Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Ефимов, Упругое рассеяние и функциональный интеграл, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 3, 367–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:43:52

© 2014 г.

Г. В. Ефимов*

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ

В рамках нерелятивистской квантовой механики из решения стационарного уравнения Шредингера выведено представление амплитуды упругого рассеяния в форме функционального интеграла. Для оценки функционального интеграла предложен метод, названный унитарным приближением. Получены длина и сечение рассеяния для прямоугольного потенциала, сингулярного потенциала отталкивания и потенциала Юкавы. Проведено сравнение с точными результатами.

Ключевые слова: квантовая механика, упругое рассеяние, функциональный интеграл.

DOI: 10.4213/tmf8557

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе ставится задача, во-первых, получить амплитуду упругого рассеяния в нерелятивистской квантовой механике в форме функционального интеграла исходя из стационарного уравнения Шредингера, во-вторых, найти эффективный и достаточно простой метод оценки этого функционального интеграла и тем самым поведение сечения рассеяния в случае больших констант связи, когда приближение Борна не может быть использовано.

Всегда приятно иметь решение какого-либо дифференциального уравнения в замкнутой форме, позволяющей как исследовать общие свойства решения, так и проводить численные расчеты. В квантовой механике таким замкнутым представлением является решение нестационарного уравнения Шредингера в форме функционального интеграла, или интеграла по путям. В этом направлении проделана грандиозная работа и написано очень много монографий и учебников (см., например, книги [1]–[4] и др.). Однако в квантовой механике имеется ряд важнейших задач при фиксированной энергии, описываемых стационарным уравнением Шредингера, к решению которых нельзя непосредственно применить представление Фейнмана. К числу таких задач, в частности, относится вычисление амплитуд упругих

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: efimovg@theor.jinr.ru

процессов. Был разработан ряд подходов [5]–[9], в которых для расчета амплитуд рассеяния используется S -матрица, полученная из представления решения нестационарного уравнения Шредингера в форме интеграла Фейнмана по путям.

Напомним, в чем состоит различие в постановке задачи рассеяния во временном и стационарном формализмах квантовой механики в случае потенциального рассеяния, когда потенциал быстро убывает.

В стационарной картине потенциал быстро убывает, поэтому его влияние существенно только в некоторой ограниченной области вокруг местоположения источника потенциала. Вне этой области частицы вполне могут рассматриваться как свободные. Рассеяние в стационарной картине выглядит так: на больших расстояниях вне области действия потенциала имеется стационарный поток свободных частиц в виде плоской (до рассеяния) и сферической (после рассеяния) волн. Подчеркнем, эти асимптотические состояния описывают свободные частицы вне области действия потенциала. Это, очевидно, физическая картина.

В нестационарной картине считается, что в бесконечном прошлом (при $t \rightarrow -\infty$) и бесконечном будущем (при $t \rightarrow \infty$) потенциал отсутствует, имеющиеся частицы являются свободными и описываются плоскими волнами во всем пространстве. Потенциал адиабатически “включается” в некотором прошлом и “выключается” в некотором будущем. Для математического описания этой ситуации вводится множитель $e^{-\epsilon|t|}$, на который умножается потенциал. Это называется *гипотезой включения взаимодействия*. Данная гипотеза лежит в основе теории рассеяния в квантовой теории поля. Физически эта картина некорректна, поскольку взаимодействие нельзя “выключить”. Кроме того, в квантовой теории поля не существует такой области пространства-времени, где взаимодействие исчезает. Тем не менее оказалось, что этот подход хорошо работает. Математически он требует аккуратного определения способа перехода к пределу $\epsilon \rightarrow 0$, для чего необходимо задать определенные правила и ввести дополнительные так называемые контрчлены.

В рамках нестационарного подхода (см. работы [5]–[9], где также приведены ссылки на предыдущие исследования) метод функционального интегрирования применялся к теории потенциального рассеяния в нерелятивистской квантовой механике с целью получить представление для амплитуды рассеяния в форме интеграла по путям. Рассуждения основаны на нестационарной картине рассеяния с учетом гипотезы включения взаимодействия. Рассматривается временное уравнение Шредингера, записывается представление для S -матрицы как амплитуды перехода от состояний при $t = -\infty$ к состояниям при $t = \infty$, а затем выделяется T -матрица, из которой, в свою очередь, надо выделить дельта-функцию, отвечающую за сохранение энергии в начальном и конечном состояниях.

Мы считаем, что в квантовой механике нахождение амплитуды рассеяния в нестационарной картине приводит к излишним громоздким вычислениям и не является лучшим способом вычисления амплитуды рассеяния. В настоящей работе показано, как можно получить искомое представление непосредственно из стационарного уравнения Шредингера. Представление амплитуды упругого рассеяния в замкнутой форме функционального интеграла имеет ценность само по себе. Так, представление Фейнмана функции Грина в квантовой механике в форме интеграла по путям сыграло и играет большую роль в понимании квантовой физики, хотя явно вычис-

лить предложенный интеграл оказалось возможным в весьма ограниченном числе случаев.

После того как искомое представление получено, возникает проблема вычисления полученного интеграла. Дело в том, что точно вычисляется только гауссов функциональный интеграл, в то время как в большинстве физически интересных случаев интегралы не гауссового типа. Все известные методы вычисления так или иначе стремятся свести исследуемый интеграл к гауссовому.

Таким образом, задача состоит в следующем.

1. Получить представление для амплитуды рассеяния в форме функционального интеграла исходя из стационарного уравнения Шредингера.

2. Разработать сравнительно простой метод оценки полученного функционального интеграла в тех случаях, когда невозможно применить приближение Борна, например при больших константах связи или сингулярных потенциалах отталкивания.

Наша оценка функционального интеграла основана на приближении прямолинейных путей и связана с соотношением неопределенностей, которое является одним из основных принципов, лежащих в основе квантовой механики.

Обычно (см. статьи [5], [10], [11]) приближение прямолинейных путей, или приближение эйконала используется для вычисления амплитуд рассеяния при больших импульсах и малых углах рассеяния как в квантовой механике, так и в квантовой теории поля. В обоснование приближения эйконала обычно приводятся аргументы, опирающиеся на обоснованность квазиклассического подхода. Однако возможна и другая интерпретация, основанная на соотношении неопределенностей. В квантовой механике между средней величиной области, где находится частица, и средним импульсом существует связь

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar. \quad (1)$$

В частности, это соотношение позволяет качественно и в некоторой степени количественно исследовать спектр гамильтониана. Суть этого подхода проста. Пусть в гамильтониане $H = p^2/2m + V(x)$ потенциал допускает существование связанных состояний. В этом случае, как непосредственно следует из правил квантования Бора–Зоммерфельда (см., например, книгу [12]), между средней величиной области, где находится частица, и средним импульсом существует связь

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \left(\frac{1}{2} + n \right),$$

где n – номер возбуждения. Спектр гамильтониана без труда оценивается качественно и количественно с помощью формулы

$$E_n \sim \min_{\Delta x} \left[\frac{\hbar^2 (1/2 + n)^2}{2m(\Delta x)^2} + V(\Delta x) \right].$$

В случае рассеяния, когда частицы по сути дела свободны, играет роль эффект расплывания, или уширения пакета, т. е. неопределенность координаты возрастает с ростом времени, $(\Delta x)^2 \sim \hbar t/m$. Эта оценка непосредственно следует из соотношения неопределенностей (1), если положить $\Delta p = m\Delta v = m\Delta x/t$. В таком случае

движение свободной квантовой частицы можно представить как прямолинейное движение плюс квантовые флуктуации, растущие с увеличением времени. Ниже будет показано, как можно использовать это свойство квантового движения при оценке функционального интеграла, определяющего амплитуду рассеяния.

Приближение прямолинейных путей описывает амплитуду при больших импульсах. Как получить поведение амплитуды при малых энергиях? Идея проста и основана на предположении, что в случае потенциалов отталкивания точная амплитуда является гладкой функцией во всей области изменения импульса. Пусть $f(k)$ – точная амплитуда рассеяния вперед, причем в нуле она конечна и равна длине рассеяния $a = f(0)$. Приближение прямолинейных путей дает поведение этой амплитуды при $k \rightarrow \infty$, т.е. $f(k) \rightarrow f_{\text{eik}}(-ik)$, где $f_{\text{eik}}(-ik)$ известна. Наше предположение состоит в том, что

$$f(k) \approx f_{\text{eik}}(k_c - ik).$$

Постоянный параметр k_c определяется из условия унитарности при нулевой энергии:

$$\sigma(0) = 4\pi \left. \frac{\text{Im } f_{\text{eik}}(k_c - ik)}{k} \right|_{k=0} = 4\pi f_{\text{eik}}^2(k_c).$$

Сечение рассеяния в этом приближении равно

$$\sigma(k) \approx 4\pi \frac{\text{Im } f_{\text{eik}}(k_c - ik)}{k}.$$

Итак, наша задача состоит в том, чтобы, во-первых, получить представление амплитуды рассеяния в форме функционального интеграла исходя из стационарного уравнения Шредингера и, во-вторых, предложить простую формулу для качественной и частично количественной оценки длины и сечения рассеяния в случае положительных потенциалов отталкивания с большими константами связи, когда нельзя использовать приближение Борна. Мы будем опираться на результат, полученный в работе [13], где показано, как можно представить решение стационарного уравнения Шредингера в форме функционального интеграла.

2. АМПЛИТУДА УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Задача рассеяния в стационарной квантовой механике ставится следующим образом. Предположим, что потенциал $V(r)$ достаточно быстро убывает на больших расстояниях и может быть представлен в форме

$$V(\mathbf{x}) = gU\left(\frac{r}{R}\right), \quad |\mathbf{x}| = r,$$

где g – константа связи, имеющая размерность энергии, R – эффективный размер области, где потенциал отличен от нуля, а безразмерная функция $U(s)$ имеет порядок единицы при $s \sim 1$ и быстро убывает при $s > 1$. Требуется найти решение стационарного уравнения Шредингера

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(\mathbf{x}) - \frac{k^2}{2m}\right) \Psi(\mathbf{x}) = 0$$

для непрерывного спектра, удовлетворяющее следующим асимптотическим краевым условиям при $r \rightarrow \infty$:

$$\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

где $f(k, \theta)$ – искомая амплитуда рассеяния.

Будем искать решение в виде

$$\Psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \Phi(\mathbf{x}).$$

Тогда функция $\Phi(\mathbf{x})$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\mathbf{x}^2} + V(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{k}^2}{2m}\right) \Phi(\mathbf{x}) = -V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

решение которого можно записать как

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\mathbf{x}^2} + V(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - i0\right)^{-1} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Представим это решение в виде функционального интеграла, проводя стандартные преобразования (см. приложение и работы [13]–[15]):

$$\Phi(\mathbf{x}) = -i \int d\mathbf{y} V(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}} I(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{k}),$$

где

$$\begin{aligned} I(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{k}) &= i \int_0^\infty dt \exp\left\{-i\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\mathbf{x}^2} + V(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - i0\right]\right\} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \\ &= \int_0^\infty dt \frac{m^{3/2}}{(2\pi i t)^{3/2}} \exp\left\{\frac{i}{2} \left(\frac{t}{m} \mathbf{k}^2 + \frac{m}{t} (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2\right)\right\} \times \\ &\times \int \frac{D\xi}{C} \exp\left\{i \int_0^t d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\xi}^2(\tau) - V\left(\frac{\tau}{t} \mathbf{x} + \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \mathbf{y} - \xi(\tau)\right)\right]\right\} \end{aligned} \quad (2)$$

и $\xi(t)$ удовлетворяет краевым условиям $\xi(0) = \xi(t) = 0$. Нас интересует поведение функции $I(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{k})$ в пределе $|\mathbf{x}| = r \rightarrow \infty$. Сделаем в интеграле (2) замену переменных $t = rs$ и положим $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$, получим

$$\begin{aligned} I(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{k}) &= \frac{m^{3/2}}{\sqrt{r}} \int_0^\infty \frac{ds}{(2\pi i s)^{3/2}} \exp\left\{i \frac{r}{2} \left[\frac{s}{m} \mathbf{k}^2 + \frac{m}{s} \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{y}}{r}\right)^2\right]\right\} \times \\ &\times \int \frac{D\xi}{C} \exp\left\{i \int_0^{rs} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\xi}^2(\tau) - V\left(\frac{\tau}{s} \mathbf{n} + \left(1 - \frac{\tau}{rs}\right) \mathbf{y} - \xi(\tau)\right)\right]\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

с краевыми условиями $\xi(0) = \xi(rs) = 0$, где $rs \rightarrow \infty$.

Здесь надо сделать существенное замечание относительно краевого условия при $r \rightarrow \infty$. Квадратичная форма в мере функционального интеграла может быть записана в виде

$$\int_0^{rs} d\tau \dot{\xi}^2(\tau) = \iint_0^{rs} d\tau d\tau' \xi(\tau) D^{-1}(\tau, \tau') \xi(\tau'),$$

где

$$D^{-1}(\tau, \tau') = -\frac{d^2}{d\tau^2} \delta(\tau - \tau').$$

Функция Грина оператора D^{-1} , соответствующая нулевым краевым условиям, имеет вид

$$D(\tau, \tau') = -\frac{1}{2}|\tau - \tau'| + \frac{1}{2}(\tau + \tau') - \frac{\tau\tau'}{rs}.$$

Она связана с краевой задачей

$$-\ddot{u}(\tau) = J(\tau), \quad u(0) = u(rs) = 0,$$

где функция $J(\tau)$ достаточно быстро убывает. Решение этого уравнения при конечных r имеет вид

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \int_0^{rs} d\tau' D(\tau, \tau') J(\tau') = \\ &= \left(1 - \frac{\tau}{rs}\right) \int_0^\tau d\tau' \tau' J(\tau') + \tau \int_\tau^{rs} d\tau' \left(1 - \frac{\tau'}{rs}\right) J(\tau') \end{aligned}$$

и удовлетворяет нулевым краевым условиям. Однако при $r \rightarrow \infty$

$$u(\tau) \rightarrow \int_0^\tau d\tau' \tau' J(\tau') + \tau \int_\tau^\infty d\tau' J(\tau'),$$

следовательно,

$$u(\infty) = \int_0^\infty d\tau' \tau' J(\tau') \neq 0,$$

что соответствует функции Грина

$$D(\tau, \tau') = -\frac{1}{2}|\tau - \tau'| + \frac{1}{2}(\tau + \tau'). \quad (4)$$

Итак, в пределе $r \rightarrow \infty$ мы имеем $u(0) = 0$, но $u(\infty) \neq 0$ и, вообще говоря, $u(\infty)$ может принимать любое значение. Физически это можно понять как квантово-механический эффект расширения волнового пакета, т.е. за бесконечно большое время частица может оказаться в любой точке пространства.

При больших $r = |\mathbf{x}|$ интеграл по s в (3) вычисляется методом перевала, результат записывается как

$$I(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \rightarrow \frac{e^{ikr}}{2r} \frac{m e^{-i\mathbf{k}_f \mathbf{y}}}{2\pi i} Y(\mathbf{y}, \mathbf{k}_f), \quad \mathbf{k}_f = k\mathbf{n}.$$

Функция $Y(\mathbf{y}, \mathbf{k})$ определяется функциональным интегралом:

$$\begin{aligned} Y(\mathbf{y}, \mathbf{k}_f) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\xi(0)=\xi(rs)=0} \frac{D\xi}{C} \exp \left\{ i \int_0^{rs} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\xi}^2(\tau) - V \left(\frac{\mathbf{k}_f}{m} \tau + \mathbf{y} - \xi(\tau) \right) \right] \right\} = \\ &= \int \frac{D\xi}{C_D} \exp \left\{ \frac{im}{2} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' (\xi(\tau) D^{-1}(\tau, \tau') \xi(\tau')) - \int_0^\infty d\tau V \left(\frac{\mathbf{k}_f}{m} \tau + \mathbf{y} - \xi(\tau) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Оператору $D^{-1}(\tau, \tau')$ соответствует функция Грина $D(\tau, \tau')$, заданная в (4).

Таким образом, для амплитуды упругого рассеяния получаем представление

$$f(k, \theta) = -\frac{m}{2\pi} \int d\mathbf{y} V(y) e^{i\mathbf{q}\mathbf{y} + \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{k}_f)}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_f, \quad (5)$$

где

$$Y(\mathbf{y}, \mathbf{k}_f) = e^{\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{k}_f)} = \int \frac{D\xi}{C} \exp \left\{ i \int_0^\infty d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\xi}^2(\tau) - V \left(\frac{\mathbf{k}_f}{m} \tau + \mathbf{y} - \xi(\tau) \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Аргумент $\mathbf{k}_f \tau / m + \mathbf{y} - \xi(\tau)$ потенциала можно интерпретировать как прямолинейное движение $\mathbf{k}_f \tau / m + \mathbf{y}$ плюс всевозможные квантовые флуктуации, которые описываются функциональной переменной интегрирования $\xi(\tau)$. Заметим, что квантовые флуктуации растут с течением времени, и это явление известно как расширение волнового пакета.

Таким образом, проблема нахождения амплитуды рассеяния сводится к вычислению достаточно сложного функционального интеграла (6).

Одним из эффективных методов оценки функциональных интегралов является вариационный метод. Однако вариационный метод, основанный на неравенстве Йенсена, не может быть непосредственно использован в нашем случае, поскольку интеграл (6) является комплексным. Обобщением вариационного метода на комплексные функционалы является метод гауссового эквивалентного представления, применение которого при вычислении интеграла (6) приводит к весьма громоздким интегро-дифференциальным уравнениям. Решение этих уравнений требует немалых усилий, которые следует затратить только в том случае, когда решается конкретная задача, имеющая вполне определенный физический смысл. Поэтому мы этого метода не будем касаться, а сошлемся на работы [14], [15], где он подробно изложен. Здесь мы предлагаем метод оценок, основанный на соотношении неопределенностей, который по сути является *приближением прямолинейных путей*.

Итак, перейдем к вычислению интеграла (6).

3. ДЛИНА РАССЕЯНИЯ

Прежде всего рассмотрим длину рассеяния, которая определяется как интеграл

$$a = f(0, 0) = -\frac{m}{2\pi} \int d\mathbf{r} V(r) \int \frac{D\xi}{C} \exp \left\{ i \int_0^\infty d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\xi}^2(\tau) - V(\mathbf{r} - \xi(\nu)) \right] \right\}.$$

Этот интеграл можно представить в виде вещественного функционального интеграла при аналитическом продолжении $\tau \rightarrow -i\tau$ (повороте контура интегрирования по τ на угол $-\pi/2$):

$$a = -\frac{m}{2\pi} \int d\mathbf{r} V(r) \int \frac{D\xi}{C} \exp \left\{ - \int_0^\infty d\nu \left[\frac{m}{2} \dot{\xi}^2(\tau) - V(\mathbf{r} - \xi(\nu)) \right] \right\}.$$

Из этого представления можно извлечь одно точное следствие – ограничение на зависимость длины рассеяния от константы связи. Поскольку длина рассеяния определяется вещественным интегралом, можно воспользоваться неравенством Йенсена,

в результате получим соотношения

$$e^{\Phi(\tau)} \geq e^{\Phi_1(r)},$$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &\geq \Phi_1(r) = - \int \frac{D\boldsymbol{\xi}}{C} \exp \left\{ - \int_0^\infty d\tau \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(\tau)}{2} \right\} m \int_0^\infty d\tau V(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(\tau)) = \\ &= -2m \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}(p)}{p^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = -2m \left[\frac{1}{r} \int_0^r dy y^2 V(y) + \int_r^\infty dy y V(y) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$|a| \geq 2m \int_0^\infty dr r^2 V(r) e^{\Phi_1(r)}. \quad (7)$$

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ

Вернемся к представлению (5), (6) амплитуды упругого рассеяния. Величину амплитуды рассеяния определяют следующие размерные параметры: R – радиус действия потенциала, k – импульс рассеиваемой частицы и m – ее масса. Имеется еще один параметр – константа связи, определяющая силу потенциала. Наши оценки функционального интеграла не зависят от величины этого параметра.

Основной вклад в интеграл по $\mathbf{y}$ дает область $y \leq R$. Среднее по мере свободного движения равно

$$\langle \xi^2(\tau) \rangle = \int \frac{D\boldsymbol{\xi}}{C} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty d\tau' \frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^2(\tau') \right\} \xi^2(\tau) = i \frac{\tau \hbar}{m}.$$

Это соотношение известно как уширение волнового пакета, которое можно рассматривать как рост неопределенности в положении частицы с ростом времени: $|\xi(\tau)| \sim \sqrt{\tau \hbar / m}$. Поэтому основной вклад в функциональный интеграл дает область функциональной переменной интегрирования $|\xi(\tau)|^2 \leq \tau \hbar / m$.

В представлении (6) аргумент

$$\frac{\mathbf{k}_f}{m} \tau + \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}(\tau) = \mathbf{v}_f \tau + \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}(\tau),$$

от которого зависит потенциал, можно интерпретировать как прямолинейное движение $\mathbf{v}_f \tau + \mathbf{y}$ из точки $\mathbf{y}$ на бесконечность плюс квантовые флуктуации $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ вокруг прямолинейного пути. Поскольку $y \leq R$ и $|\mathbf{k}_f \tau / m + \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}(\tau)| \leq R$, справедливы оценки

$$\left| \frac{\mathbf{k}_f}{m} \tau \right| \sim \frac{k\tau}{2m} \leq R, \quad |\xi(\tau)| \sim \sqrt{\frac{\tau}{m}} \leq R.$$

Чтобы можно было пренебречь функцией $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ в аргументе потенциала, необходимо выполнение условия

$$\frac{k}{m} \tau \gg |\xi(\tau)|. \quad (8)$$

В интеграл по τ основной вклад дают области $k\tau/m \leq R$, а вклад от функциональной переменной ограничен неравенством

$$|\xi(\tau)| \leq \sqrt{\frac{\tau}{m}} \leq R.$$

Из этих соотношений следует, что если импульс k достаточно велик,

$$k \gg \frac{1}{R}, \quad \frac{\lambda}{R} \ll 1, \quad \text{где } \lambda = \frac{\hbar}{k} = \frac{1}{k},$$

то неравенство (8) справедливо, и можно пренебречь квантовыми флуктуациями, т. е. зависимостью от $\xi(\tau)$ в потенциале:

$$V\left(\frac{\mathbf{k}_f}{m}\tau + \mathbf{y} - \xi(\tau)\right) \approx V\left(\frac{\mathbf{k}_f}{m}\tau + \mathbf{y}\right).$$

В итоге мы получим приближение прямолинейных путей

$$e^{\Phi(\rho, z, k)} \approx \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty d\tau V\left(\frac{\mathbf{k}_f}{m}\tau + \mathbf{y}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{im}{\hbar k} \int_z^\infty ds V(\sqrt{s^2 + \rho^2})\right\}.$$

Здесь выбрана следующая система координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{k} - \mathbf{k}_f, & \mathbf{v}_f &= \frac{\mathbf{k}_f}{m} = \frac{k}{m} \mathbf{n}, & \mathbf{q}^2 &= 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \mathbf{k}_f &= (0, 0, k), & \mathbf{q} &= \left(0, k \sin \theta, 2k \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), & \mathbf{y} &= (\rho, z) = (\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, z). \end{aligned}$$

Амплитуда упругого рассеяния принимает вид

$$\begin{aligned} f_{\text{eik}}(-ik, \theta) &\approx -m \int_0^\infty d\rho \rho J_0(k\rho \sin \theta) \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty dz V(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \exp\left\{2ikz \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{im}{k} \int_z^\infty ds V(\sqrt{s^2 + \rho^2})\right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В приближении прямолинейных путей амплитуда имеет существенную особенность при $k = 0$, которая отсутствует в точной амплитуде, т. е. приближение прямолинейных путей действительно справедливо только при больших импульсах.

Заметим, что формула (9) может рассматриваться как обобщение стандартного квазиклассического приближения на все углы рассеяния, а не только малые.

Если считать, что рассеяние происходит на малые углы θ , то представление (9) переходит в хорошо известное приближение эйконала, или квазиклассическое приближение. Действительно, в пределе больших импульсов и малых углов рассеяния можно считать, что

$$k\theta \sim 1, \quad \theta \sim \frac{1}{k} \ll 1,$$

так что в представлении (9) можно положить $e^{2ikz \sin^2(\theta/2)} \approx 1$. В результате получаем хорошо известное представление квазиклассического приближения, или приближения эйконала:

$$\begin{aligned} f_{\text{eik}}(-ik, \theta) &\approx -m \int_0^\infty d\rho \rho J_0(k\rho\theta) \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty dz V(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \exp\left\{-\frac{im}{k} \int_z^\infty ds V(\sqrt{s^2 + \rho^2})\right\} = \\ &= ik \int_0^\infty d\rho \rho J_0(\rho k\theta) (1 - e^{-i(2m/k)Y(\rho)}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$Y(\rho) = \int_0^\infty ds V(\sqrt{s^2 + \rho^2}).$$

Для сечения рассеяния получаем известное выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eik}}(k) &= 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) |f_{\text{eik}}(k, \theta)|^2 = \\ &= 2\pi \int_0^\infty d\rho \rho |1 - e^{-i(2m/k)Y(\rho)}|^2 = 8\pi \int_0^\infty d\rho \rho \sin^2\left(\frac{m}{k}Y(\rho)\right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулу

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin \theta J_0(k\rho\theta) J_0(k\rho'\theta) &= \frac{1}{k} \int_0^{\pi k} ds \sin \frac{s}{k} J_0(\rho s) J_0(\rho' s) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{k^2} \int_0^\infty ds s J_0(\rho s) J_0(\rho' s) = \frac{\delta(\rho - \rho')}{k^2 \rho}, \end{aligned}$$

справедливую лишь при больших импульсах.

При больших импульсах имеем

$$\text{Im } f_{\text{eik}}(-ik, 0) = k \int_0^\infty d\rho \rho \left[1 - \cos\left(\frac{m}{k}Y(\rho)\right) \right] = 2k \int_0^\infty d\rho \rho \sin^2\left(\frac{m}{2k}Y(\rho)\right)$$

и

$$\sigma_{\text{eik}}(k) = 4\pi \frac{\text{Im } f_{\text{eik}}(-ik, 0)}{k}$$

в полном соответствии с условием унитарности. В области малых и промежуточных импульсов приближение прямолинейных путей не работает. Для оценки поведения сечения в этой области мы предлагаем подход, который назовем *унитарным приближением*.

5. УНИТАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Приближение прямолинейных путей дает нам амплитуду при больших импульсах. Для амплитуды при нулевом импульсе, т. е. для длины рассеяния, известна только оценка снизу. Если потенциал положительный, то можно ожидать, что амплитуда при всех импульсах плавно переходит от длины рассеяния к эйкональному поведению.

Унитарное приближение заключается в следующем.

1. Предполагается, что амплитуда $f(k)$ упругого рассеяния вперед ($\theta = 0$) при всех импульсах (больших и малых) представляется в виде (обобщение формулы (10))

$$f(k) = f_{\text{eik}}(k_c - ik, 0) = -(k_c - ik) \int_0^\infty d\rho \rho (1 - e^{-(2m/(k_c - ik))Y(\rho)}),$$

где введен вещественный постоянный параметр k_c , не зависящий от k , который обеспечивает конечность амплитуды при нулевом импульсе.

2. Параметр k_c определяется из условия унитарности при $k = 0$.

Длина рассеяния имеет вид

$$a(k_c) = f(0) = -k_c \int_0^\infty d\rho \rho (1 - e^{-(2m/k_c)Y(\rho)}).$$

Для мнимой части амплитуды рассеяния вперед получаем

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Im} f(k)}{k} &= \int_0^\infty d\rho \rho \times \\ &\times \left\{ 1 - e^{-(2mk_c/(k_c^2+k^2))Y(\rho)} \left[\cos\left(\frac{2mk}{k_c^2+k^2}Y(\rho)\right) + \frac{k_c}{k} \sin\left(\frac{2mk}{k_c^2+k^2}Y(\rho)\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

При нулевом импульсе ($k = 0$) имеем для мнимой части амплитуды

$$\left. \frac{\operatorname{Im} f(k)}{k} \right|_{k=0} = \int_0^\infty d\rho \rho \left[1 - e^{-(2m/k_c)Y(\rho)} \left(1 + \frac{2m}{k_c} Y(\rho) \right) \right].$$

Условие унитарности при нулевом импульсе связывает длину рассеяния и мнимую часть амплитуды рассеяния:

$$\sigma(0) = 4\pi \left. \frac{\operatorname{Im} f(k)}{k} \right|_{k=0} = 4\pi a^2(k_c).$$

Оно приводит к следующему уравнению на параметр k_c :

$$4\pi \left[k_c \int_0^\infty d\rho \rho (1 - e^{-(2m/k_c)Y(\rho)}) \right]^2 = 4\pi \int_0^\infty d\rho \rho \left[1 - e^{-(2m/k_c)Y(\rho)} \left(1 + \frac{2m}{k_c} Y(\rho) \right) \right].$$

Вычислив параметр k_c , для полного сечения рассеяния получим

$$\begin{aligned} \sigma(k) &= 4\pi \frac{\operatorname{Im} f(k)}{k} = \\ &= 4\pi \int_0^\infty d\rho \rho \left\{ 1 - e^{-(2mk_c/(k_c^2+k^2))Y(\rho)} \left[\cos\left(\frac{2mk}{k_c^2+k^2}Y(\rho)\right) + \frac{k_c}{k} \sin\left(\frac{2mk}{k_c^2+k^2}Y(\rho)\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Выпишем **итоговые формулы унитарного приближения.**

Пусть задан гамильтониан с короткодействующим потенциалом отталкивания:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad V(r) = gU\left(\frac{r}{R}\right).$$

Введем безразмерные переменные

$$q = kR, \quad q_c = k_c R, \quad G = 2mgR^2$$

и определим функцию $Z(v)$ формулами

$$\begin{aligned} 2mY(\rho) &= 2m \int_0^\infty ds V(\sqrt{s^2 + \rho^2}) = \frac{G}{R} Z(v), \quad v = \frac{\rho}{R}, \\ Z(v) &= \int_0^\infty ds U(\sqrt{s^2 + v^2}) = \int_v^\infty ds \frac{sU(s)}{\sqrt{s^2 - v^2}}. \end{aligned}$$

Параметр q_c определяется из уравнения

$$\left[q_c \int_0^\infty dv v (1 - e^{-(G/q_c)Z(v)}) \right]^2 = \int_0^\infty dv v \left[1 - e^{-(G/q_c)Z(v)} \left(1 + \frac{G}{q_c} Z(v) \right) \right]. \quad (11)$$

Тогда длина рассеяния равна

$$\frac{a(G)}{R} = q_c \int_0^\infty dv v (1 - e^{-(G/q_c)Z(v)}),$$

а сечение рассеяния определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(k)}{R^2} &= 4\pi \int_0^\infty dv v \times \\ &\times \left\{ 1 - e^{-(Gq_c/(q_c^2 + q^2))Z(v)} \left[\cos\left(\frac{Gq_c}{q_c^2 + q^2} Z(v)\right) + \frac{k_c}{k} \sin\left(\frac{Gq_c}{q_c^2 + q^2} Z(v)\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Приведенные выражения достаточно просты и позволяют легко оценить длину и сечение рассеяния в случае больших констант связи, когда нельзя применить приближение Борна. Ниже на конкретных примерах мы проверим эффективность нашего приближения.

6. ПРИМЕРЫ

В качестве примеров вычислим длину и сечение рассеяния в унитарном приближении в случае упругого рассеяния на прямоугольном потенциале, сингулярном потенциале отталкивания и потенциале Юкавы.

6.1. Прямоугольный потенциал. Рассмотрим прямоугольный потенциал отталкивания

$$V(r) = g\theta\left(1 - \frac{r}{R}\right) = \begin{cases} g, & r < R, \\ 0, & R < r. \end{cases}$$

6.1.1. *Точное решение.* Точная амплитуда рассеяния на этом потенциале имеет стандартный вид:

$$f(k, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (e^{2i\delta_\ell(k)} - 1) P_\ell(\cos \theta).$$

Здесь фаза $\delta_\ell(k)$ определяется формулами

$$\operatorname{tg} \delta_\ell(k) = -\frac{B_\ell(kR)}{A_\ell(kR)},$$

$$B_\ell(kR) = kRI_{\ell+1/2}(\kappa)J'_{\ell+1/2}(kR) - \kappa I'_{\ell+1/2}(\kappa)J_{\ell+1/2}(kR),$$

$$A_\ell(kR) = kRI_{\ell+1/2}(\kappa)N'_{\ell+1/2}(kR) - \kappa I'_{\ell+1/2}(\kappa)N_{\ell+1/2}(kR),$$

где $J_{\ell+1/2}(z)$, $N_{\ell+1/2}(z)$, $I_{\ell+1/2}(z)$ — функции Бесселя и $\kappa = \sqrt{G - k^2 R^2}$, $G = 2mgR^2$.

Для длины рассеяния получаем

$$\begin{aligned}\frac{a(G)}{R} &= \frac{f(0)}{R} = \frac{\delta_0(k)}{k} \Big|_{k=0} = 1 - \frac{\text{th} \sqrt{G}}{\sqrt{G}} = \\ &= \frac{G}{3} - \frac{2G^2}{15} + \frac{17G^3}{315} + O(G^4).\end{aligned}$$

Сечение рассеяния задается формулой

$$\frac{\sigma(k)}{R^2} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{B_{\ell}^2(kR)}{A_{\ell}^2(kR) + B_{\ell}^2(kR)}.$$

Оценка снизу для длины рассеяния согласно формуле (7) записывается как

$$\begin{aligned}\frac{a(G)}{R} &\geq G \int_0^1 dr r^2 e^{-G(1/2-r^2/6)} = 3e^{-G/2} \left[1 - \sqrt{\frac{3\pi}{2g}} \text{Erfi} \left(\sqrt{\frac{g}{6}} \right) \right] = \\ &= \frac{G}{3} - \frac{2G^2}{15} + \frac{17g^3}{630} + O(g^4).\end{aligned}$$

6.1.2. Унитарное приближение. Для прямоугольного потенциала функция Y задается следующей формулой:

$$2mY(\rho) = 2mg \int_0^{\infty} ds \theta \left(1 - \frac{\sqrt{\rho^2 + s^2}}{R} \right) = \frac{G}{R} Z(v),$$

где $Z(v) = \sqrt{1-v^2}$ и $v < 1$. Уравнение (11) определяет зависимость $q_c = q_c(G)$ параметра q_c от константы связи. Тогда сечение рассеяния дается формулой (12).

Результаты вычислений показаны на рис. 1, 2. Для длины рассеяния унитарное приближение качественно верно определяет поведение длины при больших константах связи. Для сечения рассеяния сравнение с точной формулой показывает, что в унитарном приближении результат расчета сечения, естественно, совпадает с точным результатом при больших импульсах и качественно верно передает поведение при малых импульсах.

6.2. Сингулярные потенциалы отталкивания. В приближении квантового среднего получим длину рассеяния на сингулярном потенциале отталкивания. Гамильтониан записывается как

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + g \left(\frac{R^2}{r^2} \right)^N.$$

Для данного сингулярного потенциала отталкивания известен точный результат для длины рассеяния [16]:

$$\frac{a}{R} = \left(\frac{G}{4(N-1)} \right)^{1/(2N-2)} \frac{\Gamma(1-1/(2N-2))}{\Gamma(1+1/(2N-2))}.$$

Рис. 1. Длина рассеяния в случае прямоугольного потенциала как функция от константы связи G . Жирная линия – унитарное приближение, тонкая линия – результат расчета по точной формуле, самая нижняя линия – оценка снизу.

Рис. 2. Сечение рассеяния $\sigma(q)$ в случае прямоугольного потенциала для различных величин константы связи G . Жирная линия – унитарное приближение, тонкая линия – точное значение. Вертикальной линией на каждом рисунке показано значение параметра q_c .

Рис. 3. Длина рассеяния на сингулярном потенциале как функция константы связи G при $N = 3$. Жирная линия – унитарное приближение, тонкая линия – точный результат.

Рис. 4. Длина рассеяния на потенциале Юкавы как функция константы связи G . Жирная линия – унитарное приближение, тонкая линия – результат численного расчета.

В унитарном приближении функция Y задается формулой

$$2mY(\rho) = 2mg \int_0^\infty ds \left(\frac{R^2}{s^2 + \rho^2} \right)^N = \frac{G}{R} \frac{A(N)}{v^{2N-1}}, \quad A(N) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(N - 1/2)}{\Gamma(N)}.$$

В данном случае все вычисления могут быть выполнены в явном виде. Мы не будем выписывать здесь эти громоздкие формулы и только приведем графики зависимости длины рассеяния от константы связи G при $N = 3$ (см. рис. 3). Видно, что поведение унитарного приближения качественно правильно соответствует точному поведению.

6.3. Потенциал Юкавы. Гамильтониан потенциала Юкавы записывается как

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\hbar}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + g \frac{e^{-r/R}}{r/R}.$$

Рис. 5. Сечение рассеяния на потенциале Юкавы как функция импульса k при различных G . Жирная кривая – унитарное приближение, тонкая кривая – результат численного расчета. Видно, что численный результат при больших импульсах дает заниженные значения для сечения, поскольку в этой области приближение эйконала, безусловно, справедливо.

В унитарном приближении найдем длину и сечение рассеяния на положительном потенциале Юкавы и для функции Y получим

$$2mY(\rho) = \frac{2mgR^2}{R} \int_0^\infty ds \frac{e^{-\sqrt{s^2+\rho^2}}}{\sqrt{s^2+\rho^2}} = \frac{G}{R} Z(v), \quad Z(v) = K_0(\rho), \quad (13)$$

где $K_0(\rho)$ – цилиндрическая функция мнимого аргумента.

На рис. 4, 5 представлены результаты вычислений в сравнении с численными результатами, полученными В.С. Мележином, которые можно считать точными. С нашей точки зрения, совпадение очень хорошее.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено представление амплитуды упругого рассеяния в форме функционального интеграла и предложен метод оценки полученного интеграла в случае потенциалов отталкивания.

Представление амплитуды упругого рассеяния в замкнутой форме функционального интеграла ценно само по себе. Так, представление Фейнмана функции Грина в квантовой механике в форме интеграла по путям сыграло и играет большую роль в понимании квантовой физики, хотя явно вычислить предложенный интеграл оказалось возможным в весьма ограниченном числе случаев.

Метод оценки функционального интеграла в случае потенциалов с большой константой связи основан на соотношении неопределенностей для свободного движения, известного как уширение волнового пакета. Определяющие амплитуду и сечение формулы достаточно просты, что позволяет без особого труда оценить качественно и в некоторой степени количественно поведение длины и сечения при больших константах связи. Рассмотренные примеры показывают эффективность предлагаемого метода.

Предлагаемый метод следует применять как первую оценку амплитуд и сечений, при этом можно получить хорошую качественную и количественную картину рассеяния, перед тем как приступать к численным расчетам. В этом, с нашей точки зрения, состоит главная ценность предлагаемого метода.

Вообще говоря, могут быть использованы и разработаны другие уже известные и пока еще неизвестные методы вычисления функциональных интегралов, как-то: вариационные оценки и гауссово эквивалентное представление (см, например, работы [14], [15]) и т. д. Всё это требует дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция Грина уравнения Шредингера

Формально решение задачи Коши уравнения Шредингера можно представить в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = e^{-iH_{\mathbf{x}}t} \Psi_0(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' e^{-iH_{\mathbf{x}}t} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Psi_0(\mathbf{x}') = \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \Psi_0(\mathbf{x}'),$$

где функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = e^{-iH_{\mathbf{x}}t} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \exp \left\{ -i \left[-\frac{1}{2m} \left(\frac{d}{d\mathbf{x}} \right)^2 + V(\mathbf{x}) \right] \right\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Поскольку операторы $(d/d\mathbf{x})^2$ и $V(\mathbf{x})$ не коммутируют, воспользуемся понятием Т-произведения:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = e^{-iH\mathbf{x}t} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = T \left\{ \exp \left[\frac{i}{2m} \int_0^t d\tau \left(\frac{d}{d\mathbf{x}_\tau} \right)^2 - i \int_0^t d\tau V(\mathbf{x}_\tau) \right] \right\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Производные второго порядка в экспоненте можно выразить через производные первого порядка с помощью гауссового функционального интеграла:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \int \frac{D\boldsymbol{\nu}}{C} \times \\ \times T \left\{ \exp \left[\frac{im}{2} \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}^2(\tau) + \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}(\tau) \frac{d}{d\mathbf{x}_\tau} - i \int_0^t d\tau V(\mathbf{x}_\tau) \right] \right\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Мы видим, что в подынтегральном выражении возник оператор сдвига. Результат действия оператора сдвига под знаком Т-произведения дает

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \int \frac{D\boldsymbol{\nu}}{C} \exp \left\{ \frac{im}{2} \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}^2(\tau) - i \int_0^t d\tau V \left(\mathbf{x} + \int_\tau^t d\tau' \boldsymbol{\nu}(\tau') \right) \right\} \times \\ \times \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}(\tau) \right).$$

В полученном выражении проинтегрируем дельта-функцию. Для этого проведем замену функциональных переменных интегрирования:

$$\boldsymbol{\nu}(\tau) = \frac{1}{t} \int_0^t d\tau' \boldsymbol{\nu}(\tau') + \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^\tau d\tau' \boldsymbol{\nu}(\tau') - \frac{\tau}{t} \int_0^t d\tau' \boldsymbol{\nu}(\tau') \right) = \boldsymbol{\nu}_0 + \dot{\boldsymbol{\xi}}(\tau), \\ \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}(t) = 0.$$

Эта замена переменных ведет к соотношениям

$$D\boldsymbol{\nu} = d\boldsymbol{\nu}_0 D\boldsymbol{\xi}, \quad \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}(\tau) \right) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + t\boldsymbol{\nu}_0), \\ \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}^2(\tau) = t\boldsymbol{\nu}_0^2 + \int_0^t d\tau \dot{\boldsymbol{\xi}}^2(\tau), \quad \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}(\tau) = t\boldsymbol{\nu}_0, \\ C_{\boldsymbol{\nu}} = C_{\boldsymbol{\nu}_0} C_{\boldsymbol{\xi}}, \\ \int \frac{D\boldsymbol{\nu}_0}{C_{\boldsymbol{\nu}_0}} e^{it\boldsymbol{\nu}_0^2/2} = \left(\frac{t}{2\pi i} \right)^{3/2} \int d\boldsymbol{\nu}_0 e^{it\boldsymbol{\nu}_0^2/2} = 1, \\ \int \frac{D\boldsymbol{\nu}}{C_{\boldsymbol{\nu}}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^t d\tau \boldsymbol{\nu}^2(\tau) \right\} F[\boldsymbol{\nu}] = \\ = \left(\frac{t}{2\pi i} \right)^{3/2} \int d\boldsymbol{\nu}_0 e^{it\boldsymbol{\nu}_0^2/2} \int \frac{D\boldsymbol{\xi}}{C_{\boldsymbol{\xi}}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^t d\tau \dot{\boldsymbol{\xi}}^2(\tau) \right\} F[\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\xi}].$$

Вычислив интеграл с дельта-функцией, получим представление

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{i\frac{m(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2}{2t}} \times \\ \times \int D\boldsymbol{\xi} \exp \left\{ \frac{im}{2} \int_0^t d\tau \dot{\boldsymbol{\xi}}^2(\tau) - i \int_0^t d\tau V \left(\frac{\tau}{t} \mathbf{x} + \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) \mathbf{x}' - \boldsymbol{\xi}(\tau) \right) \right\}. \quad (\text{П.1})$$

Если ввести новую переменную интегрирования

$$\boldsymbol{\rho}(\tau) = \frac{\tau}{t} \mathbf{x} + \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \mathbf{x}' - \boldsymbol{\xi}(\tau), \quad \boldsymbol{\rho}(0) = \mathbf{x}', \quad \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{x},$$

то интеграл запишется как

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) &= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} \int \frac{D\boldsymbol{\rho}}{C} \exp\left\{i \int_0^t d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^2(\tau) - V(\boldsymbol{\rho}(\tau))\right]\right\} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} \int \frac{D\boldsymbol{\rho}}{C} \exp\left\{i \int_0^t d\tau L(\tau)\right\} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} \int \frac{D\boldsymbol{\rho}}{C} e^{iS_{(t,0)}[\boldsymbol{\rho}]}, \quad \boldsymbol{\rho}(0) = \mathbf{x}', \quad \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Этот интеграл можно интерпретировать как интеграл по всем возможным путям, или траекториям, начинающимся при $\tau = 0$ в точке $\boldsymbol{\rho}(0) = \mathbf{x}'$ и заканчивающимся при $\tau = t$ в точке $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{x}$. Такая трактовка функционального интеграла была дана Фейнманом при его формулировке квантовой механики [1].

В случае свободного движения получим

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{i \frac{m(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2t}}.$$

Итак, решение нестационарного уравнения Шредингера можно представить в форме функциональных интегралов (П.1) и (П.2).

Благодарности. Автор выражает благодарность Б. Л. Воронову, В. С. Мележику и В. И. Ритусу за полезную дискуссию, а также особую благодарность В. С. Мележику за проведение численных вычислений сечения рассеяния для потенциала Юкавы при больших константах связи.

Список литературы

- [1] Р. П. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, М., 1968.
- [2] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Marketing*, World Sci., Singapore, 2006.
- [3] Ж. Зинн-Жюстин, *Континуальный интеграл в квантовой механике*, Физматлит, М., 2006.
- [4] A. Das, *Field Theory. A Path Integral Approach*, World Sci., Singapore, 2006.
- [5] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, *ТМФ*, **4**:3 (1970), 293–300; **14**:1 (1973), 27–35; Б. М. Барбашов, *ЯФ*, **20** (1974), 218–222.
- [6] C. Chiou-Lahanas, G. A. Diamandis, B. C. Georgalas, X. N. Maintas, E. Papantonopoulos, *Phys. Rev. D*, **52**:10 (1995), 5877–5882, arXiv: hep-th/9506059.
- [7] J. Rembielinski, *Quantization of the tachyonic field and the preferred frame*, arXiv: hep-ph/9509219.
- [8] J. Carron, R. Rosenfelder, *Phys. Lett. A*, **375**:43 (2011), 3781–3785, arXiv: 1107.3034.
- [9] R. Rosenfelder, *Scattering theory with path integrals*, arXiv: 1302.3419.
- [10] Д. И. Блохинцев, Б. М. Барбашов, *УФН*, **106**:4 (1972), 593–646.

- [11] Б. М. Барбашов, С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, В. Н. Первушин, А. Н. Сисакян, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **5**:3 (1970), 330–342; Б. М. Барбашов, Д. И. Блохинцев, В. В. Нестеренко, В. Н. Первушин, *ЭЧАЯ*, **4**:3 (1973), 623–661.
- [12] J. L. Basdevant, J. Dalibard, *Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, 2005.
- [13] Г. В. Ефимов, *ТМФ*, **171**:3 (2012), 452–474.
- [14] V. Dineykhan, G. V. Efimov, G. Ganbold, S. N. Nedelko, *Oscillator representation in quantum physics*, Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs, **26**, Springer, Berlin, 1995.
- [15] Г. В. Ефимов, *Метод функционального интегрирования*, Международный университет природы, общества и человека “Дубна”, Дубна, 2008.
- [16] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, Мир, М., 1974.

Поступила в редакцию 24.05.2013,
после доработки 13.01.2014