sim \text{diag}(z^{-m_1}, z^{-m_2}, \dots, z^{-m_N}), \quad (5.10)$$

называется *модификацией или преобразованием Гекке* типа $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$. В теории поля оно отвечает операторам 'т Хоофта, генерирующим монополярные решения (см. раздел 6).

Если не налагать условие $\sum_{j=1}^N m_j = 0$, то модификация $\Xi(\vec{m})$ меняет топологию E . В результате действия получаем нетривиальное расслоение степени $\deg \tilde{E} = \deg E + \sum_{j=1}^N m_j$.

Предположим теперь, что $\vec{m}$ лежит в решетке весов P . Тогда модификация $\Xi(\vec{m})$ меняет характеристический класс $PGL(N, \mathbb{C})$ -расслоения E . Для доказательства перейдем в базис фундаментальных весов

$$\vec{m} = \sum_{j=1}^N m_j e_j = \sum_{k=1}^{N-1} n_k \varpi_k. \quad (5.11)$$

Величины m_j и n_k связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{N}((N-1)n_1 + (N-2)n_2 + \cdots + n_{N-1}), \\ m_2 &= \frac{1}{N}(-n_1 + (N-2)n_2 + \cdots + n_{N-1}), \\ &\dots\dots\dots, \\ m_N &= \frac{1}{N}(-n_1 - 2n_2 + \cdots - (N-1)n_{N-1}), \end{aligned} \quad n_k = m_k - m_{k+1}. \quad (5.12)$$

Перепишем модификацию в виде произведения диагональных матриц:

$$\Xi(\vec{n}) \sim \prod_{k=1}^{N-1} \text{diag}(z^{-n_k \varpi_k}). \quad (5.13)$$

Монодромия этой матрицы вокруг $z = 0$ равна

$$\exp\left(-\frac{2\pi i}{N} \sum_{k=1}^{N-1} kn_k\right) \text{Id}_N. \quad (5.14)$$

Следовательно, характеристический класс присоединенного расслоения не меняется, если

$$\sum_{k=1}^{N-1} kn_k = N \sum_{j=1}^{N-1} m_j = 0 \pmod{N}. \quad (5.15)$$

В этом случае весовой вектор $\vec{m}$ лежит в корневой решетке Q . В противном случае получим нетривиальную монодромию (5.14) – препятствие к поднятию $PGL(N, \mathbb{C})$ -расслоения до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Этот элемент можно отождествить с монодрией (2.6) и тем самым с $H^2(\Sigma, \mathbb{Z}_N)$. Как отмечалось выше, модифицированное расслоение $\tilde{E}$ можно поднять до $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Подействуем на модифицированные сечения (5.7) скалярной матрицей

$$h = z^{2\pi i/N \sum_{k=1}^{N-1} kn_k} \text{Id}_N.$$

Это $GL(N, \mathbb{C})$ -значное калибровочное преобразование. Монодромия новых функций переклейки тривиальна. Следовательно, получаем $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоение. Степень этого расслоения равна

$$p = \sum_{k=1}^{N-1} kn_k = N \sum_{j=1}^{N-1} m_j. \quad (5.16)$$

Как следует из (5.14), характеристический класс ξ и степень p связаны следующим соотношением:

$$\xi = e^{2\pi i p/N}. \quad (5.17)$$

Множество модификаций, меняющих степень на p , задается решениями (5.16) в целых числах n_k . Предположим, что E снабжено голоморфной связностью. На $D_{w_0}^\times$ она имеет вид $(\partial_z + A_z)dz$ и может рассматриваться как элемент аффинной

коалгебры Ли $\widehat{gl}^*(N, \mathbb{C})(D_{w_0}^\times)$. Калибровочное преобразование (5.8) действует на A_w коприсоединенно:

$$(A_z)_{jk} dz \rightarrow (z^{m_k - m_j} (A_z)_{jk} (1 - \delta_{jk}) - m_j z^{-1} \delta_{jk}) dz. \quad (5.18)$$

Пусть $\vec{m} \in P$. Тогда первый член в правой части хорошо определен, так как $m_k - m_j$ – целое число. Последний член является сдвигом (Б.20), порожденным действием аффинной группы $\overline{W}_a$ (Б.19) на связность. Топология E не меняется, если $\vec{m} \in Q$. Тем самым приходим к описанию характеристических классов как элементов фактор-группы $\overline{W}_a/W_a$ (Б.21).

Пусть $N = pl$ с $l \neq 1, N$ и $G_l = SL(N, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_l$ (Б.14). Рассмотрим калибровочное преобразование (5.13) с $\vec{m}(\vec{\omega}) \in \Gamma(LG)$ (Б.14). Например, выберем $\vec{\omega} = (p, 0, \dots, 0)$. Тогда монодромия (5.14) лежит в группе $\mathbb{Z}_l$. Это означает, что модифицированное расслоение $\tilde{E}$ есть G_l -расслоение, которое не поднимается до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения (см. (2.13)).

Модификацию можно сделать в произвольном числе точек w_a , $a = 1, \dots, n$. С этой целью определим классы изоморфизмов векторных расслоений через фактор

$$\prod_{a=1}^n GL(N, \mathbb{C})(D_{w_a}) \backslash \prod_{a=1}^n GL(N, \mathbb{C})(D_{w_a}^\times) / GL(N, \mathbb{C})(\Sigma_g \setminus (w_1, \dots, w_a)). \quad (5.19)$$

Получим n функций переклейки $g_a(z_a)$, где z_a – локальная координата. Пусть $\Xi(\vec{m}_a)$ обозначает модификацию E в w_a и $\Xi = \prod_{a=1}^n \Xi(\vec{m}_a)$. Порядок модификаций в произведении не важен, так как они коммутируют. Для вычисления монодромии Ξ выберем одинаковую ориентацию во всех точках w_a . Характеристический класс ξ модифицированного расслоения $\tilde{E}$ соответствует

$$\prod_{a=1}^n \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} \sum_{k=1}^{N-1} k n_k^a\right). \quad (5.20)$$

5.2. Соответствие между системой частиц Калоджеро и интегрируемыми волчками Эйлера–Арнольда. Покажем, что указанные интегрируемые модели связаны сингулярным симплектическим преобразованием:

$$L^{\text{top}}(z) = \Xi(z) L^{\text{Cal}}(z) \Xi^{-1}(z). \quad (5.21)$$

Модификации изменяют степень расслоения, а следовательно, и пространство модулей. Напомним, что матрицы Лакса задаются своими вычетами

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \text{Res } L^{\text{Cal}} &= \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \text{Res } L^{\text{top}} &= S = \sum_{m,n} E_{mn} S_{mn}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $\Lambda_{ij} = \delta(\text{mod}_N(i+1), j)$, $\mathcal{Q}_{ij} = \delta_{ij}\mathbf{e}(i/N)$, $E_{mn} = \mathbf{e}(mn/2N)\mathcal{Q}^m\Lambda^n$, и граничными условиями

$$\begin{aligned} L^{\text{Cal}}(z+1) &= L^{\text{Cal}}(z), & L^{\text{top}}(z+1) &= \mathcal{Q}L^{\text{top}}(z)\mathcal{Q}^{-1}, \\ L^{\text{Cal}}(z+\tau) &= \mathbf{e}(-u)L^{\text{Cal}}(z)\mathbf{e}(u), & L^{\text{top}}(z+\tau) &= \Lambda L^{\text{top}}(z)\Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь и далее приняты обозначения $\sum_{m,n} = \sum_{m,n=0, m^2+n^2 \neq 0}^{p-1}$. Выясним, какие граничные условия на $\Xi(z)$ следуют из (5.21):

$$\begin{aligned} L^{\text{top}}(z+1) &= \Xi(z+1)L^{\text{Cal}}(z+1)\Xi^{-1}(z+1) = \Xi(z+1)L^{\text{Cal}}(z)\Xi^{-1}(z+1), \\ L^{\text{top}}(z+1) &= \mathcal{Q}L^{\text{top}}(z)\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}\Xi(z)L^{\text{Cal}}(z)\Xi^{-1}(z)\mathcal{Q}^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда (с точностью до скалярного множителя) имеем

$$\begin{aligned} \Xi(z+1) &= \mathcal{Q}\Xi(z), \\ \Xi(z+\tau) &= \Lambda\Xi(z)\mathbf{e}(u). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Матрицу с такими свойствами удастся построить в терминах тета-функций с характеристиками. Для начала рассмотрим матрицу

$$\tilde{\Xi}_{ij}(z, u_1, \dots, u_N, \tau) = \theta \left[\begin{array}{c} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ N \\ \frac{N}{2} \end{array} \right] (z - Nu_j, N\tau). \quad (5.25)$$

Ее трансформационные свойства таковы:

$$\tilde{\Xi}(z+1, \tau) = -\mathcal{Q} \times \tilde{\Xi}(z, \tau), \quad \mathcal{Q} = \text{diag} \left(\mathbf{e} \left(\frac{i}{N} \right) \right), \quad (5.26)$$

$$\tilde{\Xi}(z+\tau, \tau) = \tilde{\Lambda}(z, \tau) \times \tilde{\Xi}(z, \tau) \times \text{diag}(\mathbf{e}(u_j)). \quad (5.27)$$

Определитель этой матрицы известен:

$$\det \theta \left[\begin{array}{c} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ N \\ \frac{N}{2} \end{array} \right] (Nx_j, N\tau) = (-1)^N \frac{\vartheta(\sum x_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \prod_{i < j} \frac{\vartheta(x_i - x_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \quad (5.28)$$

или

$$\det \theta \left[\begin{array}{c} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ N \\ \frac{N}{2} \end{array} \right] (z - Nq_j, N\tau) = (-1)^N \frac{\vartheta(z)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \prod_{i < j} \frac{\vartheta(q_i - q_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)}, \quad (5.29)$$

если $\sum q_j = 0$. Итак, $\tilde{\Xi}(z)$ невырождена везде, кроме точки $z = 0$. Это означает, что сопряжение такой матрицей может привести к появлению полюса второго порядка. Чтобы избежать этого явления, достаточно потребовать, чтобы собственный вектор вычета преобразуемой матрицы лежал в ядре $\Xi(0)$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $L(z)$ – матричнозначная функция с полюсами первого порядка в $z = 0$, $a e^+$, e^- – собственные векторы ее вычета $L_{-1} = (2\pi\sqrt{-1})^{-1} \text{Res } L(z)$:

$$L_{-1}e^+ = \lambda_+ e^+, \quad e^- L_{-1} = \lambda_- e^-.$$

Рассмотрим калибровочные преобразования

$$L(z) \rightarrow \Xi^\pm(z)L(z)(\Xi^\pm(z))^{-1},$$

и пусть

$$\det \Xi^\pm(z) \sim z^\pm \quad \text{в окрестности нуля,}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Xi^+(z)e^+ = \lim_{z \rightarrow 0} e^-(\Xi^-(z))^{-1} = 0.$$

Тогда $\Xi^\pm$ не изменяют сингулярностей $L(z)$ при калибровочных преобразованиях.

Теперь наша задача – модифицировать матрицу $\tilde{\Xi}(z, u, \tau) \rightarrow \Xi(z, u, \tau)$ таким образом, чтобы собственный вектор L_{-1}^{Cal} лежал в ядре $\Xi(0)$. В качестве последнего выберем $(1, \dots, 1)$. Решение указанной задачи содержит следующая лемма⁴⁾.

ЛЕММА 5.2. Вектор-столбец

$$\left\{ (-1)^l \prod_{\substack{j < k, \\ j, k \neq l}} \vartheta(u_k - u_j, \tau) \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

лежит в ядре $\tilde{\Xi}(0)$.

Итак, окончательный ответ для искомого преобразования имеет вид

$$\Xi(z) = \tilde{\Xi}(z) \times \text{diag} \left((-1)^l \left(\prod_{\substack{j < k, \\ j, k \neq l}} \vartheta(u_k - u_j, \tau) \right)^{-1} \right). \quad (5.30)$$

Приведем простейший пример. В $sl(2, \mathbb{C})$ -случае нетрудно получить явную замену переменных

$$\{v, u\} = 1, \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = 2\sqrt{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma, \quad (5.31)$$

$$L^{1|0|2} = \begin{pmatrix} v & \nu\phi(2u, z) \\ \nu\phi(-2u, z) & -v \end{pmatrix},$$

$$L^{1|1|2} = \begin{pmatrix} S_3\varphi_3(z) & S_1\varphi_1(z) - iS_2\varphi_2(z) \\ S_1\varphi_1(z) + iS_2\varphi_2(z) & -S_3\varphi_3(z) \end{pmatrix}.$$

Соответствие индексов $(1, 2, 3) = (01, 11, 01)$ согласовано с нумерацией матриц Паули. Утверждение об эквивалентности двух систем означает, что существует калибровочное преобразование $\Xi(z)$ такое, что

$$L^{1|1|2}(z) = \Xi(z)L^{1|0|2}(z)\Xi^{-1}(z). \quad (5.32)$$

Как показано в работе [6], в $sl(2, \mathbb{C})$ -случае преобразование имеет вид

$$\Xi(z) = \begin{pmatrix} \theta_3(z - 2u, 2\tau) & -\theta_3(z + 2u, 2\tau) \\ -\theta_2(z - 2u, 2\tau) & \theta_2(z + 2u, 2\tau) \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

⁴⁾ Доказательство лемм 5.1, 5.2 приводится в работах [6], [53].

Тогда из (5.32) следует

$$\begin{aligned} S_{01} &= -v \frac{\theta_{01}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{01}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{01}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{10}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ -\sqrt{-1}S_{11} &= -v \frac{\theta_{00}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{00}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{00}^2(0)}{\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{10}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ S_{10} &= -v \frac{\theta_{10}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{10}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{10}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.3. Группа петель и $(1+1)$ -полевые обобщения. Как показано в [6] (см. также [53]), общая конструкция систем Хитчина естественным образом переносится на случай, когда структурная группа расслоения является группой петель с центральным расширением $\bar{L}(GL(N, \mathbb{C}))$. В этом случае первое уравнение Лакса в (1.1) переходит в уравнение нулевой кривизны (или уравнение Захарова–Шабата) (второе уравнение в (1.1)). Уравнение момента имеет вид

$$\bar{\partial}L - k\partial_x \bar{L} + [\bar{L}, L] = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \delta(z_\alpha). \quad (5.35)$$

Его решение дает матрицу Лакса для $(1+1)$ -теории поля:

$$L_{ij}^{1+1}(z) = \delta_{ij} \left(\frac{v_i}{2} + \sum_{\alpha} p_{ii}^{\alpha} E_1(z - w_{\alpha}) \right) + (1 - \delta_{ij}) \sum_{\alpha} p_{ij}^{\alpha} \phi(u_{ij}, z - w_{\alpha}). \quad (5.36)$$

Уравнение момента на диагонали дает дополнительную связь

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\alpha} p_{ii}^{\alpha} = \partial_x u_i. \quad (5.37)$$

Теперь законов сохранения бесконечно много. Поэтому говорят не только об одном уравнении, но и обо всей иерархии уравнений. Конструкция, описанная в работах [6], [34], позволяет строить указанные $(1+1)$ -обобщения систем Хитчина по исходным механическим $(0+1)$ -системам. Таким образом, был воспроизведен результат Кричевера [54] для полевого обобщения модели Калоджеро, а также показано, что в sl_2 -случае данная система, описываемая гамильтонианом

$$H = \oint dx \left(\frac{p^2}{2} \left(1 - \frac{q_x^2}{h} \right) - (3q_x^2 - h) \wp(2q) + \frac{q_{xx}^2}{4(h - q_x^2)} \right), \quad h = \text{const},$$

калибровочно-эквивалентна модели магнетика Ландау–Лифшица – непрерывного предела XYZ -спиновой цепочки:

$$\begin{aligned} \partial_t S &= [S, S_{xx}] + [S, \hat{\wp}(S)], \\ S &= \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha} \sigma_{\alpha} \in \widehat{sl}(2, \mathbb{C}), \quad \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha}^2 = \nu^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

С точки зрения модификации расслоений указанная связь почти очевидна: преобразование (5.3) на уровне механических систем переходит в “удлиненное” преобразование:

$$L(z) \rightarrow \Xi(z)L(z)\Xi^{-1}(z) + k\partial_x \Xi(z)\Xi^{-1}(z),$$

на уровне теорий поля, и соответствие между системой Калоджеро и интегрируемой волчками Эйлера–Арнольда переходит в соответствие на уровне $(1 + 1)$ -теорий поля.

Как показано в [34], для $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоений на эллиптической кривой с характеристическим классом $\zeta = \mathbf{e}(1/N)$ уравнения движения можно записать в явном виде. Первые потоки описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \partial_{t_a} S^a - k \partial_x S^a &= - \sum_{c \neq a} [S^a, \hat{\varphi}_{ac}(S^c)], \\ \partial_{t_a} S^b &= [S^b, \hat{\varphi}_{ba}(S^a)]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

В двухточечном случае рациональный предел является уравнениями главного кривого поля:

$$\begin{aligned} \partial_t l_1 - k \partial_x l_0 + \frac{2}{z_1 - z_2} [l_1, l_0] &= 0, \\ \partial_t l_0 - k \partial_x l_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

с $l_0 = S^1 + S^2$ и $l_1 = S^1 - S^2$. Уравнения вторых потоков имеют вид (здесь мы приводим $sl(2, \mathbb{C})$ -случай, а $sl(N, \mathbb{C})$ -случай обсуждается ниже)

$$\begin{aligned} \partial_{t_a} S^a - k \partial_x \eta^a &= [S^a, \hat{\varphi}(S^a)] + \sum_{c \neq a} [\eta^a, \hat{\varphi}_{ca}(S^c)] - [\hat{F}_{ca}(S^c), S^a], \\ \partial_{t_a} S^b &= [\hat{\varphi}_{ab}(\eta^a), S^b] + [S^b, \hat{F}_{ba}(S^a)], \end{aligned} \quad (5.41)$$

где

$$\eta^a = -\frac{k}{4\lambda_a^2} [S^a, S_x] + \sum_{c \neq a} \hat{\varphi}_{ac}(S^c).$$

Заметим, что в одновершинном случае $n = 1$ первое уравнение в (5.41) – это уравнение Ландау–Лифшица (с $t_1 = t$).

5.4. Уравнения отражения, гиристата и Пенлеве VI. Уравнения изомономных деформаций (третье уравнение в (1.1)) в эллиптическом случае были исследованы в [7], а в [55] была предложена пара Лакса для уравнения Пенлеве VI в эллиптической форме (1.2). Модификация приводит уравнение (1.2) к виду

$$\partial_\tau \vec{S} = \vec{S} \times J(\vec{S}) + \vec{S} \times \vec{\nu}, \quad (5.42)$$

который описывает неавтономный⁵⁾ гиристат Жуковского–Вольтерра. Явная замена переменных приведена в работах [56]. В уравнении Пенлеве VI присутствуют четыре константы. В форме гиристата три из них (точнее, три линейных комбинации) объединяются в вектор внешнего гиристатического момента $\vec{\nu}$, а четвертая является длиной вектора $\vec{S}$.

Пуассонова структура (4.2) позволяет строить еще один широкий класс интегрируемых систем – спинные цепочки. Несложно проверить, что если $L_k(z)$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяют уравнению (4.2), то тому же уравнению удовлетворяет и их

⁵⁾Неавтономность выражается в том, что компоненты тензора инерции $J_\alpha = \wp(\omega_\alpha, \tau)$ явно зависят от τ , играющего роль времени.

произведение $T(z) = L_1(z) \dots L_n(z)$, называемое трансфер-матрицей. Для конечных цепочек на отрезке [42] на границы можно поместить также узлы, L -матрицы которых удовлетворяют уравнению отражения (4.3). Если уравнение (4.2) при квантовании переходит в (4.10), то (4.3) переходит в квантовое уравнение отражения

$$R_{12}(z-w)\hat{L}_1(z)R_{12}(z+w)\hat{L}_2(w) = \hat{L}_2(w)R_{12}(z+w)\hat{L}_1(z)R_{12}(z-w). \quad (5.43)$$

Оказывается [56], именно этому уравнению удовлетворяет квантовая версия L -матрицы для гиростата (5.42), а алгебра Складина (4.12) обобщается до

$$\begin{aligned} [\nu_\alpha, \nu_\beta] &= 0, & [\hat{S}_0, \nu_\alpha] &= 0, & i[\hat{S}_\gamma, \hat{S}_0]_+ &= [\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta], \\ [\hat{S}_\gamma, \hat{S}_0] &= i \frac{K_\beta - K_\alpha}{K_\gamma} [\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta]_+ + 2i \frac{1}{K_\gamma} (\nu_\alpha \rho_\alpha \hat{S}_\beta - \nu_\beta \rho_\beta \hat{S}_\alpha), \end{aligned} \quad (5.44)$$

где $\rho_\alpha = \mathbf{e}(\omega_\alpha \partial_\tau \omega_\alpha) \phi(\omega_\alpha + \hbar, -\omega_\alpha)$. Тригонометрические и рациональные вырождения могут быть получены методами, описанными в [40], [57].

6. МОДИФИКАЦИИ РАССЛОЕНИЙ И МОНОПОЛЬ ДИРАКА

У модификации существует примечательная монополярная интерпретация, предложенная в работе [58] в связи с исследованием в рамках геометрической программы Ленглендса четырехмерной теории Янга–Миллса, компактифицированной на риманову поверхность. В работе [59] была рассмотрена трехмерная теория поля на $\Sigma_\tau \times \mathbb{R}$ (т. е. к рассмотренной ранее конструкции добавляется еще одно вещественное измерение), заданная уравнениями $F = \star D\phi$, где F – кривизна трехмерной связности, а ϕ – поле в присоединенном представлении. Это приводит к уравнению Лапласа

$$\star D \star D\phi = M\delta(\vec{x} - \vec{x}^0).$$

Как известно, решением этих уравнений (с особенностью $1/|\vec{x} - \vec{x}^0|$) является монополяр Дирака. Граничными условиями для компоненты связности A_z (при выборе калибровки $A_z = 0$) на $\pm\infty$ по вещественной прямой являются операторы Лакса интегрируемых систем с различными характеристическими классами. Таким образом, вставка монополя в трехмерной теории соответствует модификации в системах Хитчина. Явное вычисление решения оказывается сложной задачей. В работе [59] был изучен скалярный случай и получено решение уравнений Богомольного в виде ряда, которое обобщает обычные эллиптические ряды Кронекера–Эйзенштейна и удовлетворяет обобщению функционального уравнения Римана. Целью настоящего раздела являются исследование решений уравнений Богомольного в случае эллиптической кривой ($g = 1$) и объяснение роли модификации соответствующих расслоений.

6.1. Уравнения Богомольного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть $W = \mathbb{R} \times \Sigma_g$. Рассмотрим расслоение V на W с кривизной F . Пусть также ϕ – 0-форма на W , принимающая значения в сечениях присоединенного расслоения $\phi \in \Omega^0(W, \text{End } V)$. Это поле называется полем Хиггса. Уравнения Богомольного на W имеют вид

$$F = \star D\phi, \quad (6.1)$$

где $\star$ – оператор Ходжа на W относительно некоторой метрики ds^2 (на W).

В локальных координатах $(z, \bar{z})$ на Σ_g и y на вещественной прямой метрика имеет вид $ds^2 = g|dz|^2 + dy^2$, где $g(z, \bar{z})|dz|^2$ – метрика на Σ_g . Тогда оператор Ходжа

$$\star dy = \frac{1}{2}ig dz \wedge d\bar{z}, \quad \star dz = -i dz \wedge dy, \quad \star d\bar{z} = i d\bar{z} \wedge dy, \quad (6.2)$$

а уравнения (6.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z + [A_z, A_{\bar{z}}] &= \frac{ig(z, \bar{z})}{2}(\partial_y \phi + [A_y, \phi]), \\ \partial_y A_z - \partial_z A_y + [A_y, A_z] &= i(\partial_z \phi + [A_z, \phi]), \\ \partial_y A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_y + [A_y, A_{\bar{z}}] &= -i(\partial_{\bar{z}} \phi + [A_{\bar{z}}, \phi]). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Монопольное решение определяется следующим образом. Пусть $\widetilde{W} = (W \setminus \vec{x}^0 = (y = 0, z = z_0))$. Тождество Бьянки $DF = 0$ на $\widetilde{W}$ приводит к тому, что ϕ является функцией Грина оператора $\star D \star D$:

$$\star D \star D \phi = M \delta(\vec{x} - \vec{x}^0), \quad (6.4)$$

$$M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N) \in gl(N, \mathbb{C}), \quad \vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N) \in P, \quad (6.5)$$

а $(m_1, m_2, \dots, m_N)$ – монопольные заряды. Это уравнение подразумевает, что ϕ сингулярно в $\vec{x}^0$.

6.1.1. Граничные условия и калибровочные симметрии. В дальнейшем будем считать, что $\partial_y \phi = 0$ при $y \rightarrow \pm\infty$. Это граничные условия Неймана. При этом граничные условия на калибровочные поля не налагаются. Пусть $V_{\pm}$ – ограничение V на расслоение над Σ_g на “левом” и “правом” концах W : $y \rightarrow \pm\infty$. Эти расслоения плоские. Это следует из первого уравнения в (6.10), с $A_y = 0$. Заметим, что эти граничные условия отличаются от выбранных в [58]. Уравнения Богомольного задают преобразование $V_- \rightarrow V_+$. Ниже будет показано, что характеристические классы расслоений меняются, и это изменение определяется $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$. Система (6.3) инвариантна относительно действия калибровочной группы $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} A_z &\rightarrow h A_z h^{-1} + \partial_z h h^{-1}, & A_{\bar{z}} &\rightarrow h A_{\bar{z}} h^{-1} + \partial_{\bar{z}} h h^{-1}, \\ A_y &\rightarrow h A_y h^{-1} + \partial_y h h^{-1}, & \phi &\rightarrow h \phi h^{-1}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $h \in \mathcal{G}$ – гладкое отображение $W \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$. Для сохранения правой части (6.4) оно должно удовлетворять условию $[h(\vec{x}^0), M] = 0$. Положим для простоты, что V – присоединенное расслоение. Так как калибровочные поля на $y = \pm\infty$ не определены (но плоские), то на них действует ограничение калибровочной группы $\mathcal{G}|_{y=\pm\infty} = \mathcal{G}_{\pm}$. Тогда $\mathcal{M}_{\pm} = \{V_{\pm}\}/\mathcal{G}_{\pm}$ – пространство модулей плоских связностей. Это пространство, как известно [60]–[62], связано с расслоениями Хиггса. Тем самым, в расслоениях на границе возникают интегрируемые системы. При этом характеристические классы расслоений разные и связаны зарядом монополя. Отметим также, что (6.3) является условием совместности линейной задачи

$$\begin{aligned} \left(\partial_z + A_z + \frac{1}{2}\lambda^{-1}g(\partial_y + A_y + i\phi) \right) \psi &= 0, \\ \left(\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}} + \frac{1}{2}\lambda g(\partial_y + A_y - i\phi) \right) \psi &= 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $\lambda \in \mathbb{CP}^1$ – спектральный параметр. Тогда можно предположить, что монопольное решение (6.3) отвечает солитонному решению данной системы. Этот подход, однако, рассматриваться в данной работе не будет⁶⁾.

6.1.2. Фиксация калибровки. Выберем калибровку в виде условия $A_{\bar{z}} = 0$. Это условие не покрывает всю калибровочную свободу. Голоморфные преобразования вида $h = h(y, z)$ это условие сохраняют. Имеем

$$\begin{aligned} -\partial_{\bar{z}}A_z &= \frac{ig}{2}(\partial_y\phi + [A_y, \phi]), \\ \partial_yA_z - \partial_zA_y + [A_z, A_y] &= i(\partial_z\phi + [A_z, \phi]), \\ \partial_{\bar{z}}A_y &= i\partial_{\bar{z}}\phi. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Последнее уравнение означает, что функция $A_y - i\phi$ голоморфна. Из (6.6) следует, что остаточные калибровочные преобразования действуют на эту функцию как

$$A_y - i\phi \rightarrow h(A_y - i\phi)h^{-1} + \partial_y h h^{-1}. \tag{6.9}$$

Отсюда видно, что можно выбрать $A_y = i\phi$. При этом не используется только голоморфная, не зависящая от y часть калибровочной группы ($\partial_y h = 0$). В итоге получаем систему

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}A_z &= -\frac{ig}{2}\partial_y\phi, \\ \partial_yA_z - 2i\partial_z\phi + 2i[A_z, \phi] &= 0, \\ A_y &= i\phi, \\ A_{\bar{z}} &= 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Первые два уравнения в (6.10) приводят к уравнению Лапласа

$$\partial_y^2\phi + \frac{4}{g}(\partial_z\partial_{\bar{z}}\phi + \partial_{\bar{z}}[A_z, \phi]) = 0. \tag{6.11}$$

В скалярном случае (6.11) упрощается до

$$\partial_y^2\phi + \frac{4}{g}\partial_z\partial_{\bar{z}}\phi = 0. \tag{6.12}$$

6.2. Рациональное решение в скалярном случае. В этом подразделе Σ_g заменяется на $\mathbb{C}$. Координаты $z, \bar{z}$ на $\mathbb{C}$ выполняют роль локальных координат на Σ_g . Рассмотрим уравнение (6.12) на $\tilde{W} = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \setminus (0, 0, 0)$. В этом частном случае граничные условия можно выбрать в виде

$$\phi|_{y=\pm\infty} = 0, \tag{6.13}$$

$$A_z|_{y=\pm\infty} = 0. \tag{6.14}$$

Решение уравнения (6.12) с $g = 1$, удовлетворяющее условию (6.13), имеет вид

$$\phi = c \frac{1}{\sqrt{y^2 + z\bar{z}}}, \tag{6.15}$$

⁶⁾Случай $SU(2)$ и $W = \mathbb{R}^3$ исследовался в работе [63] для других граничных условий.

где c – константа. То есть мы имеем дело с уравнением Лапласа на $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \setminus (0, 0, 0)$. Из (6.14) и первого уравнения системы (6.10) следует, что

$$\begin{aligned} A_z(z, \bar{z}, y) &= A_z^+(z, \bar{z}, y), \quad y > 0; & y = 0, \quad z \neq 0, \\ A_z(z, \bar{z}, y) &= A_z^-(z, \bar{z}, y), \quad y < 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где

$$\begin{aligned} A_z^+(z, \bar{z}, y) &= -ic \left(\frac{1}{z} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z\bar{z}}} - \frac{1}{z} \right) + \text{const}, \\ A_z^-(z, \bar{z}, y) &= -ic \left(\frac{1}{z} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z\bar{z}}} + \frac{1}{z} \right) + \text{const}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

а $A_z(z, \bar{z}, y)$ – связность в линейном расслоении $\mathcal{L}$ на $\widetilde{W}$. Эта связность испытывает скачок $-2ic/z$ в $y = 0$. Для того чтобы сделать ее гладкой, скачок можно компенсировать голоморфным калибровочным преобразованием, которое локально в окрестности $\vec{x}_0$ и имеет вид $h \sim z^m$. Здесь m должно быть целым, так как h – гладкая функция. Заметим, что все голоморфные линейные расслоения на S^2 являются $\mathcal{O}(m)$ -расслоениями, $m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, получаем $c = im/2$, $m \in \mathbb{Z}$. Это наблюдение является квантованием заряда монополя. Константа c содержит множитель 4π (площадь единичной сферы), который дает правильную нормализацию дельта-функции и проявляется в законе Гаусса. Калибровочное преобразование $h \sim z^m$ описывает модификацию (5.7), (5.8) для линейных расслоений на $\mathbb{CP}^1$.

Вернемся к общей ситуации $W = \mathbb{R} \times \Sigma_g$. Пусть $z, \bar{z}$ – локальные координаты на Σ_g . В окрестности $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$ связности, отвечающие решению (6.12), имеют вид (6.16). Пусть S^2 – маленькая сфера, окружающая точку $\vec{x}_0$ в W , $\Sigma_{g,\pm}$ – левая и правая границы W , а $\mathcal{L}_{\pm}$ – соответствующие ограничения $\mathcal{L}$. Тогда (это детально объясняется в работе [58])

$$\int_{\Sigma_{g,+}} F = \int_{\Sigma_{g,-}} F + m,$$

где F – кривизна связности A , а m берется из интеграла от кривизны по всему объему (что равно интегралу от дельта-функции). Иными словами, монопольное решение с зарядом m изменяет степень расслоения на m ($\deg \mathcal{L}_+ = \deg \mathcal{L}_- + m$).

6.3. Эллиптическое решение и функциональное уравнение. Уравнение Лапласа (6.12) на Σ_τ имеет вид

$$\partial_y^2 \phi + 4(\Im m(\tau))^2 \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi = 0, \quad (6.18)$$

или

$$\partial_y^2 \phi + (2\pi\alpha)^2 \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi = 0, \quad \alpha^{-1} = \frac{2\pi i}{\tau - \bar{\tau}},$$

где $\Im m(\tau)$ – площадь фундаментального параллелограмма. Предложим два представления для функции Грина ϕ и докажем их эквивалентность, используя технику, аналогичную той, которую Кронекер использовал для доказательства функционального уравнения [64]. Наивное эллиптическое решение уравнения (6.18) на $\widetilde{W}$

получается усреднением (6.15) по решетке $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}^7$:

$$\phi(z, y) = c \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{\sqrt{(\pi\alpha y)^2 + |z + \gamma|^2}}. \quad (6.19)$$

Однако этот ряд расходится. Поэтому рассмотрим более общий ряд

$$\mathcal{R}(s, x, z, y) = c \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\chi(\gamma, x)}{((\pi\alpha y)^2 + |z + \gamma|^2)^s}, \quad \mathcal{R}\left(\frac{1}{2}, 0, z, y\right) = \phi(z, y), \quad (6.20)$$

где $\chi(\gamma, x) = e^{\alpha^{-1}(\gamma\bar{x} - \bar{\gamma}x)}$ – характер $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ аддитивной группы Γ , а s, x – комплексные параметры. Характеры являются двоякопериодическими:

$$\chi(\gamma, x + 1) = \chi(\gamma, x), \quad \chi(\gamma, x + \tau) = \chi(\gamma, x), \quad \gamma \in \Gamma,$$

а ряды $\mathcal{R}(s, x, z, y)$ – квазипериодическими:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(s, x, z + 1, y) &= e^{\alpha^{-1}(x - \bar{x})} \mathcal{R}(s, x, z, y), \\ \mathcal{R}(s, x, z + \tau, y) &= e^{\alpha^{-1}(x\bar{\tau} - \bar{x}\tau)} \mathcal{R}(s, x, z, y). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Переменная x определяет поведение $\mathcal{R}(s, x, z, y)$ на решетке Γ . Иными словами, x параметризует пространство модулей линейных расслоений на Σ_τ . Заметим, что ряд в правой части (6.20) является сходящимся для $\operatorname{Re} s > 1$. Функция

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{2}, x, z, y\right) = c \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\chi(\gamma, x)}{((\pi\alpha y)^2 + |z + \gamma|^2)^{1/2}} = \phi(x, z, y) \quad (6.22)$$

является формальным решением уравнения (6.18) с квазипериодическими условиями (6.21).

Другое представление для функции Грина получится применением преобразования Фурье. Определим дельта-функции

$$\delta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{2\pi i p y}, \quad \delta^{(2)}(z, \bar{z}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma, z).$$

Тогда

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma + x, z) = \chi(x, z) \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma, z) = \chi(x, z) \delta^2(z, \bar{z}) = \delta^2(z, \bar{z}).$$

Пусть $\tilde{\phi}$ – функция Грина с квазипериодическими условиями (6.21),

$$\partial_y^2 \tilde{\phi} + (2\pi\alpha)^2 \partial_z \partial_{\bar{z}} \tilde{\phi} = c \delta(y) \delta^{(2)}(z, \bar{z}).$$

Разлагая ее по фурье-гармоникам, находим

$$\tilde{\phi} = -\frac{c}{4\pi^2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{e^{2\pi i p y}}{p^2 + |\gamma + z|^2} \chi(\gamma + x, z).$$

⁷⁾Здесь и ниже для краткости будем опускать наличие зависимости от $\bar{z}$.

Интегрирование по p дает множитель π и следующее выражение:

$$\tilde{\phi}(x, z, y) = -\frac{c}{4\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{|\gamma + x|} e^{-2\pi|\gamma+x||y|} \chi(\gamma + x, z). \quad (6.23)$$

Важно отметить, что решение (6.23) хорошо определено. Наша цель – найти связь между (6.23) и (6.22). Рассмотрим обобщение (6.23)

$$I(s, x, z, y) = 2c\pi^s y^{s-1/2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{K_{s-1/2}(2\pi|y||\gamma + x|)}{|\gamma + x|^{s-1/2}} \chi(\gamma + x, z), \quad (6.24)$$

где K_ν – функция Бесселя–Макдональда

$$K_\nu(2\pi yz) = \frac{\Gamma(\nu + 1/2)(z)^\nu}{2(\pi y)^\nu \Gamma(1/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{e^{2\pi i p y}}{(p^2 + z^2)^{\nu+1/2}}.$$

Функция $I(s, x, z, y)$ является функцией Грина для псевдодифференциального оператора $(\partial_y^2 + 4\alpha^2 \pi^2 \partial_z \partial_{\bar{z}})^s$ на $\mathbb{R} \times \Sigma_\tau$ с граничными условиями (6.21). Так как $K_{1/2}(x) = \sqrt{\pi/2x} e^{-x}$, то для $s = 1$ функция I совпадает с $\tilde{\phi}$ (6.23) с точностью до константы. Установим связь между (6.20) и (6.24), тогда получим и связь между (6.19) и (6.23). Докажем, что

$$I(s, x, z, y) = c \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} t^s e^{-t(p^2 + |\gamma+x|^2) + 2\pi i p y} \chi(\gamma + x, z). \quad (6.25)$$

Используя интегральное представление для гамма-функции

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} t^s e^{-t}$$

и вычисляя интеграл по t в (6.25), получим (6.24). Представление (6.25) универсально и поможет определить функцию $\mathcal{R}$ (6.20).

ЛЕММА 6.1. *Функция $\mathcal{R}(s, x, z, y)$ имеет представление в виде интеграла Фурье*

$$\mathcal{R}(s, x, z, y) = \frac{1}{\Gamma(s)\chi(\gamma, z)} \int_{-\infty}^{\infty} dk I\left(s, z, x, \frac{k}{\pi\alpha}\right) e^{-2\pi i k y}. \quad (6.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в (6.26) $I(s, x, z, y)$ (6.25) и вычислим первый интеграл по k . Тогда получим условие $p = \pi\alpha y$. Далее, используя интегральное представление для гамма-функции, получим (6.20).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Ряд (6.24) является трехмерным обобщением ряда Кронекера (см. [64])

$$K(x, x_0, s) = \sum_{\gamma} \chi(\gamma, x_0) |x + \gamma|^{-2s}.$$

Используя формулу суммирования Пуассона, Кронекер доказал, что

$$\Gamma(s)K(x, x_0, s) = \alpha^{1-2s}\Gamma(1-s)K(x_0, x, 1-s)\chi(x, x_0).$$

Наша цель – обобщить это функциональное уравнение на трехмерный случай $\Sigma_\tau \times \mathbb{R}$.

ЛЕММА 6.2. *Функция $I(s, x, z, y)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:*

$$I(s, x, z, y) = \chi(x, z)\pi^{-1/2}\alpha^{-2s+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk I\left(\frac{3}{2} - s, z, x, \frac{k}{\pi\alpha}\right) e^{-2\pi iky}. \quad (6.27)$$

Доказательство леммы 6.2 приведено в работе [34].

Из доказанных лемм следует основной результат:

$$\mathcal{R}\left(\frac{3}{2} - s, x, z, y\right) = \frac{\sqrt{\pi}\alpha^{2s-1}}{\Gamma(3/2 - s)} I(s, x, z, y).$$

Положим теперь $s = 1$. Как видно, хорошо определенный ряд

$$\pi \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma + x, z) \frac{e^{-2\pi|y||\gamma+x|}}{|\gamma + x|} \quad (6.28)$$

описывает аналитическое продолжение расходящегося ряда

$$\pi \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma, x) \frac{1}{\sqrt{(\pi\alpha y)^2 + |\gamma + z|^2}}.$$

Используем функцию (6.23) в качестве функции Грина. Тогда

$$A_z(z, \bar{z}, y, x) = -\frac{ic}{4\pi} \frac{1}{\pi^2 \alpha^2} \operatorname{sgn}(y) \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{\gamma + x} e^{-2\pi|\gamma+x||y|} \chi(\gamma + x, z), \quad (6.29)$$

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ -1 & y < 0. \end{cases}$$

Заметим, что скачок A (при прохождении через $y = 0, z = 0$) появляется из скачка $\operatorname{sgn}(y)$. Для сравнения эллиптического и рационального случаев положим $x = 0$. Тогда на прямой $y = 0$ связность пропорциональна

$$A_z \sim \sum_{\gamma \neq 0} \frac{1}{\gamma} \chi(\gamma, z) = E_1(z) - \alpha^{-1}(z - \bar{z}),$$

где $E_1(z) = \partial \ln \vartheta(z)$ – функция Эйзенштейна, а $\vartheta(z)$ – тета-функция (2.30). Функция $E_1(z)$ имеет простой полюс в точке $z = 0$ с вычетом $\operatorname{Res}_{z=0} E_1(z) = 1$, а связность A_z двоякопериодична. В терминах (6.6) калибровочное преобразование h , компенсирующее скачок, дается целой степенью тета-функции $\vartheta^m(z)$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\partial \ln h = \partial \ln \vartheta^m(z) = m E_1(z).$$

6.4. Случай произвольного ранга. Рассмотрим случай произвольного ранга s ($PSL(N, \mathbb{C}) = G_{\text{ad}}$)-расслоениями. Следуя аргументам [58], выберем M из (6.5). Вблизи сингулярной точки $\vec{x}^0$ расслоение V разлагается в сумму линейных. Пользуясь решением (6.15) для линейного расслоения, положим, что поле Хиггса ведет себя локально как

$$\phi = \frac{i}{2\sqrt{y^2 + z\bar{z}}} \text{diag}(m_1, \dots, m_N).$$

Из (6.16) следует, что A_z испытывает в точке $y = 0$ скачок

$$A_z^+ - A_z^- = \frac{i}{z} \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N). \quad (6.30)$$

Для того чтобы избавиться от скачка A в $z = 0$, как и в абелевом случае, выполним сингулярное калибровочное преобразование Ξ , имеющее вблизи $z = 0$ вид (5.13),

$$\Xi = \text{diag}(z^{-m_1}, z^{-m_2}, \dots, z^{-m_N}).$$

Положим, что $\vec{m}$ принадлежит решетке весов, $\vec{m} \in P$. Это означает, что функция Ξ обратна кохарактеру γ^{ad} из $PSL(N, \mathbb{C})$ ($\gamma^{\text{ad}} \in t(G^{\text{ad}}) = P^\vee \sim P$ (Б.9)). Как объяснялось выше, модифицированное расслоение V_+ не поднимается до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. С другой стороны, если $\vec{m} = (m_1, \dots, m_N)$ лежит в решетке корней Q (Б.9), то $\Xi^{-1} = \bar{\gamma}$, и препятствий к поднятию V_+ до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения нет. Заметим, что соотношение (6.30) описывает действие аффинной группы $\bar{W}_a$ (Б.19) в первом случае и действие аффинной группы W_a (Б.18) – в последнем. С теоретико-полевой точки зрения это соответствует действию оператора 'т Хоофта на A_z (см. (5.18)).

Если $N = pl$, $l \neq 1, N$, можно, как и ранее, рассмотреть промежуточный случай γ_{G_l} (Б.13). Тогда $\vec{m} \in t({}^L G_l) \sim \Gamma(G_p)$, где ${}^L G_l$ – лэнглендс-двойственность. Такое вложение дает модификацию, позволяющую поднять $PGL(N, \mathbb{C})$ -расслоение до $(G_l = SL(N, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_l)$ -расслоения, но не до $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Таким образом, получаем связь монопольных зарядов с характеристическими классами расслоений.

В общем случае (недиагональная) модификация Ξ для $PGL(N, \mathbb{C})$ -расслоений на Σ_τ , как и ранее, сокращает скачок связности A_z в точке $y = 0$, который является решением уравнений Богомольного, и устанавливает соотношения для значений связности на границах:

$$\Xi^{-1} \partial_z \Xi = A_z^+ - \Xi^{-1} A_z^- \Xi.$$

7. КЛАССИЧЕСКО-КВАНТОВОЕ СООТВЕТСТВИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Уравнения изомонодромных деформаций, в частности уравнения Пенлеве, обычно описывают в терминах пары линейных задач. Соответствующие линейные операторы – связности вдоль базовой кривой (по спектральному параметру) и вдоль модулей базовой кривой с отмеченными точками (по времени):

$$\begin{aligned} \partial_z \Psi &= \mathbf{U}(z, t, q, p, \{c_k\}) \Psi, \\ \partial_t \Psi &= \mathbf{V}(z, t, q, p, \{c_k\}) \Psi, \end{aligned} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ – sl_2 -значные функции, z – спектральный параметр, t – время, а $\{c_k\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ – набор параметров данного уравнения. Само уравнение возникает как условие нулевой кривизны этих связностей:

$$\partial_t \mathbf{U} - \partial_z \mathbf{V} + [\mathbf{U}, \mathbf{V}] = 0 \quad (7.2)$$

тождественно по спектральному параметру. При этом уравнение, конечно, не зависит ни от выбора калибровки для указанных связностей, ни от репараметризации спектрального параметра. В частности, L – A -пара, предложенная в работе [55], дает уравнение Пенлеве VI в эллиптической форме [17]:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = - \sum_{a=0}^3 \nu_a^2 \wp'(u + \omega_a, \tau), \quad (7.3)$$

где модулярный параметр τ эллиптической кривой играет роль времени, ω_a – полу-периоды, а ν_a – произвольные константы⁸⁾.

Вернемся к линейным задачам (7.1). Матричные уравнения первого порядка сводятся к скалярным уравнениям более высокого порядка на одну из компонент решения как функцию от спектрального параметра. Эти скалярные уравнения уже зависят и от выбора калибровки, и от параметризации спектрального параметра и времени. В работах [66] явно показано, что для каждого уравнения Пенлеве существует такой выбор калибровки и такой выбор переменных, что из матричных линейных задач следует скалярное уравнение на одну из компонент их общего решения (ψ_1), имеющее вид нестационарного уравнения Шредингера (по спектральному параметру) с классическим потенциалом Пенлеве. Тем самым, исходная линейная задача приводит как к классической (условие совместности дает уравнение на u типа (1.2)), так и к квантовой (уравнение на компоненту решения как функцию от спектрального параметра) задачам. Причем классический и квантовый потенциалы совпадают с точностью до сдвига констант.

Более точно, в работах [66] была доказана

ТЕОРЕМА 7.1. *Для каждого уравнения Пенлеве, записанного в форме Калоджеро*

$$\ddot{u} = -\partial_u V(u, t), \quad (7.4)$$

как классической гамильтоновой системы с зависящим от временем гамильтонианом $H(p, u, t) = p^2/2 + V(u, t)$, где $V(u, t)$ – рациональный, гиперболический или эллиптический потенциал с явной зависимостью от времени, существует пара совместных линейных задач (7.1) такая, что:

1) *уравнения нулевой кривизны (7.2) эквивалентны уравнению Пенлеве (7.4) на переменную u , определяемую как простой ноль правого верхнего элемента матрицы $\mathbf{U}(z, t)$ по спектральному параметру: $\mathbf{U}_{12}(u, t) = 0$;*

⁸⁾В случае, когда все константы равны, уравнение (1.2) описывает неавтономную версию двух-частичной системы Калоджеро. L – A -пара в этом случае дается известным анзацем Кричевера, а утверждение о том, что одна и та же пара описывает как автономную механику, так и уравнение Пенлеве, было обнаружено Левиным и Ольшанецким [20] и называется классическим соответствием Пенлеве–Калоджеро [65].

2) функция

$$\Psi = \exp \left[\int^t H(\dot{u}, u, t') dt' \right] \psi_1,$$

где ψ_1 – первая компонента Ψ , удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера по мнимому времени

$$\partial_t \Psi = \left(\frac{1}{2} \partial_z^2 + \tilde{V}(z, t) \right) \Psi \quad (7.5)$$

с потенциалом

$$\tilde{V}(z, t) = V(z, t, \{\tilde{c}_k\}) = \frac{1}{2} \left[\det(\mathbf{U}) - \partial_z \mathbf{U}_{11} + 2\mathbf{V}_{11} \right],$$

который совпадает с классическим потенциалом $V(z, t) = V(z, t, \{c_k\})$ с точностью до возможных сдвигов параметров $\{c_k\}$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \left(\alpha, \beta + \frac{1}{2} \right) \quad \text{для уравнения Пенлеве IV (PIV),} \\ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) &= \left(\alpha - \frac{1}{8}, \beta + \frac{1}{8}, \gamma, \delta \right) \quad \text{для уравнения Пенлеве V (PV),} \\ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) &= \left(\alpha - \frac{1}{8}, \beta + \frac{1}{8}, \gamma - \frac{1}{8}, \delta + \frac{1}{8} \right) \quad \text{для уравнения Пенлеве VI (PVI).} \end{aligned}$$

Это явление называется *квантовым соответствием Калоджеро–Пенлеве* или *классическо-квантовым соответствием для уравнений Пенлеве*.

Приведем простейший пример. Уравнение PI

$$4\ddot{x} = 6x^2 + t \quad (7.6)$$

уже исходно имеет форму Калоджеро, и поэтому в замене переменных необходимости нет. Оно записывается в канонической гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial x}$$

с классическим зависящим от времени гамильтонианом

$$H_1 = H_1(p, x) = \frac{p^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{tx}{4}. \quad (7.7)$$

Если ввести потенциал

$$V_1(x, t) = -\frac{x^3}{2} - \frac{tx}{4}, \quad (7.8)$$

уравнение PI приобретает вид $\ddot{x} = -\partial_x V_1(x, t)$, который является уравнением Ньютона для точечной частицы на прямой в зависящем от времени потенциале. Заметим, что частная и полная производные гамильтониана по времени равны

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{dH_1}{dt} = -\frac{x(t)}{4}.$$

Для уравнения PI общая конструкция особенно проста, так как в данном случае не требуется ни замены переменных, ни калибровочного преобразования. Уравнение PI $4\ddot{u} = 6u^2 + t$ является условием совместности линейных задач с матрицами

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{pmatrix} \dot{u} & x - u \\ x^2 + xu + u^2 + t/2 & -\dot{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ x/2 + u & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

которые уже имеют необходимый вид. Заметим, что u – простой ноль правого верхнего элемента матрицы $\mathbf{U}(x, t)$: $b(u) = 0$. Еще один смысл уравнения PI – это условие независимости данных монодромии первой линейной задачи уравнения (7.1) от параметра t .

Спектральный параметр обозначен через x . Мы намеренно используем то же обозначение x , что и в классических уравнениях движения, чтобы подчеркнуть, что это переменная (x – координата частицы на прямой), которую мы будем “квантовать” в квантовой версии соответствия Пенлеве–Калоджеро, т. е. заменять импульс $p = \dot{x}$ на оператор ∂_x . Остается применить общую конструкцию, описанную в теореме 7.1. В случае PI

$$\det \mathbf{U} = -x^3 - \frac{tx}{2} - \dot{u}^2 + u^3 + \frac{tu}{2}, \quad \partial_x \mathbf{U}_{11} = \mathbf{V}_{11} = 0,$$

т. е. вычисление потенциала $U(x, t)$ тривиально. В результате получаем нестационарное уравнение Шредингера (по мнимому времени)

$$\partial_t \psi = \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{tx}{4} - H_I(\dot{u}, u) \right) \psi \quad (7.10)$$

с $H_I(\dot{u}, u)$ из (7.7). Его можно переписать в виде

$$\partial_t \psi = (H_I(\partial_x, x) - H_I(\dot{u}, u)) \psi, \quad (7.11)$$

где

$$H_I(\partial_x, x) = \frac{1}{2} \partial_x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{tx}{4}$$

– квантовый гамильтониан, полученный буквальным квантованием классической функции Гамильтона (7.7). Функция

$$\Psi(x, t) = \exp \left[\int^t H_I(\dot{u}, u) dt' \right] \psi(x, t) \quad (7.12)$$

удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера

$$\partial_t \Psi = H_I(\partial_x, x) \Psi = \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 + V_I(x, t) \right) \Psi \quad (7.13)$$

без свободного, зависящего от t слагаемого.

Итак, мы построили два эквивалентных описания уравнения PI. Первое – классические уравнения движения в кубическом, зависящем от времени потенциале с гамильтонианом (7.7). Координата частицы как функция времени удовлетворяет уравнению PI. Второе – квантово-механическая частица в том же зависящем от времени потенциале. Нестационарное уравнение Шредингера для квантовой задачи в координатном представлении одновременно является линейной задачей, задающей эволюцию по времени для уравнения Пенлеве. Отметим, что этот же результат был получен ранее другим способом [67], [68].

В работе [69] решалась следующая обратная задача. Предположим, что указанное в теореме соответствие классической и квантовой задач выполняется. Задача состоит в том, чтобы найти потенциалы $V(z, t)$ (и соответственно уравнения), которые этому свойству удовлетворяют. То есть мы предполагаем, что уравнение Шредингера (7.5) выполняется. Далее, запишем в пару к нему еще одну линейную задачу. Она может быть записана в терминах $V(z, t)$ и еще одной функции $b(z, t) = L_{12}(z)$, нули которой определяют динамическую переменную q . Перебирая возможные функции b , получим в каждом случае уравнения на потенциал. Тогда задача сводится к решению этих уравнений. Оказывается, что (функциональные) уравнения на потенциал могут быть записаны в универсальном виде в зависимости от того, сколько простых нулей имеет функция $b(z, t) = L_{12}$. В случае одного нуля уравнение приобретает вид (7.28), а в случае двух нулей – (7.31). Дальнейшее изучение показало, что решения указанных уравнений в точности воспроизводят список Пенлеве. Опишем задачу более подробно.

Начнем с линейной задачи со спектральным параметром [10]–[16], [70], [71]

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi &= \mathbf{U}(x, t) \Psi, \\ \partial_t \Psi &= \mathbf{V}(x, t) \Psi, \end{aligned} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

где матрицы $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in sl_2$ явно зависят от спектрального параметра x , от параметра деформации t (времени) и содержат неизвестную функцию $u(t)$, ограниченную условием совместности⁹⁾. Это означает, что у уравнений есть общее семейство решений. Условие совместности есть уравнение нулевой кривизны (или уравнение изомонодромной деформации)

$$\partial_x \mathbf{V} - \partial_t \mathbf{U} + [\mathbf{V}, \mathbf{U}] = 0. \quad (7.15)$$

Обозначим

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ бесследовые, т. е. $a + d = 0$, $A + D = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} a_t - A_x + bC - cB &= 0, \\ b_t - B_x + 2aB - 2bA &= 0, \\ c_t - C_x + 2cA - 2aC &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

⁹⁾Эта функция и будет удовлетворять одному из уравнений Пенлеве.

В работах [66] с использованием калибровочного преобразования $\Omega = \text{diag}(\omega, \omega^{-1})$ матрицы $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ выбирались такими, что

$$b_x = 2B. \quad (7.17)$$

Тогда линейная система (7.14) на вектор-функцию $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^t$ сводится к паре скалярных уравнений на $\psi := \psi_1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \ln b) \partial_x + W(x, t) \right) \psi &= 0, \\ \partial_t \psi &= \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 + U(x, t) \right) \psi, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где

$$W = U(x, t) - \frac{1}{2} \partial_t \ln b + \frac{1}{4} \partial_x^2 \ln b + \frac{1}{4} (\partial_x \ln b)^2$$

и

$$U(x, t) = \frac{1}{2} (ad - bc - a_x) + A = \frac{1}{2} \det \mathbf{U} - \frac{a_x}{2} + A. \quad (7.19)$$

Второе уравнение (7.18) имеет вид нестационарного уравнения Шредингера по мнимому времени с потенциалом $U(x, t)$. Оно описывает изомонодромные деформации первого уравнения, а условие совместности дает уравнение Пенлеве (в форме Калоджеро) на $u = u(t)$

$$\ddot{u} = -\partial_u \tilde{V}(u, t), \quad (7.20)$$

генерируемое гамильтонианом $H(\dot{u}, u, t) = \dot{u}^2/2 + \tilde{V}(u, t)$. Функция $u = u(t)$ определяется как (простой) ноль $b(x)$:

$$b(u) = 0. \quad (7.21)$$

Второе важное условие, наряду с (7.17),

$$U(x, t) = U(x, \dot{u}(t), u(t), t) = V(x, t) - H(\dot{u}, u, t), \quad (7.22)$$

где $H(\dot{u}, u, t)$ – классический гамильтониан. Зависящая от x часть потенциала $V(x, t)$ не содержит зависимости от u . Тогда второе уравнение в (7.18) имеет вид

$$\partial_t \Psi(x, t) = \left(\frac{1}{2} \partial_x^2 + V(x, t) \right) \Psi(x, t) \quad (7.23)$$

с

$$\Psi(x, t) = \exp \left[\int^t H(\dot{u}, u, t') dt' \right] \psi(x, t). \quad (7.24)$$

Заметим, что условию (7.17) можно легко удовлетворить, выбрав подходящую калибровку. Однако вместе с (7.22) оно становится нетривиальным и ведет к *квантовому соответствию Пенлеве–Калоджеро*, которое связывает потенциалы классической ($\tilde{V}$) и квантовой (V) задач. Выясняется, что эти потенциалы различаются только квантовыми поправками некоторых констант связи. Тем самым, уравнение (7.23) является квантованием уравнения (7.20) с единичной постоянной Планка.

Целью настоящего раздела является исследование обратной задачи. Начнем с системы скалярных уравнений (7.18) и предположим, что квантовое соответствие Пенлеве–Калоджеро имеет место, т. е. уравнения (7.20)–(7.22) верны (в этом разделе мы будем называть явление *классическо-квантовым соответствием*, так как исходно неясно, какие уравнения удовлетворяют условиям). Далее получим и решим функциональные уравнения¹⁰⁾ на потенциал V , перебирая возможные выборы функции b . Иными словами, мы предположим, что соответствие имеет место, и найдем, какие потенциалы удовлетворяют условиям совместности. Основной результат содержит

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть условия совместности системы (7.18) с условиями (7.22) и

$$H(\dot{u}, u, t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \tilde{V}(u, t)$$

эквивалентны уравнению (7.20), в котором u – простой ноль функции $b(x, t)$: $b(x, t)|_{x=u} = 0$. Тогда имеются две возможности.

1. В первом случае

$$b(x, u, t) = b(x - u, t). \quad (7.25)$$

Функция $b(z, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$2\partial_t b(z, t) = \partial_z^2 b(z, t), \quad (7.26)$$

квантовый потенциал совпадает с классическим,

$$\tilde{V}(u, t) = V(u, t), \quad (7.27)$$

и удовлетворяет функциональному уравнению

$$V_t(x) - V_t(u) - \frac{1}{2}f(x - u, t)(V'(x) + V'(u)) - f_x(x - u, t)(V(x) - V(u)) = 0, \quad (7.28)$$

где $f(x, t) = b_x(x, t)/b(x, t)$.

2. Во втором случае

$$b(x, u, t) = b(x - u, t)b(x + u, t). \quad (7.29)$$

Функция $b(z, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (7.26), квантовый потенциал связан с классическим как

$$\tilde{V}(u, t) = V(u, t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 \ln b(x, t) \Big|_{x=2u} \quad (7.30)$$

и $V(x, t)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\begin{aligned} V_t(x) - V_t(u) - \frac{1}{2}f(x - u, t)(V'(x) + V'(u)) - \frac{1}{2}f(x + u, t)(V'(x) - V'(u)) + \\ + (f_x(x - u, t) + f_x(x + u, t))(V(u) - V(x)) = 0, \end{aligned} \quad (7.31)$$

где $f(x, t) = b_x(x, t)/b(x, t)$.

¹⁰⁾ Следует отметить, что функциональные уравнения играют важнейшую роль в теории интегрируемых систем [8], [72].

Решение уравнений (7.28) и (7.31) дает следующие результаты: для рациональной (по x) функции b получим уравнения PI, PII из (7.28) и PIV из (7.31), для гиперболической функции b – уравнение PIII из (7.28) и PV из (7.31). Наиболее общее уравнение PVI возникает для выбора функции b в виде $\vartheta(x-u)/\vartheta(x+u)$ в то время как (7.28) имеет только тривиальные решения в этом случае.

В итоге мы показали, что все естественные выборы функции b (рациональная, гиперболическая и эллиптическая) воспроизводят в точности список уравнений Пенлеве. Таким образом, доказано, что *классическо-квантовое соответствие является альтернативным определением для уравнений Пенлеве*.

8. СПЕКТРАЛЬНАЯ ДУАЛЬНОСТЬ

Гипотеза Алдая–Гайотто–Тачикавы [72] устанавливает явное соответствие между конформными блоками алгебры Вирасоро (или W -алгебры) в двумерной конформной теории поля и интегралами типа функций Некрасова [73], возникающих в двухпараметрической Ω -деформации теории Зайберга–Виттена. В специальном пределе (предел Некрасова–Шаташвили [29]) обе части соответствия приводят к интегрируемым системам разных типов. Тем самым между такими системами возникают соотношения. Исследованию этого вопроса посвящены наши недавние работы [74], [75].

Приведем простейший пример. Со стороны суперсимметричной калибровочной теории в указанном пределе возникает N -вершинная GL_2 (XXX) цепочка Гейзенберга. На классическом уровне она описывается GL_2 -значной трансфер-матрицей

$$\begin{aligned} T(x) &= V L_N(x) \dots L_1(x), & L_i(x) &= x - x_i + S^i, & i &= 1, \dots, N, \\ V &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{q}{(1+q)^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & & & & (8.1) \\ S^i &\in sl_2: \text{Spec}(S^i) = K_i, -K_i, & m_i^\pm &= x_i \pm K_i, \end{aligned}$$

спектральной кривой

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{Heisen}}(w, x): \text{tr } T(x) - \frac{1}{1+q} w K^+(x) - \frac{q}{1+q} w^{-1} K^-(x) &= 0, \\ K^\pm(x) &= \prod_{i=1}^N (x - m_i^\pm), \end{aligned} \quad (8.2)$$

и дифференциалом Зайберга–Виттена $dS^{\text{Heisen}}(w, x) = x dw/w$. Со стороны конформной теории возникает специальная (редуцированная) gl_N -модель Годена на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, q, \infty\}$, которая задана следующими спектральной кривой и матрицей Лакса:

$$\Gamma^{\text{Gaudin}}(y, z): \det(y - L(z)) = 0, \quad L(z) = \frac{A^0}{z} + \frac{A^1}{z-1} + \frac{A^q}{z-q} \in gl_N \quad (8.3)$$

с условиями

$$\begin{aligned} A^0 + A^1 + A^q + A^\infty &= 0, \\ A^\infty \equiv \Upsilon &= \text{diag}(v_1, \dots, v_N), \quad \text{Spec}(A^0) = (\mu_1, \dots, \mu_N), \\ A^1 &= \xi^1 \times \eta^1, \quad A^q = \xi^q \times \eta^q, \end{aligned} \quad (8.4)$$

т. е. A^1 и A^q — gl_N -значные матрицы ранга 1. Дифференциал Зайберга–Виттена имеет вид $dS^{\text{Gaudin}}(y, z) = y dz$. В [74], [75] показано, что описанные выше системы связаны *спектральной дуальностью*. На классическом уровне эта дуальность означает совпадение спектральных кривых и дифференциалов Зайберга–Виттена с точностью до замены переменной характеристического уравнения на спектральный параметр. В данном случае замена имеет вид

$$w = z, \quad x = zy.$$

При этом дифференциалы, очевидно, равны, а совпадение спектральных кривых

$$\det(z - T(yz)) = 0 \quad \text{и} \quad \det(y - L^G(z)) = 0$$

явно доказывается (при этом, в частности, $m_i^+ = -v_i$, $m_i^- = \mu_i$, $1 \leq i \leq N$). Несложно проверить, что обе системы описывают динамику одного и того же числа степеней свободы и параметризуются одним и тем же числом констант. Более того, в работе [75] описано явное пуассоново отображение (замена переменных), переводящее одну пуассонову структуру в другую. Для цепочки скобка квадратичная, а в модели Годена исходно она линейная, однако в результате редукции (которую можно провести по процедуре Дирака) скобка становится также квадратичной. Тогда спектральная дуальность описывается отображением, аналогичным дуальности Адамса–Харнада–Уртьюбиса [76].

Полученное соответствие естественно обобщается на квантовый случай, описанная дуальность при этом связывает уравнения Бакстера, которые возникают как квантование классических спектральных кривых.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Эллиптические функции

Основные определения и свойства. Пусть $q = e^{2\pi i\tau}$, где τ — модулярный параметр эллиптической кривой Σ_τ , которая задана как $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$, $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ [64], [77]. Основным элементом — тета-функция

$$\vartheta(z|\tau) = q^{1/8} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\left(\frac{1}{2}n(n+1)\tau + nz\right)}, \quad \mathbf{e} = e^{2\pi i}. \quad (\text{A.1})$$

Функции Эйзенштейна имеют вид

$$E_1(z|\tau) = \partial_z \ln \vartheta(z|\tau), \quad E_1(z|\tau) \sim \frac{1}{z} - 2\eta_1 z, \quad (\text{A.2})$$

где

$$\eta_1(\tau) = \frac{3}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty'} \frac{1}{(m\tau + n)^2} = \frac{24}{2\pi i} \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \quad (\text{A.3})$$

и

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n)$$

– функция Дедекинда;

$$E_2(z|\tau) = -\partial_z E_1(z|\tau) = -\partial_z^2 \ln \vartheta(z|\tau) = \wp(z) + 2\eta_1 \sim \frac{1}{z^2} + 2\eta_1, \quad (\text{A.4})$$

$$E_{2k}(-z) = E_{2k}(z), \quad E_{2k+1}(-z) = -E_{2k+1}(z). \quad (\text{A.5})$$

Выпишем *связь функций Эйзенштейна с функциями Вейерштрасса*:

$$\zeta(z, \tau) = E_1(z, \tau) + 2\eta_1(\tau)z, \quad (\text{A.6})$$

$$\wp(z, \tau) = E_2(z, \tau) - 2\eta_1(\tau). \quad (\text{A.7})$$

Имеется еще одна важная функция:

$$\phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}, \quad (\text{A.8})$$

$$\phi(u, z) = \phi(z, u), \quad \phi(-u, -z) = -\phi(u, z). \quad (\text{A.9})$$

Она имеет полюс в точке $z = 0$ и

$$\phi(u, z) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}(E_1^2(u) - \wp(u)) + \dots \quad (\text{A.10})$$

Тригонометрический предел для $\phi(u, z)$ следует из (A.1):

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} \phi(u, z) = \frac{\sin \pi(z+u)}{\sin \pi z \sin \pi u}. \quad (\text{A.11})$$

Пусть $f(u, z) = \partial_u \phi(u, z)$. Тогда

$$f(u, z) = \phi(u, z)(E_1(u+z) - E_1(u)). \quad (\text{A.12})$$

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\partial_\tau \phi(u, w) - \frac{1}{2\pi i} \partial_u \partial_w \phi(u, w) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Условия квазипериодичности:

$$\vartheta(z+1) = -\vartheta(z), \quad \vartheta(z+\tau) = -q^{-1/2} e^{-2\pi i z} \vartheta(z), \quad (\text{A.14})$$

$$E_1(z+1) = E_1(z), \quad E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi i, \quad (\text{A.15})$$

$$E_2(z+1) = E_2(z), \quad E_2(z+\tau) = E_2(z), \quad (\text{A.16})$$

$$\phi(u, z+1) = \phi(u, z), \quad \phi(u, z+\tau) = e^{-2\pi i u} \phi(u, z). \quad (\text{A.17})$$

$$f(u, z+1) = f(u, z), \quad f(u, z+\tau) = e^{-2\pi i u} f(u, z) - 2\pi i \phi(u, z). \quad (\text{A.18})$$

Формула Фэя тройной секции:

$$\phi(u_1, z_1)\phi(u_2, z_2) - \phi(u_1 + u_2, z_1)\phi(u_2, z_2 - z_1) - \phi(u_1 + u_2, z_2)\phi(u_1, z_1 - z_2) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Частным случаем этого тождества является функциональное уравнение Калоджеро

$$\phi(u, z)\partial_v\phi(v, z) - \phi(v, z)\partial_u\phi(u, z) = (E_2(u) - E_2(v))\phi(u + v, z), \quad (\text{A.20})$$

$$\phi(u, z)\phi(-u, z) = E_2(z) - E_2(u), \quad (\text{A.21})$$

$$\phi(z, u_1)\phi(z, u_2) = \phi(z, u_1 + u_2)(E_1(z) + E_1(u_1) + E_1(u_2) - E_1(z + u_1 + u_2)). \quad (\text{A.22})$$

Выпишем также следующее важное соотношение:

$$\begin{aligned} \phi(v, z - w)\phi(u_1 - v, z)\phi(u_2 + v, w) - \phi(u_1 - u_2 - v, z - w)\phi(u_2 + v, z)\phi(u_1 - v, w) = \\ = \phi(u_1, z)\phi(u_2, w)f(u_1, u_2, v), \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

где

$$f(u_1, u_2, v) = E_1(v) - E_1(u_1 - u_2 - v) + E_1(u_1 - v) - E_1(u_2 + v) \quad (\text{A.24})$$

или

$$f(u_1, u_2, v) = -\frac{\vartheta'(0)\vartheta(u_1)\vartheta(u_2)\vartheta(u_2 - u_1 + 2v)}{\vartheta(u_1 - v)\vartheta(u_2 + v)\vartheta(u_2 - u_1 + v)\vartheta(v)}. \quad (\text{A.25})$$

Взяв предел $u_2 \rightarrow 0$ в (A.23), получаем

$$\begin{aligned} \phi(v, z - w)\phi(u_1 - v, z)\phi(v, w) - \phi(u_1 - v, z - w)\phi(v, z)\phi(u_1 - v, w) = \\ = \phi(u_1, z)(E_2(v) - E_2(u_1 - v)), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

что эквивалентно (A.20) вследствие (A.12).

Тета-функции с характеристиками для $a, b \in \mathbb{Q}$ определены как

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{e} \left((j + a)^2 \frac{\tau}{2} + (j + a)(z + b) \right).$$

В частности, функция ϑ (A.1) есть просто тета-функция с характеристиками:

$$\vartheta(x, \tau) = \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (x, \tau). \quad (\text{A.27})$$

Она имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z + 1, \tau) &= \mathbf{e}(a)\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau), \\ \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z + a'\tau, \tau) &= \mathbf{e} \left(-a'^2 \frac{\tau}{2} - a'(z + b) \right) \theta \begin{bmatrix} a + a' \\ b \end{bmatrix} (z, \tau), \\ \theta \begin{bmatrix} a + j \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) &= \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau), \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где использовано обозначение $\theta \begin{bmatrix} a/2 \\ b/2 \end{bmatrix} (z) = \theta_{ab}(z)$. Тогда $\theta_{11}(z) = \vartheta(z)$.

Группа Ли $GL(N, \mathbb{C})$ и эллиптические функции. Будем использовать обозначение $\mathbf{e}_N(z) = e^{2\pi iz/N}$ и пару матриц

$$\mathcal{Q} = \text{diag}(\mathbf{e}_N(1), \dots, \mathbf{e}_N(m), \dots, 1), \quad (\text{A.28})$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Пусть

$$\Gamma_N = \mathbb{Z}_N^{(2)} = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \quad \Gamma'_N = \tilde{\mathbb{Z}}_N^{(2)} = \mathbb{Z}_N^{(2)} \setminus (0, 0) \quad (\text{A.30})$$

– двумерные решетки порядков N^2 и $N^2 - 1$ соответственно. Матрицы $\mathcal{Q}^{a_1} \Lambda^{a_2}$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_N^{(2)}$, образуют базис в $GL(N, \mathbb{C})$, а $\mathcal{Q}^{\alpha_1} \Lambda^{\alpha_2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \tilde{\mathbb{Z}}_N^{(2)}$, – базис в алгебре Ли $sl(N, \mathbb{C})$. Рассмотрим проективное представление $\mathbb{Z}_N^{(2)}$ в $GL(N, \mathbb{C})$

$$a \rightarrow T_a = \mathbf{e}_N\left(\frac{a_1 a_2}{2}\right) \mathcal{Q}^{a_1} \Lambda^{a_2}, \quad (\text{A.31})$$

$$T_a T_b = \kappa_{a,b} T_{a+b}, \quad \kappa_{a,b} = \frac{N}{2\pi i} \mathbf{e}_N\left(-\frac{a \times b}{2}\right), \quad a \times b = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (\text{A.32})$$

Отметим некоторые свойства κ :

$$\kappa_{a,b} \kappa_{b,a} = \left(\frac{N}{2\pi i}\right)^2, \quad \kappa_{a,c} \kappa_{b,c} = \frac{N}{2\pi i} \kappa_{a+b,c}, \quad \kappa_{a,a} = \frac{N}{2\pi i}. \quad (\text{A.33})$$

Константы $\kappa_{a,b}$ можно интерпретировать как нетривиальный 2-коцикл в $H^2(\mathbb{Z}_N^{(2)}, \mathbb{Z}_{2N})$. Форма Киллинга имеет вид

$$\langle T_\alpha T_\beta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}(T_\alpha T_\beta) = N \delta_{0, \alpha + \beta} \pmod{\Gamma_N}. \quad (\text{A.34})$$

Из (A.32) следует, что

$$[T_\alpha, T_\beta] = c_{\alpha,\beta} T_{\alpha+\beta}, \quad (\text{A.35})$$

где

$$c_{\alpha,\beta} = 2\sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{N} (\alpha \times \beta) \quad (\text{A.36})$$

– структурные константы $gl(N, \mathbb{C})$ (или $sl(N, \mathbb{C})$). Они обладают следующими свойствами:

$$c_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta+\alpha}, \quad c_{\alpha,\beta} = -c_{\beta,\alpha} = c_{\beta,-\alpha}. \quad (\text{A.37})$$

В некоторых случаях будем использовать структурные константы

$$\mathbf{C}(\alpha, \beta) = \frac{N}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{N}(\alpha \times \beta)\right).$$

Определим константы $\tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}$

$$\vartheta(\omega_\gamma) = \vartheta\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}\right), \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} E_1(\omega_\gamma) &= E_1\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}\right), & E_2(\omega_\gamma) &= E_2\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}\right), \\ \wp(\omega_\gamma) &= \wp\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

и квазипериодические функции на Σ_τ

$$\varphi_\gamma(z) = \mathbf{e}_N(\gamma_2 z) \phi_\gamma(z), \quad \phi_\gamma(z) = \phi\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}, z\right), \quad (\text{A.40})$$

$$f_\gamma(z) = \mathbf{e}_N(\gamma_2 z) \partial_u \phi(u, z)|_{u=(\gamma_1 + \gamma_2\tau)/N} = \varphi_\gamma(z)(E_1(\omega_\gamma + z) - E_1(\omega_\gamma)), \quad (\text{A.41})$$

$$F_\gamma(z) = \varphi_\gamma(z)E_1(z) - f_\gamma(z) = \varphi_\gamma(z)(E_1(z) + E_1(\omega_\gamma) - E_1(\omega_\gamma + z)). \quad (\text{A.42})$$

Функция $\varphi_\gamma(z)$ – элемент базиса в пространстве сечений с простым полюсом в точке $z = 0$ расслоения $\text{End } V$ голоморфного векторного расслоения V степени 1. Из (A.8) следует, что

$$\varphi_\gamma(z + 1) = \mathbf{e}_N(\gamma_2) \varphi_\gamma(z), \quad \varphi_\gamma(z + \tau) = \mathbf{e}_N(-\gamma_1) \varphi_\gamma(z), \quad (\text{A.43})$$

$$f_\gamma(z + 1) = \mathbf{e}_N(\gamma_2) f_\gamma(z), \quad f_\gamma(z + \tau) = \mathbf{e}_N(-\gamma_1) f_\gamma(z) - 2\pi i \varphi_\gamma(z), \quad (\text{A.44})$$

$$F_\gamma(z + 1) = \mathbf{e}_N(\gamma_2) F_\gamma(z), \quad F_\gamma(z + \tau) = \mathbf{e}_N(-\gamma_1) F_\gamma(z). \quad (\text{A.45})$$

Функция $F_\gamma(z)$ квазипериодическая с полюсом второго порядка в $z = 0$. Выпишем тождества Фэя. Из (A.19)–(A.22) следует, что

$$\varphi_\gamma(z - z_a) \varphi_\beta(z - z_c) \stackrel{(\text{A.39})}{=} \varphi_{\beta+\gamma}(z - z_a) \varphi_\beta(z_a - z_c) + \varphi_{\beta+\gamma}(z - z_c) \varphi_\gamma(z_c - z_a), \quad (\text{A.46})$$

$$\varphi_\beta(z) f_\gamma(z) - \varphi_\gamma(z) f_\beta(z) \stackrel{(\text{A.20})}{=} \varphi_{\beta+\gamma}(z) (\wp(\omega_\beta) - \wp(\omega_\gamma)), \quad (\text{A.47})$$

$$\varphi_\alpha(z) \varphi_{-\alpha}(z) \stackrel{(\text{A.21})}{=} \wp(z) - \wp(\omega_\alpha), \quad (\text{A.48})$$

$$\varphi_\beta(z) \varphi_\gamma(z) \stackrel{(\text{A.22})}{=} \varphi_{\beta+\gamma}(z) (E_1(z) + E_1(\omega_\beta) + E_1(\omega_\gamma) - E_1(z + \omega_\beta + \omega_\gamma)), \quad (\text{A.49})$$

$$\varphi_\gamma(z_1) \varphi_\gamma(z_2) \stackrel{(\text{A.22})}{=} \varphi_\gamma(z_1 + z_2) (E_1(z_1) + E_1(z_2) + E_1(\omega_\gamma) - E_1(z_1 + z_2 + \omega_\gamma)).$$

Последнее тождество может быть переписано (с помощью (A.9), т. е. $\varphi_\gamma(-z) = -\varphi_{-\gamma}(z)$, и (A.5)) следующим образом:

$$\varphi_\gamma(z_1) \varphi_{-\gamma}(z_2) = -\varphi_\gamma(z_1 - z_2) (E_1(z_1) - E_1(z_2) + E_1(\omega_\gamma) - E_1(z_1 - z_2 + \omega_\gamma)).$$

ТАБЛИЦА А.1

α	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
σ_α	σ_3	σ_1	σ_2
Полупериоды	$\omega_1 = \frac{1}{2}$	$\omega_2 = \frac{\tau}{2}$	$\omega_3 = \frac{1+\tau}{2}$
$\varphi_\alpha(z)$	$\frac{\theta_2(z)\theta'_1(0)}{\theta_2(0)\theta_1(z)}$	$\frac{\theta_4(z)\theta'_1(0)}{\theta_4(0)\theta_1(z)}$	$\frac{\theta_3(z)\theta'_1(0)}{\theta_3(0)\theta_1(z)}$

Также полезно следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 & -\varphi_\beta(z-z_c)f_\gamma(z-z_a) + \varphi_\gamma(z-z_a)f_\beta(z-z_c) = \\
 & = -\varphi_{\beta+\gamma}(z-z_c)f_\gamma(z_c-z_a) + \varphi_{\beta+\gamma}(z-z_a)f_\beta(z_c-z_a).
 \end{aligned} \tag{A.50}$$

Группа Ли $GL(2, \mathbb{C})$ и эллиптические функции. Для $SL(2, \mathbb{C})$ -случая вместо T_α рассмотрим базис матриц Паули

$$\sigma_0 = \text{Id}, \quad \sigma_1 = T_{0,1}, \quad \sigma_2 = T_{1,1}, \quad \sigma_3 = -T_{1,0}. \tag{A.51}$$

Стандартные тета-функции с характеристиками (см. табл. А.1) выразим через тета-функции Якоби: $\theta_{0,0} = \theta_3$, $\theta_{1,0} = \theta_2$, $\theta_{0,1} = \theta_4$, $\theta_{1,1} = \theta_1$. Для $\alpha = 1, 2, 3$ и $\{\omega_\alpha\} = \{\tau/2, (\tau+1)/2, 1/2\}$ имеем

$$\varphi_\alpha(z) = \mathbf{e}(z\partial_\tau\omega_\alpha) \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+\omega_\alpha)}{\vartheta(z)\vartheta(\omega_\alpha)}. \tag{A.52}$$

В $sl(2, \mathbb{C})$ -случае еще некоторые дополнительные свойства появляются в добавление к вышеперечисленным. Далее α, β, γ – различные индексы, эквивалентные $1, 2, 3$ с точностью до циклической перестановки. Тогда $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma \pmod{\Gamma_2}$ и $\varphi_{\alpha+\beta}(z) = \varphi_\gamma(z)$,

$$\varphi_{-\alpha}(z) = \varphi_\alpha(z), \quad \varphi_\alpha(-z) = -\varphi_\alpha(z), \tag{A.53}$$

$$E_1(\omega_\alpha) = -2\pi\sqrt{-1}\partial_\tau\omega_\alpha. \tag{A.54}$$

Действительно, из (А.5) и (А.15) имеем $-E_1(\tau/2) = E_1(\tau/2 - \tau) = E_1(\tau/2) + 2\pi\sqrt{-1}$. Тогда

$$E_1(\omega_\alpha) + E_1(\omega_\beta) = E_1(\omega_\alpha + \omega_\beta), \tag{A.55}$$

$$(\varphi_\alpha(z))^2 = \wp(z) - \wp(\omega_\alpha). \tag{A.56}$$

Для малых z получаем

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2}\wp(\omega_\alpha) + \dots$$

Из (A.55) имеем

$$F_\alpha(z) = \varphi_\beta(z)\varphi_\gamma(z) = -\partial_z\varphi_\alpha(z). \quad (\text{A.57})$$

Тождество (A.19) принимает вид

$$\varphi_\gamma(z - z_a)\varphi_\beta(z - z_c) = \varphi_\alpha(z - z_a)\varphi_\beta(z_a - z_c) - \varphi_\alpha(z - z_c)\varphi_\gamma(z_a - z_c). \quad (\text{A.58})$$

Используя (A.58), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(z - z_c)\varphi_\beta(z - z_a)\varphi_\alpha(z - z_a) &= \varphi_\beta(z - z_a)\varphi_\gamma(z - z_a)\varphi_\beta(z_a - z_c) + \\ &+ \varphi_\alpha(z - z_c)\varphi_\alpha(z_c - z_a)\varphi_\beta(z_c - z_a) - \varphi_\alpha(z - z_a)\varphi_\alpha(z_c - z_a)\varphi_\gamma(z_c - z_a) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

или

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(z - z_c)\varphi_\alpha(z - z_a)\varphi_\gamma(z - z_a) &= \varphi_\beta(z - z_a)\varphi_\gamma(z - z_a)\varphi_\gamma(z_a - z_c) + \\ &+ \varphi_\alpha(z - z_a)\varphi_\alpha(z_c - z_a)\varphi_\beta(z_a - z_c) - \varphi_\alpha(z - z_c)\varphi_\alpha(z_c - z_a)\varphi_\gamma(z_a - z_c). \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Кроме того, имеем

$$\varphi_\alpha(z)\varphi_\alpha(z - \omega_\alpha) = -\mathbf{e}_1(-\omega_\alpha\partial_\tau\omega_\alpha)\left(\frac{\wp'(0)}{\wp(\omega_\alpha)}\right)^2, \quad (\text{A.61})$$

$$\varphi_a(-z - \omega_b) = -\varphi_a(z - \omega_a)\delta_{ab} + (1 - \delta_{ab})\varphi_a(z - \omega_b). \quad (\text{A.62})$$

Выпишем формулы с удвоенным модулярным параметром:

$$\begin{aligned} \theta_4(x, \tau)\theta_3(y, \tau) + \theta_4(y, \tau)\theta_3(x, \tau) &= 2\theta_4(x + y, 2\tau)\theta_4(x - y, 2\tau), \\ \theta_4(x, \tau)\theta_3(y, \tau) - \theta_4(y, \tau)\theta_3(x, \tau) &= 2\vartheta(x + y, 2\tau)\vartheta(x - y, 2\tau), \\ \theta_3(x, \tau)\theta_3(y, \tau) + \theta_4(y, \tau)\theta_4(x, \tau) &= 2\theta_3(x + y, 2\tau)\theta_3(x - y, 2\tau), \\ \theta_3(x, \tau)\theta_3(y, \tau) - \theta_4(y, \tau)\theta_4(x, \tau) &= 2\theta_2(x + y, 2\tau)\theta_2(x - y, 2\tau), \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{aligned} 2\vartheta(x, 2\tau)\theta_4(y, 2\tau) &= \vartheta\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right), \\ 2\theta_3(x, 2\tau)\theta_2(y, 2\tau) &= \vartheta\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right), \\ 2\theta_3(x, 2\tau)\theta_3(y, 2\tau) &= \theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \theta_4\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_4\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right), \\ 2\theta_2(x, 2\tau)\theta_2(y, 2\tau) &= \theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) - \theta_4\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_4\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right). \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Деформированные функции. Рассмотрим следующую деформацию функций (A.52):

$$\varphi_a^\eta(z) = \mathbf{e}_N(a_2 z) \phi\left(\frac{a_1 + a_2 \tau}{N} + \eta, z\right), \quad a \in \mathbb{Z}_N^{(2)}, \quad \eta \in \Sigma_\tau, \quad (\text{A.65})$$

и

$$\varphi_\beta^m(\mathbf{u}, z) = \mathbf{e}(\langle \kappa, \beta \rangle z) \phi\left(\langle \mathbf{u} + \kappa \tau, \beta \rangle + \frac{m}{l}, z\right). \quad (\text{A.66})$$

Тригонометрический предел для $\varphi_a(\eta, z)$ (см. (A.11)) имеет вид

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} \varphi_a(\eta, z) = \begin{cases} \text{ctg } \pi z + \text{ctg } \pi \left(\eta + \frac{a_1}{N}\right), & a_2 = 0, \\ \mathbf{e}\left(\left(\frac{a_2}{N} + 1\right)z\right) \sin^{-1} \pi z, & a_2 \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

Из (A.17) следует, что функция $\varphi_a(z, \eta)$ определена на $\mathbb{Z}_N^{(2)}$:

$$\varphi_{a+c}(\eta, z) = \varphi_a(\eta, z) \quad \text{для} \quad c_{1,2} \in \mathbb{Z} \pmod{N}, \quad (\text{A.68})$$

$$\varphi_a(\eta, z+1) = \mathbf{e}_N(a_2) \varphi_a(\eta, z), \quad \varphi_a(\eta, z+\tau) = \mathbf{e}_N(-a_1 - N\eta) \varphi_a(\eta, z), \quad (\text{A.69})$$

$$\varphi_a(\eta+1, z) = \varphi_a(\eta, z), \quad \varphi_a(\eta+\tau, z) = \mathbf{e}(-z) \varphi_a(\eta, z). \quad (\text{A.70})$$

Для функции $\varphi_\beta^m(\mathbf{u}, z)$ (A.66) имеем

$$\varphi_\beta^m(\mathbf{u}, z+1) = \mathbf{e}(\langle \kappa, \beta \rangle) \varphi_\beta^m(\mathbf{u}, z), \quad \varphi_\beta^m(\mathbf{u}, z+\tau) = \mathbf{e}\left(-\langle \mathbf{u}, \beta \rangle - \frac{m}{l}\right) \varphi_\beta^m(\mathbf{u}, z). \quad (\text{A.71})$$

Непосредственно проверкой доказываем формула

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}_N^{(2)}} E_2(z + \omega_a) = N^2 E_2(Nz). \quad (\text{A.72})$$

По аналогии с (A.19) и (A.23)–(A.26) имеем

$$\begin{aligned} & \varphi_{a+b}(z-w, u + \omega_a + \omega_b) \varphi_{-b}(z, v - \omega_b) + \varphi_a(z, u + v + \omega_a) \varphi_{-a-b}(w, -u - \omega_a - \omega_b) = \\ & = \varphi_a(z-w, u + v + \omega_a) \varphi_{-b}(w, v - \omega_b), \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{a+b+c}(z-w, u + \omega_a + \omega_b + \omega_c) \varphi_{-b-c}(z, v - \omega_b - \omega_c) \varphi_c(w, u + \omega_c) - \\ & - \varphi_{a-c}(z-w, v + \omega_a - \omega_c) \varphi_c(z, u + \omega_c) \varphi_{-b-c}(w, v - \omega_b - \omega_c) = \\ & = \begin{cases} \varphi_a(z, \omega_a + u + v) \varphi_{-a-b}(w, -\omega_a - \omega_b) (E_1(u + \omega_a + \omega_b + \omega_c) - \\ \quad - E_1(v + \omega_a - \omega_c) + E_1(v - \omega_b - \omega_c) - E_1(u + \omega_c)), & a+b \neq 0 \pmod{\mathbb{Z}_N^{(2)}}, \\ \varphi_a(z, \omega_a + u + v) (E_2(u + \omega_c) - E_2(v + \omega_a - \omega_c)), & a+b = 0 \pmod{\mathbb{Z}_N^{(2)}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Группа Ли $SL(N, \mathbb{C})$

В этом приложении мы будем следовать работам [28], [78]. Основным объектом описания являются группы Ли $SL(N, \mathbb{C})$ и $PSL(N, \mathbb{C})$. Группа $SL(N, \mathbb{C})$ – универсальная накрывающая группа $PSL(N, \mathbb{C})$ с центром $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,

$$\text{Id} \rightarrow \mathbb{Z}_N \rightarrow SL(N, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(N, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Id}. \quad (\text{B.1})$$

Следовательно, $\pi_1(PSL(N, \mathbb{C})) = \mathbb{Z}_N$. Алгебры Ли обеих групп совпадают.

Корни и веса. Картановская подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – гиперплоскость в $\mathbb{C}^N$,

$$\mathfrak{H} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N \middle| \sum_{j=1}^N x_j = 0 \right\}.$$

Простые корни $\Pi = \{\alpha_k\}$, $\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{N-1} = e_{N-1} - e_N$, образуют базис в двойственном пространстве $\mathfrak{H}^*$. Здесь $\{e_j\}$, $j = 1, \dots, N$, – канонический базис в $\mathbb{C}^N$. Он генерирует множество корней $A_{N-1} R = \{(e_j - e_k), j \neq k\}$. Корневая решетка $Q \subset \mathfrak{H}^*$ имеет вид

$$Q = \left\{ \sum m_j e_j \mid m_j \in \mathbb{Z}, \sum m_j = 0 \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Отождествим $\mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{H}$ с помощью стандартной метрики на $\mathbb{C}^N$. Система корней

$$R^\vee = \left\{ \alpha^\vee(R) = \frac{2(\alpha^\vee, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z} \quad \text{для всех} \quad \beta \in R \right\}$$

совпадает с R , а решетка кокорней $Q^\vee$ – с Q . Фундаментальные веса ϖ_k , $k = 1, \dots, N-1$, двойственны базису простых кокорней $\Pi^\vee \sim \Pi$ ($\varpi_k(\alpha_k^\vee) = \delta_{kj}$):

[illegible]

В базисе простых корней фундаментальные веса имеют вид

$$\varpi_k = \frac{1}{N}[(N-k)\alpha_1 + 2(N-k)\alpha_2 + \cdots + (k-1)(N-k)\alpha_{k-1} + k(N-k)\alpha_k + k(N-k-1)\alpha_{k+1} + \cdots + k\alpha_{N-1}].$$

Решетка весов генерируется фундаментальными весами:

$$P \subset \mathfrak{H}^*, \quad P = \left\{ \sum_l n_l \varpi_l \mid n_l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (\text{Б.4})$$

т. е. $P = \sum_{j=1}^N m_j e_j$, $m_j \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$, $m_j - m_k \in \mathbb{Z}$. Она же генерируется Q и вектором

$$\varpi_1 = e_1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_j. \quad (\text{Б.5})$$

P определяет представление $SL(N, \mathbb{C})$, а Q – представление $PSL(N, \mathbb{C})$. Фактор-группа $P^\vee/Q^\vee$ ($P^\vee \sim P$) – центр $\mathbb{Z}_N$ в $SL(N, \mathbb{C})$. С другой стороны, его можно отождествить с циклической группой симметрии $e_j \rightarrow e_{j+1} \pmod{N}$ расширенной диаграммы Дынкина $\Pi \cup (\alpha_0 = e_N - e_1)$.

Характеры и кохарактеры. Пусть $\bar{\mathcal{T}}(\mathcal{T}^{\text{ad}})$ – тор, лежащий в $SL(N, \mathbb{C})$ ($PSL(N, \mathbb{C})$). Определим группы характеров¹¹⁾

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= \{\bar{\chi}(x)\} = \{\bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{C}^*\}, \\ \Gamma^{\text{ad}} &= \{\chi^{\text{ad}}(x)\} = \{\mathcal{T}^{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{C}^*\}. \end{aligned}$$

Они отождествляются с подгруппами решеток в $\mathfrak{H}^*$. Действительно, пусть ϖ_k – базис весов и $\phi_k = (1/2\pi i) \ln x_k$. Функции $e^{2\pi i(\varpi_k \phi)}$, $k = 1, \dots, N-1$, генерируют базис в $\bar{\Gamma}$. Аналогично для $\alpha_k \in \Pi$ функции $e^{2\pi i(\alpha_k, \phi)}$, $k = 1, \dots, N-1$, генерируют базис в Γ^{ad} . Тем самым, имеем

$$\bar{\Gamma} = P, \quad \Gamma^{\text{ad}} = Q. \quad (\text{Б.6})$$

Определим и двойственные группы кохарактеров $t(\bar{G}) = \bar{\Gamma}^*$ и $t(G^{\text{ad}}) = \Gamma^{\text{ad}*}$ как отображения

$$t(\bar{G}) = \{\bar{\gamma} = \mathbb{C}^* \rightarrow \bar{\mathcal{T}}\}, \quad (\text{Б.7})$$

$$t(G^{\text{ad}}) = \{\gamma^{\text{ad}} = \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{T}^{\text{ad}}\}, \quad (\text{Б.8})$$

или

$$t(\bar{G}) = \{\phi \in \mathfrak{H} \mid \bar{\chi}(e^{2\pi i \phi}) = 1\}, \quad t(G^{\text{ad}}) = \{\phi \in \mathfrak{H} \mid \bar{\chi}^{\text{ad}}(e^{2\pi i \phi}) = 1\}.$$

Это группы решеток ковесов и кокорней

$$t(\bar{G}) = Q^\vee \sim Q, \quad t(G^{\text{ad}}) = P^\vee \sim P. \quad (\text{Б.9})$$

Центр $SL(N, \mathbb{C})$ лежит в $\bar{\mathcal{T}}$ и отождествляется с фактор-группой

$$\mathcal{Z}(SL(N, \mathbb{C})) = P^\vee / t(\bar{G}) \sim P^\vee / Q^\vee \sim P / Q = \mathbb{Z}_N. \quad (\text{Б.10})$$

¹¹⁾ Голоморфные отображения тора в $\mathbb{C}^*$ такие, что $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ для $x, y \in \mathcal{T}$.

Аналогично фундаментальная группа $PSL(N, \mathbb{C})$

$$\pi_1(PSL(N, \mathbb{C})) \sim t(G^{\text{ad}})/Q^\vee \sim P/Q = \mathbb{Z}_N.$$

Пусть $N = pl$, $l \neq 1, N$, и $\mathbb{Z}_l \subset \mathbb{Z}_N$ – подгруппа в $\mathbb{Z}_N$. Определим фактор-группу

$$G_l = SL(N, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_l. \quad (\text{Б.11})$$

Центр $\mathcal{Z}(G_l)$ группы G_l есть $\mathbb{Z}_p$ и $\pi_1(G_l) = \mathbb{Z}_l$. Рассмотрим группы характеров и кохарактеров G_l

$$\Gamma(G_l) = \{\chi_{G_l}: \mathcal{T}(G_l) \rightarrow \mathbb{C}^*\}, \quad (\text{Б.12})$$

$$t(G_l) = \{\gamma_{G_l}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{T}(G_l)\}, \quad (\text{Б.13})$$

$\Gamma^*(G_l) = t(G_l)$. Они являются решетками в $\mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{H}$, $Q \subset \Gamma(G_l) \subset P$, $Q^\vee \subset t(G_l) \subset P^\vee$. Решетка $\Gamma(G_l)$ генерируется корневой решеткой Q и вектором $l\varpi_1$, а $t(G_l)$ – решеткой Q и вектором $p\varpi_1$,

$$\Gamma(G_l) = l\varpi_1 \cup Q, \quad t(G_l) = p\varpi_1 \cup Q. \quad (\text{Б.14})$$

Группа $\Gamma(G_l)$ – решетка весов G_l , так как старшие веса неприводимых конечномерных представлений G_l лежат в $\Gamma(G_l)$. В терминах решеток центр $\mathcal{Z}(G_l)$ и $\pi_1(G_l)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(G_l) &\sim P^\vee/t(G_l) \sim \Gamma(G_l)/Q \sim \mathbb{Z}_p, \\ \pi_1(G_l) &\sim t(G_l)/Q^\vee \sim P/\Gamma(G_l) \sim \mathbb{Z}_l. \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

Подгруппа ${}^L G_l \subset SL(N, \mathbb{C})$ лэнглендс-двойственна G_l , если

$$t({}^L G_l) \sim \Gamma(G_l) \quad (\Gamma({}^L G_l) \sim t(G_l)).$$

Это подразумевает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}({}^L G_l) &\sim \mathbb{Z}_l, \\ \pi_1({}^L G_l) &\sim \mathbb{Z}_p, \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

т. е. дуальны группы

$${}^L G_l = G_p. \quad (\text{Б.17})$$

В частности, ${}^L SL(N, \mathbb{C}) = PGL(N, \mathbb{C})$.

Аффинная группа Вейля. Аффинная группа Вейля W_a – полупрямое произведение $Q^\vee \rtimes W$ группы Вейля W и $Q^\vee$. Она действует на $\mathfrak{H}$ как

$$x \rightarrow x - \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)} \alpha^\vee + k\alpha^\vee, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{Б.18})$$

Рассмотрим полупрямое произведение

$$\overline{W}_a = P^\vee \rtimes W. \quad (\text{Б.19})$$

В частности, оператор сдвига

$$x \rightarrow x + \vec{m}, \quad \vec{m} \in P^\vee, \quad (\text{Б.20})$$

есть элемент из $\overline{W}_a$. Отсюда следует, что фактор-группа

$$\overline{W}_a/W_a \sim P^\vee/Q^\vee \sim \mathcal{Z}(SL(N, \mathbb{C})). \quad (\text{Б.21})$$

Пусть снова $N = pl$, и определим подгруппу $W_a(G_l)$ в $\overline{W}_a$, генерирующую сдвиги из $t(G_l)$:

$$W_a(G_l) = t(G_l) \rtimes W. \quad (\text{Б.22})$$

Фактор-группа $W_a(G_l)/W_a$ изоморфна $t(G)/Q^\vee$ и тем самым изоморфна $\mathcal{Z}(^L G_l)$.

Благодарности. Авторы выражают благодарность своим учителям и соавторам А. М. Левину и М. А. Ольшанецкому. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00482, 12-02-00594, 12-01-33071_мол_а_вед). Работа А. В. Зотова выполнена при частичной финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [2] М. А. Olshanetsky, А. М. Perelomov, *Phys. Rep.*, **71**:5 (1981), 313–400.
- [3] N. Hitchin, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 91–114.
- [4] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Elliptic Calogero–Moser system from two dimensional current algebra*, arXiv: hep-th/9401021.
- [5] A. Levin, M. Olshanetsky, *Commun. Math. Phys.*, **188**:2 (1997), 449–466.
- [6] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133, arXiv: nlin/0110045.
- [7] Yu. Chernyakov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *J. Phys. A*, **39**:39 (2006), 12083–12101, arXiv: nlin/0602043.
- [8] И. М. Кричевер, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 183–208; И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 47–68; Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления*, **4** (1985), 179–284.
- [9] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53; В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [10] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé, a Modern Theory of Special Functions*, Aspects of Mathematics, **E16**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
- [11] R. Conte (ed.), *The Painlevé Property. One Century Later*, CRM Series in Mathematical Physics, Springer, New York, 1999.
- [12] R. Garnier, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **29** (1912), 1–126.
- [13] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, *Physica D*, **2**:2 (1981), 306–352.
- [14] M. Jimbo, T. Miwa, *Physica D*, **2**:3 (1981), 407–448.
- [15] M. Jimbo, T. Miwa, *Physica D*, **4**:1 (1981), 26–46.
- [16] A. Its, V. Novokshenov, *The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1191**, Springer, Berlin, 1986; A. Fokas, A. Its, A. Kapaev, V. Novokshenov, *Painlevé Transcendents: The Riemann–Hilbert Approach*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, **128**, AMS, Providence, RI, 2006.

- [17] P. Painlevé, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **143** (1906), 1111–01117.
- [18] Yu. Manin, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **186** (1998), 131–151.
- [19] V. I. Inozemtsev, *Lett. Math. Phys.*, **17**:1 (1989), 11–17.
- [20] A. Levin, M. Olshanetsky, “Painlevé–Calogero correspondence”, *Calogero–Moser–Sutherland Models* (Montréal, QC, March 10–15, 1997), CRM Series in Mathematical Physics, eds. J. F. van Diejen, L. Vinet, Springer, New York, 2000, 313–332.
- [21] G. Aminov, S. Arthamonov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Painlevé Field Theory*, Preprint ITEP-TH-53/12, [arXiv:1306.3265](#); G. Aminov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zotov, *Three-particle integrable systems with elliptic dependence on momenta and theta function identities*, [arXiv:1307.1465](#).
- [22] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **316**:1 (2012), 1–44, [arXiv:1006.0702](#).
- [23] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *J. Geom. Phys.*, **62**:8 (2012), 1810–1850, [arXiv:1007.4127](#).
- [24] I. M. Krichever, *J. Soviet Math.*, **28**:1 (1985), 51–90; И. М. Кривевер, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 45–54.
- [25] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **150** (1986), 104–118.
- [26] N. Nekrasov, *Commun. Math. Phys.*, **180**:3 (1996), 587–603.
- [27] А. В. Зотов, А. М. Левин, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 55–64.
- [28] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 4–6*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2002.
- [29] N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories*, [arXiv:0908.4052](#); N. Nekrasov, A. Rosly, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **216** (2011), 69–93, [arXiv:1103.3919](#).
- [30] A. Levin, M. Olshanetsky, *Commun. Math. Phys.*, **188**:2 (1997), 449–466.
- [31] M. Atiyah, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 414–452.
- [32] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **170** (1995), 83–119.
- [33] A. A. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **180**:2 (1981), 189–200; А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [34] A. V. Zotov, *SIGMA*, **7** (2011), 067, 26 pp., [arXiv:1012.1072](#).
- [35] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **12** (1971), 419–436; *Lett. Nuovo Cim.*, **13** (1975), 411; J. Moser, *Advances in Math.*, **16** (1975), 197–220.
- [36] E. Markman, *Compositio Math.*, **93**:3 (1994), 255–290.
- [37] C. Schweigert, *Nucl. Phys. B*, **492**:3 (1997), 743–755.
- [38] R. Friedman, J. Morgan, *Holomorphic principal bundles over elliptic curves*, [arXiv:math/9811130](#).
- [39] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **170** (1995), 83–119.
- [40] А. В. Зотов, Ю. Б. Черняков, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 258–277, [arXiv:hep-th/0102069](#).
- [41] Luen-Chau Li, Ping Xu, *Commun. Math. Phys.*, **231**:2 (2002), 257–286.
- [42] E. Sklyanin, *J. Phys. A*, **21**:10 (1988), 2375–2389.
- [43] H. W. Braden, V. A. Dolgushev, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *J. Phys. A*, **36**:25 (2003), 6979–7000, [arXiv:hep-th/0301121](#).
- [44] А. В. Зотов, А. М. Левин, М. А. Олшанецкий, Ю. Б. Черняков, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 163–183, [arXiv:0710.1072](#).
- [45] P. Etingof, O. Schiffmann, A. Varchenko, *Lett. Math. Phys.*, **62** (2002), 143–158, [arXiv:math.QA/0207157](#); G. Kuroki T. Takebe, *Comm. Math. Phys.*, **190** (1997), 1–56, [arXiv:q-alg/9612033](#).

- [46] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *SIGMA*, **8** (2012), 095, 37 pp., arXiv:1207.4385.
- [47] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40:2** (1979), 194–220; E. Sklyanin, *Quantum inverse scattering method. Selected topics*, arXiv:hep-th/9211111; P. Kulish, E. Sklyanin, *Phys. Lett. A*, **70:5–6** (1979), 461–463; A. Izergin, V. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **79:3** (1981), 303–316; L. D. Faddeev, *Lectures on Quantum Inverse Scattering Method*, World Sci., Singapore, 1990.
- [48] A. A. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **180:2** (1981), 189–200; А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16:3** (1982), 1–29.
- [49] G. Felder, C. Wierczkowski, *Commun. Math. Phys.*, **176:1** (1996), 133–161; G. Felder, “Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, 1994), ed. S. D. Chatterji, Birkhäuser, Boston, 1995, 1247–1255.
- [50] Е. К. Склянин, *Алгебра и анализ*, **6:2** (1994), 227–237, arXiv:hep-th/9308060.
- [51] E. Billey, J. Avan, O. Babelon, *Phys. Lett. A*, **186:1–2** (1994), 114–118.
- [52] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *J. Phys. A*, **46:3** (2013), 035201, 25 pp., arXiv:1208.5750.
- [53] А. В. Зотов, *ЭЧАЯ*, **37:3** (2006), 759–843; А. В. Смирнов, *ТМФ*, **158:3** (2009), 355–369.
- [54] I. Krichever, *Commun. Math. Phys.*, **229:2** (2002), 229–269.
- [55] A. Zotov, *Lett. Math. Phys.*, **67:2** (2004), 153–165, arXiv:hep-th/0310260.
- [56] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **268:1** (2006), 67–103, arXiv:math/0508058; A. Levin, A. Zotov, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **221** (2007), 173–183; M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, “Isomonodromic problems on elliptic curve, rigid tops and reflection equations”, *Elliptic Integrable Systems*, Rokko Lectures in Mathematics, **18**, Kobe Univ., Kobe, Japan, 2005, 149–171.
- [57] A. Smirnov, *Central Eur. J. Phys.*, **8:4** (2010), 542–554, arXiv:0903.1466; G. Aminov, S. Arthamonov, *J. Phys. A*, **44** (2011), 075201, 34 pp.
- [58] A. Kapustin, E. Witten, *Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program*, arXiv:hep-th/0604151.
- [59] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *SIGMA*, **5** (2009), 065, 22 pp., arXiv:0811.3056.
- [60] H. Flaschka, A. Newell, *Commun. Math. Phys.*, **76:1** (1980), 65–116.
- [61] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **14:4** (1980), 45–54.
- [62] А. М. Левин, М. А. Ольшанецкий, *ТМФ*, **123:2** (2000), 237–263.
- [63] R. Ward, “Integrable systems and twistors”, *Integrable Systems*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, **4**, Oxford Univ. Press, New York, 1999.
- [64] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, М., 1978.
- [65] K. Takasaki, *J. Math. Phys.*, **42:3** (2001), 1443–1473.
- [66] A. Zabrodin, A. Zotov, *J. Math. Phys.*, **53:7** (2012), 073507, 19 pp.; 073508, 19 pp., arXiv:1107.5672.
- [67] Б. И. Сулейманов, *Дифференц. уравнения*, **30:5** (1994), 791–796.
- [68] Б. И. Сулейманов, *ТМФ*, **156:3** (2008), 364–377.
- [69] A. Zabrodin, A. Zotov, *Classical-quantum correspondence and functional relations for Painlevé equations*, arXiv:1212.5813.
- [70] P. Painlevé, *Bull. Soc. Math. Phys. France*, **28** (1900), 201–261; *Acta Math.*, **25:1** (1902), 1–85.
- [71] R. Fuchs, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **141** (1905), 555–558.
- [72] D. Gaiotto, *JHEP*, **08** (2012), 034, 57 pp., arXiv:0904.2715; L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91:2** (2010), 167–197, arXiv:0906.3219; A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **04** (2010), 040, 15 pp., arXiv:0910.5670; *J. Phys. A*, **43:10** (2010), 195401, 11 pp., arXiv:0911.2396.

- [73] G. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611, arXiv: [hep-th/9711108](#); A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Testing Seiberg–Witten solution*, arXiv: [hep-th/9801061](#); *Commun. Math. Phys.*, **209**:1 (2000), 77–95, arXiv: [hep-th/9803265](#); 97–121, arXiv: [hep-th/9712241](#).
- [74] A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, A. Zotov, *Письма в ЖЭТФ*, **97**:1 (2013), 49–55, arXiv: [1204.0913](#).
- [75] A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, *Lett. Math. Phys.*, **103**:3 (2013), 299–329, arXiv: [1307.1502](#).
- [76] M. R. Adams, J. Harnad, J. Hurtubise, *Lett. Math. Phys.*, **20**:4 (1990), 299–308; J. Harnad, *Commun. Math. Phys.*, **166**:2 (1994), 337–365, arXiv: [hep-th/9301076](#).
- [77] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*. I, II, Progress in Mathematics, **28**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983, 1984.
- [78] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.

Поступила в редакцию 20.05.2013