Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Григорьев, В. А. Худобахшов, А. В. Цыганов, Разделение переменных для некоторых систем с интегралом движения четвертой степени, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 3, 468–481

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:23:52

© 2013 г. Ю. А. Григорьев*, В. А. Худобахшов*,
А. В. Цыганов*

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛОМ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Построены переменные разделения для интегрируемых деформаций Яхьи в случае волчка Ковалевской и системы Чаплыгина на сфере. В общем случае соответствующие квадратуры представляют собой отображение Абеля–Якоби на двумерном подмногообразии якобиана алгебраической кривой рода три, которая не является гиперэллиптической.

Ключевые слова: бигамильтонова геометрия, разделение переменных, волчок Ковалевской.

DOI: 10.4231/tmf8556

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах Яхьи найдено несколько интегрируемых деформаций волчка Ковалевской и системы Чаплыгина на сфере, т. е. при нулевом значении интеграла площадей (см. работы [1], [2] и более ранние, перечисленные в них). В настоящей работе мы строим переменные разделения для двух таких деформаций, следуя методу, предложенному в статьях [3], [4].

Чтобы описать фазовое пространство, рассмотрим алгебру Ли $e^*(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. Физические координаты для динамической системы задаются с помощью вектора Пуассона $x = (x_1, x_2, x_3)$ и вектора углового момента $J = (J_1, J_2, J_3)$. Скобка Ли–Пуассона в этом случае задается следующими соотношениями:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad (1)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор. Эта скобка Пуассона обладает функциями Казимира

$$C_1 = |x|^2 \equiv \sum_{k=1}^3 x_k^2, \quad C_2 = (x, J) \equiv \sum_{k=1}^3 x_k J_k.$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: yury.grigoryev@gmail.com, vitya.khudobakhshov@gmail.com,
andrey.tsiganov@gmail.com

Если $C_2 = 0$, то соответствующие четырехмерные симплектические листы симплектоморфны кокасательному расслоению двумерной сферы T^*S^2 радиуса $|x|$. Не нарушая общности, можно полагать $C_1 = 1$, так что всюду далее под фазовым пространством будем понимать один из этих симплектических листов, отвечающий единичной сфере.

Рассматриваемые динамические системы определяются функциями Гамильтона

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2ax_1 - \frac{\lambda C_1}{x_3^2} + \frac{c}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{2C_1 - x_3^2}{x_2^2} \left(d + \frac{ex_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \quad (2)$$

и

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2b(x_1^2 - x_2^2) + \frac{\lambda C_1}{x_3^2} + c \left(\frac{1}{x_3^4} - \frac{1}{x_3^6} \right) - (2C_1 - x_3^2) \left(\frac{d}{x_1^2} + \frac{e}{x_2^2} \right). \quad (3)$$

При $\lambda = c = d = e = 0$ система (2) совпадает с волчком Ковалевской [5], а гамильтониан (3) изучался Чаплыгиным [6] и Горячевым при $\lambda \neq 0$ [7].

Если $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, то гамильтониан обобщенного волчка Ковалевской (2) коммутирует относительно скобки Пуассона (1) с интегралом движения

$$\begin{aligned} H_2 = & \left(J_1^2 - J_2^2 - 2ax_1 + \frac{\lambda(x_1^2 - x_2^2)}{x_3^2} \right)^2 + \left(2J_1J_2 - 2ax_2 + \frac{2\lambda x_1x_2}{x_3^2} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{x_2^4} \left(dx_3^2 + \frac{cx_2^2 + ex_3^2x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \left(2x_2^2(J_1^2 + J_2^2) + dx_3^2 + \frac{cx_2^2 + ex_3^2x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) - \\ & - \frac{4ax_3^2(dx_1 + e\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{x_2^2} - \frac{2\lambda}{x_2^2} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(cx_2^2 - ex_3^2x_1)}{x_3^2} - dx_1^2 \right) - 4a^2; \end{aligned} \quad (4)$$

гамильтониан обобщенной системы Чаплыгина (3) коммутирует относительно скобки Пуассона (1) с интегралом движения

$$\begin{aligned} H_2 = & \left(J_1^2 - J_2^2 - 2bx_3^2 - \frac{\lambda(x_1^2 - x_2^2)}{x_3^2} \right)^2 + \left(2J_1J_2 - \frac{2\lambda x_1x_2}{x_3^2} \right)^2 - \\ & - 2(J_1^2 + J_2^2) \left(\frac{c(x_1^2 + x_2^2)}{x_3^6} + \frac{dx_3^2}{x_1^2} + \frac{ex_3^2}{x_2^2} \right) + x_3^4 \left(\frac{c(x_1^2 + x_2^2)}{x_3^8} + \frac{d}{x_1^2} + \frac{e}{x_2^2} \right)^2 - \\ & - 4b \left(\frac{c(x_1^2 - x_2^2)}{x_3^4} + x_3^4 \left(\frac{d}{x_1^2} - \frac{e}{x_2^2} \right) \right) - 2\lambda \left(\frac{c(x_1^2 + x_2^2)^2}{x_3^8} - \frac{dx_2^2}{x_1^2} - \frac{ex_1^2}{x_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Данные интегралы движения были найдены в работе [1]. Далее мы построим переменные разделения и разделенные уравнения, используя только эти интегралы движения.

1.1. Деформации канонических скобок Пуассона. В гамильтоновой механике исходное векторное поле гамильтоновой динамической системы $X = P dH$ определяется через дифференциал функции Гамильтона H и канонический бивектор Пуассона P , который предполагается заведомо известным из кинематических соображений.

В бигамильтоновой геометрии ставится вопрос о построении бивектора Пуассона P' , с помощью которого можно построить разложение исходного векторного поля по гамильтоновым векторным полям:

$$X = g_1 X_1 + \dots + g_n X_n,$$

где $X_k = P' dH_k$ – векторные поля, построенные с помощью функционально независимых первых интегралов H_k исходного поля X ,

$$\dot{H}_k = X(H_k) = 0, \quad \{H_i, H_k\} = (P dH_i, dH_k) = 0, \quad i, k = 1, \dots, n,$$

и бивектора Пуассона P' , относительно которого интегралы движения также находятся в инволюции:

$$\{H_i, H_k\}' = (P' dH_i, dH_k) = 0. \quad (6)$$

Пусть известны два бивектора Пуассона, задающих два разложения векторного поля на симплектическом многообразии, для которых скобка Схоутена¹⁾

$$[P, P']_{ijk} = - \sum_{m=1}^{\dim M} \left(P'_{mk} \frac{\partial P_{ij}}{\partial z_m} + P_{mk} \frac{\partial P'_{ij}}{\partial z_m} + \text{cycle}(i, j, k) \right)$$

обращается в ноль, т.е. бивекторы совместны. Тогда можно построить оператор рекурсии $N = P' P^{-1}$, собственные значения которого являются переменными разделения для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби [8]. Таким образом, разложения, отвечающие различным бивекторам $P', P'', \dots$, можно использовать для построения переменных разделения, связанных с различными интегрируемыми обобщениями исходного векторного поля [3], [9], [10].

За редким исключением, все известные нам бивекторы Пуассона $P', P'', \dots$ являются тривиальными деформациями канонического бивектора P :

$$P' = \mathcal{L}_Y P, \quad (7)$$

где $\mathcal{L}_Y$ – производная Ли вдоль некоторого векторного поля Y , выражение для которой в локальных координатах выглядит следующим образом:

$$(\mathcal{L}_Y P)_{ij} = \sum_{k=1}^{\dim M} \left(Y_k \frac{\partial P_{ij}}{\partial z_k} - P_{kj} \frac{\partial Y_i}{\partial z_k} - P_{ik} \frac{\partial Y_j}{\partial z_k} \right).$$

Для полученного таким образом дополнительного бивектора, помимо условия совместности $[P, P'] = 0$, также должно выполняться равенство

$$[P', P'] = 0. \quad (8)$$

В этом случае бивектор Пуассона P' является и 2-кограницей, и 2-коциклом в когомологии Пуассона–Лихнеровича, задаваемой каноническим бивектором Пуассона P [11], [12].

¹⁾Мы приводим выражение для скобки Схоутена двух бивекторов в локальных координатах z на многообразии M .

1.2. Векторное поле Y . Итак, с исходным гамильтоновым векторным полем X можно связать одно или несколько векторных полей Y , которые отвечают деформациям канонического бивектора Пуассона. Интегралы поля X в таком случае находятся в инволюции не только относительно канонических скобок Ли–Пуассона, но и относительно деформированных скобок.

Для нахождения поля Y нам необходимо решить уравнения (6), (8), которые в терминах Y можно переписать в следующем виде:

$$(dH_k, \mathcal{L}_Y P dH_m) = 0, \quad [\mathcal{L}_Y P, \mathcal{L}_Y P] = 0. \quad (9)$$

Обсудим решения этих уравнений в терминах переменных разделения $q_1, \dots, q_n$, которые являются собственными значениями оператора рекурсии $N = P'P^{-1}$, и сопряженных моментов $p_1, \dots, p_n$. В этом случае канонические скобки Пуассона и их деформации имеют вид

$$\{q_j, p_j\} = 1, \quad \{q_j, p_j\}' = q_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

а остальные скобки равны нулю [13]. Соответствующим решением уравнений (9) является векторное поле Y с компонентами

$$Y_j = 0, \quad Y_{n+j} = -p_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Это решение определено с точностью до сдвигов $Y \rightarrow Y + \delta Y$ таких, что $\mathcal{L}_{\delta Y} P = 0$, например таких:

$$\delta Y_j = -\frac{q_j^2}{2}, \quad \delta Y_{n+j} = p_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как переменные разделения в методе Якоби являются каноническими переменными, удовлетворяющими разделенным уравнениям

$$\Phi(q_j, p_j, H_1, \dots, H_n) = 0,$$

любые функции $f_j(q_j, p_j)$ от двух переменных разделения (q_j, p_j) также являются переменными разделения. В силу этого отвечающие произвольным функциям f_j векторные поля с компонентами

$$Y_j^{(f)} = 0, \quad Y_{n+j}^{(f)} = f_j(q_j, p_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

удовлетворяют уравнениям (9). Следовательно, система уравнений (9) имеет априори бесконечное число решений [13], и это представляет собой одну из основных сложностей применения данного метода построения переменных разделения для конкретных интегрируемых систем.

В силу этого встает вопрос о выборе векторных полей Y специального вида, который позволит сузить область поиска решений уравнений (9). Например, мы можем ввести коэффициент пропорциональности между исходным полем X и полем Y ,

$$Y = AX = AP dH, \quad (10)$$

и задавать поле Y , фиксируя свойства тензорного поля второго ранга A [14].

Например, пусть $M = T^*Q$ – кокасательное расслоение риманова многообразия Q и $z = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Зададим тензорное поле

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix},$$

где $L: TQ \rightarrow TQ$ – конформный тензор Киллинга с нулевым кручением Нийенхейса и функционально независимыми собственными значениями на конфигурационном пространстве Q . Это тензорное поле задает деформации канонических скобок типа Туриэля,

$$P' = (d\alpha')^{-1}, \quad \alpha' = \sum_{i,j=1}^n L_j^i p_i dq_j,$$

которые описывают бигамильтонову структуру интегрируемых систем, допускающих разделение переменных в ортогональных криволинейных координатах на римановых многообразиях. В последнем выражении α' – деформация 1-формы Лиувилля $\alpha = \sum p_i dq_i$ [15]. Возможные обобщения тензорных полей A вида

$$A = \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$$

обсуждаются в работах [3], [4].

В настоящей работе мы используем описание поля Y вида (10). Однако мы не будем выписывать тензорное поле A в явном виде и ограничимся лишь тем фактом, что если функция Гамильтона имеет вид суммы кинетической и потенциальной энергии, $H = T + V$, то и векторное поле Y иногда можно представить в виде суммы $Y = Y_T + Y_V$ взаимосвязанных векторных полей, отвечающих кинетическому и потенциальному слагаемым в гамильтониане. Более того, если потенциал V представим в виде суммы различных слагаемых, как в (2) и (3), $V = k_1 V_1 + k_2 V_2$, то и векторное поле Y_V иногда может быть представлено в виде суммы:

$$Y_V = k_1 Y_1 + k_2 Y_2.$$

Такой подход дает возможность “уточнить” структуру поля Y , если для недеформированного случая структура поля уже известна. Более того, эту процедуру можно применять итеративно при усложнении структуры гамильтониана. Так как для рассматриваемых систем при $c = d = e = \lambda = 0$ поле Y известно [9], [4], решение уравнений (9) для обобщенного волчка Ковалевской и обобщенной системы Чаплыгина сводится к нахождению дополнительных слагаемых в выражении для поля Y , которые отвечают дополнительным слагаемым Яхьи в гамильтонианах (2) и (3).

2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Чтобы перейти от исходного пуассонова многообразия $M = e^*(3)$ к симплектическому многообразию $M = T^*S^2$, мы используем сферические координаты и соответствующие им импульсы

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \phi \sin \theta, & J_1 &= p_\phi \frac{\sin \phi \cos \theta}{\sin \theta} - p_\theta \cos \phi, \\ x_2 &= \cos \phi \sin \theta, & J_2 &= p_\phi \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \theta} + p_\theta \sin \phi, \\ x_3 &= \cos \theta, & J_3 &= -p_\phi \end{aligned}$$

такие, что

$$\{\phi, p_\phi\} = \{\theta, p_\theta\} = 1, \quad \{\phi, \theta\} = \{p_\phi, p_\theta\} = \{\phi, p_\theta\} = \{\theta, p_\phi\} = 0. \quad (11)$$

В этом случае $C_1 = (x, x) = 1$, $C_2 = (x, J) = 0$, и стандартный канонический бивектор Пуассона

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

обратим, что необходимо для вычисления оператора рекурсии $N = P'P^{-1}$ и его собственных значений, которые и являются искомыми переменными разделения.

2.1. Обобщенная система Ковалевской. Решая уравнения (9) с помощью квадратичного по импульсам p_ϕ и p_θ анзаца для компонент векторного поля Y , мы получим, что при $\lambda = 0$ интегралы движения H_1 и H_2 , заданные соответственно в (2) и (4), находятся в инволюции относительно скобок Пуассона, являющихся тривиальными деформациями канонических скобок Пуассона: $\{H_1, H_2\}' = 0$. Соответствующее векторное поле Y из соотношения (7) представимо в виде прямой суммы кинетического и потенциального слагаемых,

$$Y = \begin{pmatrix} Y_T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_T \\ Y_V \end{pmatrix},$$

где

$$Y_T = \begin{pmatrix} p_\phi p_\theta \left(\frac{1}{\cos \theta} + \ln \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \\ \frac{p_\phi^2}{2} \ln \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{p_\theta^2}{2 \cos \theta} \end{pmatrix}$$

и каждой константе взаимодействия также отвечает свое слагаемое:

$$Y_V = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} p_\phi \sin \phi + p_\theta \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ -p_\phi \cos \phi \operatorname{ctg} \theta - p_\theta \sin \phi \end{pmatrix} - d \frac{p_\theta}{\cos^2 \phi} \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \theta} \\ -\frac{1}{2 \sin \theta} \end{pmatrix} + e \frac{p_\theta}{\cos^2 \phi} \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \phi - 2}{\cos \phi \cos \theta} \\ \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \end{pmatrix}.$$

Выпишем в явном виде деформации канонических скобок Пуассона (11) в общем случае:

$$\begin{aligned} \{\phi, \theta\}' &= \frac{p_\phi}{\cos \theta}, \\ \{\phi, p_\phi\}' &= -\frac{a \sin \phi}{2}, \\ \{\phi, p_\theta\}' &= \frac{a \cos \phi \cos \theta}{2 \sin \theta} - \frac{p_\phi p_\theta}{\cos^2 \theta \sin \theta} - \frac{\sqrt{\lambda} p_\phi (\cos^2 \theta - 2)}{\cos^3 \theta \sin \theta}, \\ \{\theta, p_\phi\}' &= \frac{a \cos \phi \sin \theta}{2 \cos \theta} + \frac{2d \sin \phi - e \cos^2 \phi + 2e}{2 \cos^3 \phi \cos \theta}, \\ \{\theta, p_\theta\}' &= \frac{a \sin \phi}{2} - \frac{p_\phi^2}{2 \sin \theta} - \frac{p_\theta^2 \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} - \frac{d + e \sin \phi}{2 \sin \theta \cos^2 \phi} + \frac{\sqrt{\lambda} p_\theta \sin \theta}{\cos^3 \theta} - \frac{\lambda \sin \theta}{2 \cos^4 \theta}, \end{aligned}$$

$$\{p_\phi, p_\theta\}' = \frac{a}{2} \left(\frac{p_\phi \sin \phi \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{p_\theta \cos \phi \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \frac{p_\theta (2d \sin \phi - e \cos^2 \phi + 2e)}{2 \sin \theta \cos^2 \theta \cos^3 \phi} - \\ - \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos^3 \theta} \left(a \cos \phi \sin^2 \theta - \frac{(\cos^2 \theta - 2)(2d \sin \phi - e \cos^2 \phi + 2e)}{2 \sin \theta \cos^3 \phi} \right).$$

Корни характеристического полинома $\det(N - \mu I) = B^2(\mu)$, который при $\lambda = 0$ задается формулой

$$B(\mu) = \mu^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(J_1^2 + J_2^2)}{x_3^2} + \frac{ex_1 + d\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_2^2} \right) \mu - \\ - \frac{a(ax_3^2 + 2x_1J_1^2 - 2x_1J_2^2 + 4x_2J_1J_2)}{2x_3^2} - \frac{a(dx_1 + e\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{x_2^2} = \\ = (\mu - q_1)(\mu - q_2), \quad (12)$$

являются переменными разделения. Областью определения координат $q_{1,2}$ является интервал $q_1 > a > q_2$ аналогично стандартным эллиптическим координатам на сфере (см. работу [9]). Если ввести полином

$$A(\mu) = \frac{(\mu - q_1)p_2(q_2^2 - a^2)}{q_2 - q_1} + \frac{(\mu - q_2)p_1(q_1^2 - b^2)}{q_1 - q_2} = -\frac{x_1J_2 - x_2J_1}{x_3}\mu - \frac{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}J_2}{x_3} = \\ = -\mu p_\theta \operatorname{tg} \theta - ap_\phi \cos \phi - ap_\theta \sin \phi \operatorname{tg} \theta$$

такой, что при любых ν и μ

$$\{B(\nu), A(\mu)\} = \frac{1}{\mu - \nu} ((\mu^2 - b^2)B(\nu) - (\nu^2 - b^2)B(\mu)), \quad \{A(\nu), A(\mu)\} = 0,$$

то переменные

$$p_j = \frac{1}{q_j^2 - b^2} A(\mu) \Big|_{\mu=q_j}, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

являются канонически сопряженными импульсами к координатам $q_{1,2}$:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_1, q_2\} = \{p_1, p_2\} = 0.$$

Исходные переменные выражаются через $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ следующим образом: координаты задаются как

$$x_1 = \frac{(a^2 - q_1^2)(a^2 - q_1q_2)p_1^2}{a(q_2 - q_1)^2} - \frac{2(a^2 - q_2^2)(a^2 - q_1^2)p_1p_2}{a(q_2 - q_1)^2} + \\ + \frac{(a^2 - q_2^2)(a^2 - q_1q_2)p_2^2}{a(q_2 - q_1)^2} - \frac{a(d(q_1q_2 + a^2) - ae(q_1 + q_2))}{(a^2 - q_1^2)(q_2^2 - a^2)}, \quad (14) \\ x_2 = \frac{1}{a(q_2 - q_1)^2} \sqrt{\frac{z_1z_2}{(a^2 - q_1^2)(q_2^2 - a^2)}}, \\ x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2},$$

где

$$z_1 = ((a - q_1)p_1 + (q_2 - a)p_2)^2(a + q_2)^2(a + q_1)^2 + a^2(q_2 - q_1)^2(d + e), \\ z_2 = ((a + q_1)p_1 - (q_2 + a)p_2)^2(a - q_2)^2(a - q_1)^2 + a^2(q_2 - q_1)^2(d - e), \quad (15)$$

а импульсы равны

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{(a^2 - q_1^2)(a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1 q_2)x_3 p_1}{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(q_2 - q_1)x_2} + \frac{(q_2^2 - a^2)(a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1 q_1)x_3 p_2}{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(q_2 - q_1)x_2}, \\ J_2 &= \frac{((a^2 - q_1^2)q_2 p_1 + (q_2^2 - a^2)q_1 p_2)x_3}{a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(q_2 - q_1)} \\ J_3 &= -\frac{x_1 J_1 + x_2 J_2}{x_3}, \end{aligned} \quad (16)$$

Переменные разделения (q_1, p_1) , (q_2, p_2) лежат на алгебраической кривой рода три с вещественными коэффициентами, которая задается уравнением $\Phi(q, p) = 0$, где

$$\begin{aligned} \Phi(q, p) &= \left(2(q^2 - a^2)p^2 + H_1 + \sqrt{H_2} + 2a\frac{da - eq}{u^2 - a^2}\right) \times \\ &\times \left(2(q^2 - a^2)p^2 + H_1 - \sqrt{H_2} + 2a\frac{da - eq}{u^2 - a^2}\right) - 4q^2 + 4cq. \end{aligned} \quad (17)$$

В общем случае при $\lambda \neq 0$ определения соответствующих переменных разделения получаются из соотношений (12), (13) путем канонического преобразования

$$p_\theta \rightarrow p_\theta + \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos \theta}.$$

Это преобразование можно непосредственно применить и к интегралам движения. Действительно, подставляя пары переменных разделения, которые получаются из выражений (12) и (13), в уравнение

$$\tilde{\Phi}(q, p) = \Phi(q, p) - 8\sqrt{\lambda}(q^2 - a^2)p = 0$$

и решая полученные алгебраические уравнения относительно $H_{1,2}$, мы имеем

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2ax_1 - \frac{2(x_2 J_1 - x_1 J_2)\sqrt{\lambda}}{x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{c}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{2C_1 - x_3^2}{x_2^2} \left(d + \frac{ex_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right).$$

Каноническое преобразование

$$J_1 = J_1 + \frac{\sqrt{\lambda}x_2}{x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad J_2 = J_2 - \frac{\sqrt{\lambda}x_1}{x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

приводит этот гамильтониан к исходному (2). Как и ранее, уравнение $\tilde{\Phi}(q, p) = 0$ определяет алгебраическую кривую рода три, которая не является гиперэллиптической, с базисом голоморфных дифференциалов

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{dq}{p((a^2 - q^2)(2(q^2 - a^2)p^2 + H_1) - 2a(ad - eq)) - \sqrt{\lambda}(a^2 - q^2)}, \\ \Omega_2 &= \frac{q dq}{p((a^2 - q^2)(2(q^2 - a^2)p^2 + H_1) - 2a(ad - eq)) - \sqrt{\lambda}(a^2 - q^2)}, \\ \Omega_3 &= \frac{(a(ad - eq) + (a^2 - q^2)^2 p^2) dq}{(a^2 - q^2)[p((a^2 - q^2)(2(q^2 - a^2)p^2 + H_1) - 2a(ad - eq)) - \sqrt{\lambda}(a^2 - q^2)]}. \end{aligned}$$

Уравнения движения для переменных разделения имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{q}_1}{p_1((a^2 - q_1^2)(2(q_1^2 - a^2)p_1^2 + H_1) - 2a(ad - eq_1)) - \sqrt{\lambda}(a^2 - q_1^2)} + \\ & + \frac{\dot{q}_2}{p_2((a^2 - q_2^2)(2(q_2^2 - a^2)p_2^2 + H_1) - 2a(ad - eq_2)) - \sqrt{\lambda}(a^2 - q_2^2)} = 0, \\ & \frac{(a(ad - eq_1) + (a^2 - q_1^2)^2 p_1^2) \dot{q}_1}{(a^2 - q_1^2)[p_1((a^2 - q_1^2)(2(q_1^2 - a^2)p_1^2 + H_1) - 2a(ad - eq_1)) - \sqrt{\lambda}(a^2 - q_1^2)]} + \\ & + \frac{(a(ad - eq_2) + (a^2 - q_2^2)^2 p_2^2) \dot{q}_2}{(a^2 - q_2^2)[p_2((a^2 - q_2^2)(2(q_2^2 - a^2)p_2^2 + H_1) - 2a(ad - eq_2)) - \sqrt{\lambda}(a^2 - q_2^2)]} = -2. \end{aligned}$$

Заметим, что и векторное поле Y , и эти уравнения движения не зависят явно от константы взаимодействия c .

Квадратуры в интегральной форме

$$\int_{q_0}^{q_1} \Omega_1 + \int_{q_0}^{q_2} \Omega_1 = \beta_1, \quad \int_{q_0}^{q_1} \Omega_3 + \int_{q_0}^{q_2} \Omega_3 = -2t + \beta_2 \quad (18)$$

представляют собой отображение Абеля–Якоби на некотором двумерном подмногообразии якобиана алгебраической кривой рода три, которое в общем случае может быть абелевым или неабелевым подмногообразием [16]–[18]. Тем самым мы получили переменные разделения и разделенные уравнения для интегрируемой деформации Яхьи [1] волчка Ковалевской.

2.2. Обобщенная система Чаплыгина. Решая уравнения (9) с помощью квадратичного по импульсам p_ϕ и p_θ анзаца для компонент векторного поля Y , мы получаем, что при $c = 0$ интегралы движения H_1 и H_2 , заданные соответственно в (3) и (5), находятся в инволюции относительно скобок Пуассона, являющихся тривиальными деформациями канонических скобок Пуассона: $\{H_1, H_2\}' = 0$. Соответствующее векторное поле Y из соотношения (7) представимо в виде прямой суммы кинетического и потенциального слагаемых,

$$Y = \begin{pmatrix} Y_T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_T \\ Y_V \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где

$$Y_T = \begin{pmatrix} -\frac{2p_\phi p_\theta \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\ -p_\phi^2 \operatorname{ctg} \theta + p_\theta^2 \operatorname{tg} \theta \end{pmatrix}$$

и каждой константе взаимодействия также отвечает свое слагаемое:

$$Y_V = b \begin{pmatrix} p_\phi \cos 2\phi + p_\theta \sin 2\phi \operatorname{tg} \theta \\ p_\phi \sin 2\phi \operatorname{ctg} \theta - p_\theta \cos 2\phi \end{pmatrix} - d \frac{p_\theta}{\sin^2 \phi} \begin{pmatrix} \frac{2 \operatorname{ctg} \phi}{\sin 2\theta} \\ \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix} + e \frac{p_\theta}{\cos^2 \phi} \begin{pmatrix} \frac{2 \operatorname{tg} \phi}{\sin 2\theta} \\ -\frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

В общем случае при $c \neq 0$ деформации канонических скобок Пуассона (11) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \{\phi, \theta\}' &= \frac{p_\phi}{\cos \theta \sin \theta}, \\
 \{\phi, p_\phi\}' &= -2b(\cos^2 \phi - 2), \\
 \{\phi, p_\theta\}' &= -\frac{p_\phi p_\theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} - \frac{b \sin 2\phi \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{2\sqrt{c} p_\phi (\cos^2 \theta - 2)}{\sin \theta \cos^5 \theta}, \\
 \{\theta, p_\phi\}' &= -\frac{b \sin 2\phi \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \left(d \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} - e \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} \right), \\
 \{\theta, p_\theta\}' &= -\frac{p_\theta^2}{\cos^2 \theta} + 2b(\cos^2 \phi + 1) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(p_\phi^2 - \frac{d}{\sin^2 \phi} - \frac{e}{\cos^2 \phi} \right) + \\
 &\quad + \frac{2\sqrt{c} p_\theta \sin \theta}{\cos^5 \theta} - \frac{c \sin^2 \theta}{\cos^8 \theta}, \\
 \{p_\phi, p_\theta\}' &= b \left(\frac{2p_\phi \cos 2\phi \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{p_\theta \sin 2\phi \cos 2\theta}{\cos^2 \theta} \right) + \frac{p_\theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \left(d \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} - e \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} \right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{c}}{\cos^5 \theta} \left(4b \sin 2\phi \sin^3 \theta + \frac{2(\cos^2 \theta - 2)}{\sin \theta} \left(d \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} - e \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Если $c = 0$, то вещественные координаты разделения $q_{1,2}$ являются корнями характеристического полинома оператора рекурсии $\det(N - \mu I) = B^2(\mu)$, где

$$\begin{aligned}
 B(\mu) &= \mu^2 - \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{x_3^2} - \frac{d}{x_1^2} - \frac{e}{x_2^2} \right) \mu + \frac{b(J_1^2 - J_2^2)}{x_3^2} + \left(\frac{d}{x_1^2} - \frac{e}{x_2^2} \right) b - b^2 = \\
 &= (\mu - q_1)(\mu - q_2).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Областью определения координат $q_{1,2}$ является интервал $q_1 > b > q_2$ аналогично стандартным эллиптическим координатам на сфере. В этом случае вспомогательный полином, определяющий сопряженные моменты, записывается как

$$\begin{aligned}
 A(\mu) &= \left(\frac{x_2 J_1 - x_1 J_2}{x_3} \right) \frac{\mu}{2} - \frac{b}{2} \left(\frac{x_2 J_1 + x_1 J_2}{x_3} \right) = \\
 &= -\frac{\mu}{2} p_\theta \operatorname{tg} \theta - \frac{b}{2} (p_\phi \sin 2\phi - p_\theta \cos 2\phi \operatorname{tg} \theta),
 \end{aligned} \tag{21}$$

и мы имеем

$$p_j = \frac{1}{q_j^2 - b^2} A(\mu) \Big|_{\mu=q_j}, \quad j = 1, 2.$$

Исходные переменные выражаются через переменные разделения следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sqrt{\frac{2(q_2 - b)(b - q_1)(p_1(q_1 + b) - p_2(q_2 + b))^2}{b(q_2 - q_1)^2} - \frac{2bd}{(q_2 - b)(b - q_1)}}, \\
 x_2 &= \sqrt{\frac{2(q_2 + b)(b + q_1)(p_1(q_1 - b) - p_2(q_2 - b))^2}{b(q_2 - q_1)^2} - \frac{2be}{(q_2 + b)(b + q_1)}}, \\
 x_3 &= \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
J_1 &= x_3 \sqrt{\frac{(b+q_1)(q_2+b)}{2b} + \frac{e}{x_2^2}}, \\
J_2 &= x_3 \sqrt{\frac{(b-q_1)(q_2-b)}{2b} + \frac{d}{x_1^2}}, \\
J_3 &= -\frac{x_1 J_1 + x_2 J_2}{x_3}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в гамильтонианы H_1 (3) и H_2 (5), мы получаем разделенные уравнения

$$\Phi(q_j, p_j) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi(q, p) &= \left(8(q^2 - b^2)p^2 - 2q + H_1 - \sqrt{H_2} - \frac{4b(q(d-e) + b(d+e))}{q^2 - b^2} \right) \times \\
&\times \left(8(q^2 - b^2)p^2 - 2q + H_1 + \sqrt{H_2} - \frac{4b(q(d-e) + b(d+e))}{q^2 - b^2} \right) + 4\lambda q.
\end{aligned}$$

Уравнение $\Phi(q, p) = 0$ задает гиперэллиптическую кривую рода два, а при $\lambda = 0$ — прямое произведение двух эллиптических кривых. Разделенные уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{q}_1}{p_1(4db(b+q_1) + 4eb(b-q_1) + (b^2 - q_1^2)(8(q_1^2 - b^2)p_1^2 - 2q_1 + H_1))} + \\
&+ \frac{\dot{q}_2}{p_2(4db(b+q_2) + 4eb(b-q_2) + (b^2 - q_2^2)(8(q_2^2 - b^2)p_2^2 - 2q_2 + H_1))} = 0, \\
&\frac{(4(b^2 - q_1^2)p_1^2 + q_1 - 2bd/(b-q_1) - 2be/(b+q_1))\dot{q}_1}{p_1(4db(b+q_1) + 4eb(b-q_1) + (b^2 - q_1^2)(8(q_1^2 - b^2)p_1^2 - 2q_1 + H_1))} + \\
&+ \frac{(4(b^2 - q_2^2)p_2^2 + q_2 - 2bd/(b-q_2) - 2be/(b+q_2))\dot{q}_2}{p_2(4db(b+q_2) + 4eb(b-q_2) + (b^2 - q_2^2)(8(q_2^2 - b^2)p_2^2 - 2q_2 + H_1))} = -8
\end{aligned}$$

задают отображение Абеля на якобиане кривой, а не на страте якобиана. Заметим, что и векторное поле Y , заданное формулой (19), и эти разделенные уравнения не зависят явно от параметра λ .

Теперь перейдем к рассмотрению случая $c \neq 0$. В этом случае переменные разделения отличаются от тех, которые определяются соотношениями (20) и (21), каноническим преобразованием

$$p_\theta \rightarrow p_\theta + \frac{\sqrt{c} \sin \theta}{\cos^3 \theta}.$$

Это преобразование можно непосредственно применить и к интегралам движения. Действительно, подставив переменные разделения, которые определяются соотношениями (20) и (21), в уравнение

$$\tilde{\Phi}(q, p) = \Phi(q, p) - 16\sqrt{c}(q^2 - b^2)p$$

и решив полученные алгебраические уравнения относительно интегралов движения, мы получаем гамильтониан

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2b(x_1^2 - x_2^2) + \frac{\lambda C_1}{x_3^2} + \frac{2(x_2 J_1 - x_1 J_2)\sqrt{c}}{x_3^3} - (2C_1 - x_3^2)\left(\frac{d}{x_1^2} + \frac{e}{x_2^2}\right),$$

который после канонического преобразования

$$J_1 = J_1 - \frac{\sqrt{c}x_2}{x_3^3}, \quad J_1 = J_2 + \frac{\sqrt{c}x_1}{x_3^3}$$

совпадает с исходным (3). Уравнение $\tilde{\Phi}(q, p) = 0$ задает алгебраическую кривую рода три. Соответствующие квадратуры в интегральной форме

$$\int_{q_0}^{q_1} \Omega_1 + \int_{q_0}^{q_2} \Omega_1 = \beta_1, \quad \int_{q_0}^{q_1} \Omega_2 + 2\Omega_3 + \int_{q_0}^{q_2} \Omega_2 + 2\Omega_3 = -4t + \beta_2,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{dq}{2p(4db(b+q) + 4eb(b-q) + (b^2 - q^2)(8(q^2 - b^2)p^2 - 2q + H_1)) - \sqrt{c}(b^2 - q^2)}, \\ \Omega_2 &= \frac{q dq}{2p(4db(b+q) + 4eb(b-q) + (b^2 - q^2)(8(q^2 - b^2)p^2 - 2q + H_1)) - \sqrt{c}(b^2 - q^2)}, \\ \Omega_3 &= \frac{(2(b^2 - q^2)p^2 - bd/(b-q) - be/(b+u))dq}{2p(4db(b+q) + 4eb(b-q) + (b^2 - q^2)(8(q^2 - b^2)p^2 - 2q + H_1)) - \sqrt{c}(b^2 - q^2)}, \end{aligned}$$

представляют собой отображение Абеля–Якоби на некотором двумерном подмногообразии якобиана алгебраической кривой рода три. Тем самым мы получили переменные разделения и разделенные уравнения для интегрируемой деформации Яхьи [1] системы Чаплыгина.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для обобщенного волчка Ковалевской и для обобщенной системы Чаплыгина мы получили переменные разделения и разделенные уравнения, решения которых связаны с отображением Абеля–Якоби на двумерных подмногообразиях якобиана алгебраической кривой рода три.

Так как переменные разделения являются каноническими переменными на одном и том же четырехмерном симплектическом многообразии, существует каноническое преобразование, которое переводит одни переменные в другие. Например, подставляя выражения (14)–(16) для исходных переменных x и J в определение переменных Ковалевской $s_{1,2}$ [5], мы получим некоторые функции от q и p ,

$$s_1 = f_1(q_1, p_1), \quad s_2 = f_2(q_2, p_2),$$

которые задают соответствующее каноническое преобразование в явном виде. Однако данное каноническое преобразование переводит разделенные уравнения в разделенные уравнения, только если все параметры, входящие в формулы (14)–(16), кроме a , равны нулю. В этом случае каноническая замена переменных

$$q = a \sin v, \quad p = \frac{u}{a \cos v} \quad \text{при} \quad \lambda = e^{2iv}$$

($\{q, p\} = \{v, u\} = 1$) приводит уравнение $\Phi(q, p) = 0$, где функция Φ задана в (17), к уравнению

$$a^2 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) = -4u^4 + 4H_1 u^2 + H_2 - H_1^2 + 2a^2,$$

которое определяет алгебраическую кривую B_1 рода 3, совпадающую с кривой (10) в работе [19]. Напомним, что уравнение, задающее эту кривую, отличается последним коэффициентом от уравнения

$$a^2 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) = -4u^4 + 4H_1 u^2 - H_2 - 2a^2 \quad (22)$$

спектральной кривой B_2 для (2×2) -матрицы Лакса [20] волчка Ковалевской. Эта матрица приведена в определении (8) работы [19]. Обе кривые B_1 и B_2 инвариантны относительно инволюции $\sigma: (\lambda, u) \rightarrow (\lambda, -u)$, и подстановка $u^2 = x$ приводит их к эллиптическим кривым E_1 и E_2 (см. определение биэллиптических кривых в работе [18]).

Кривые B_1 и B_2 связаны с кривой Ковалевской C_1 и кривой Бобенко–Реймана–Семенова–Тян–Шанского C_2 соответственно (см. детали в работе [19]). Это позволяет свести решение квадратур (18) к решению проблемы Абеля–Якоби на якобиане кривой рода два. В нашем случае это будет кривая Ковалевской C_1 , в отличие от комплексных переменных разделения [21], лежащих на спектральной кривой B_2 (22), которая приводится к спектральной кривой C_2 матрицы Лакса размера 4×4 [22].

Заметим, что критическим моментом данного подхода является существование инволюции $\sigma: (p, q) \rightarrow (p, -q)$, что позволяет построить эллиптические кривые E_1 и E_2 из кривых B_1 и B_2 рода три и доказать, что трехмерное многообразие Якоби кривой B_k рода три в этом случае содержит эллиптическую кривую E_k и двумерный примитив $\text{Prim}(B_k, \sigma)$, накрываемый двумерным якобианом кривой C_k (см. работу [16] и современное изложение в [18]). Заметим, что инволюция σ и эллиптическая кривая E_1 также существуют, если $a \neq 0$ и $d \neq 0$.

Таким образом, нахождение переменных разделения, которые лежат на кривых рода 3, является только первым шагом на пути к построению решений уравнений движения. На следующем этапе требуется тщательное изучение процедуры обращения отображения Абеля–Якоби и взаимосвязей между различными кривыми (разделенными уравнениями) и различными переменными разделения.

Заметим, что, несмотря на то что различные известные переменные разделения для волчка Ковалевской связаны друг с другом каноническими преобразованиями, эти переменные разделения являются разными с точки зрения теории возмущений. Напомним, что переменные Ковалевской представляют собой переменные разделения и при $C_2 \neq 0$ [5]; комплексные переменные разделения, введенные в работе [21], позволяют рассмотреть гиростат Ковалевской–Горячева–Чаплыгина, а изучаемые в настоящей работе переменные позволяют добавить к гамильтониану Ковалевской слагаемые Яхьи.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00061).

Список литературы

- [1] H. M. Yehia, *J. Phys. A*, **39**:20 (2006), 5807–5824.
- [2] H. M. Yehia, A. A. Elmandouh, *J. Phys. A*, **46**:14 (2013), 142001, 8 pp., arXiv: 1302.7057.
- [3] A. V. Tsiganov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **18**:2 (2011), 245–268.
- [4] A. V. Tsiganov, *J. Phys. A*, **44**:10 (2011), 105203, 21 pp., arXiv: 1010.3492.
- [5] S. Kowalewski, *Acta Math.*, **12**:1 (1889), 177–232.
- [6] С. А. Чаплыгин, *Труды физич. отд. имп. общ-ва любит. естеств.*, **11**:2 (1903), 7–10.
- [7] Д. Н. Горячев, *Вариавские университетские известия*, **3** (1916), 1–13.
- [8] F. Magri, F. Magri, P. Casati, G. Falqui, M. Pedroni, “Eight lectures on integrable systems”, *Integrability of Nonlinear Systems* (India, 8–26 January, 1996), Lecture Notes in Physics, **495**, eds. Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani, Springer, Berlin, 1997, 256–296.
- [9] A. V. Tsiganov, V. A. Khudobakhshov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16**:3–4 (2011), 396–414.
- [10] A. V. Tsiganov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **15**:6 (2010), 659–669.
- [11] L. Degiovanni, F. Magri, V. Sciacca, *Commun. Math. Phys.*, **253**:1 (2005), 1–24, arXiv: nlin/0103052.
- [12] A. Lichnerowicz, *J. Differential Geom.*, **12**:2 (1997), 253–300.
- [13] A. V. Tsiganov, *J. Phys. A*, **40**:24 (2007), 6395–6406.
- [14] A. V. Tsiganov, *SIGMA*, **9** (2013), 015, 13 pp.
- [15] A. Ibort, F. Magri, G. Marmo, *J. Geom. Phys.*, **33**:3–4 (2000), 210–228.
- [16] M. Audin, *Spinning Tops. A Course on Integrable Systems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **51**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [17] H. W. Braden, V. Z. Enolski, Yu. N. Fedorov, *Dynamics on strata of trigonal Jacobians and some integrable problems of rigid body motion*, arXiv: 1210.3596.
- [18] T. Shaska, F. Thompson, *Bielliptic curves of genus 3 in the hyperelliptic moduli*, arXiv: 1305.4501.
- [19] D. Markushevich, *J. Phys. A*, **34**:11 (2001), 2125–2135.
- [20] V. B. Kuznetsov, A. V. Tsiganov, *J. Phys. A*, **22**:3 (1989), L73–L79.
- [21] A. V. Tsiganov, *J. Phys. A*, **35**:22 (2002), L309–L318.
- [22] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Commun. Math. Phys.*, **122**:2 (1989), 321–354.

Поступила в редакцию 23.05.2013