Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Муминов, А. М. Хуррамов, Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 3, 482–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 18:03:55

© 2013 г.

М. Э. Муминов*, А. М. Хуррамов*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке с некоторыми дисперсионными функциями (описывающими перенос частицы с узла на соседний узел); частицы взаимодействуют с помощью потенциала притяжения только в ближайших соседних узлах. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов $h(k)$ от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$ (где $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор). В зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых оператор $h(0)$ имеет двукратный (трехкратный) виртуальный уровень в нуле.

Ключевые слова: двухчастичный гамильтониан на решетке, виртуальный уровень, кратность виртуального уровня, собственное значение, положительный оператор.

DOI: 10.4231/tmf8559

1. ВВЕДЕНИЕ

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шредингера с помощью выделения энергии движения центра масс, при этом одночастичные связанные состояния суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом [1] (такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса). На решетке выделению центра масс системы отвечает реализация гамильтониана как “расслоенного” оператора, т. е. прямого интеграла семейства операторов $h(k)$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор [2], [3]. Является ли число дискретных собственных значений многочастичных систем конечным или бесконечным, зависит от числа виртуальных уровней подсистем. Если две или три двухчастичные подсистемы в трехчастичной системе имеют виртуальные уровни, то дискретный спектр гамильтониана бесконечен [4], [5], а если в трехчастичной системе не более одной такой подсистемы, то дискретный спектр гамильтониана конечен [6], [7].

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Республика Узбекистан.
E-mail: mmuminov@mail.ru, xurramov@mail.ru

Вопрос о существовании виртуального уровня для системы n частиц (при $n > 3$) рассматривался в работах Жислина [7], [8]. Для системы двух частиц на решетке существование виртуального уровня изучалось в работах [9], [10] в случае, когда дисперсионные соотношения частиц линейно зависимы и имеют единственный невырожденный минимум в нуле. В работе [11] показано, что левый край существенного спектра одночастичного гамильтониана одновременно может оказаться виртуальным уровнем и собственным значением рассматриваемого гамильтониана.

Двухчастичные гамильтонианы на решетке исследованы в работах [12]–[14]. В работе [12] подробно рассмотрена задача о спектре двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц широкого класса гиббсовских полей на решетке в высокотемпературной области ($t \gg 1$), в статье [13] также показано появление при некоторых значениях полного квазиимпульса системы уровней связанных состояний, отстоящих от непрерывного спектра на определенное расстояние. Спектральные свойства двухчастичного оператора в зависимости от полного квазиимпульса изучены в работе [14].

В работе [3] доказано, что в случае, когда оператор $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень на левом краю существенного спектра, дискретный спектр оператора $h(k)$, лежащий левее существенного спектра, является непустым при всех $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. В работе [15] в предположении, что функции $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$, задающие дисперсионные соотношения частиц, являются линейно зависимыми, доказано, что из положительности оператора $h(\mathbf{0})$ следует положительность оператора $h(k)$ при всех $k \in \mathbb{T}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. В работе [16] установлены зависимости числа и положения собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера, ассоциированного с гамильтонианом системы двух частиц (фермионов), взаимодействующих только на ближайших соседних узлах, от энергии взаимодействия частиц, квазиимпульса системы и размерности решетки.

В настоящей работе рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке с некоторой дисперсионной функцией, описывающей перенос частицы с узла на соседний узел. Частицы взаимодействуют с помощью потенциала притяжения только в ближайших соседних узлах. Изучается вопрос о существовании или отсутствии собственных значений семейства операторов $h(k)$ в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$. Кроме того, в зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых оператор $h(\mathbf{0})$ имеет простой, двукратный и трехкратный виртуальный уровень в нуле.

Для существования бесконечного числа связанных состояний (эффекта Ефимова) в случае гамильтониана системы трех частиц, взаимодействующих на трехмерной решетке с помощью парных контактных потенциалов притяжения, важно достижение виртуального уровня в нуле для двухчастичных подгамильтонианов $h_\alpha(\mathbf{0})$, а также положительность операторов $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha = 1, 2, 3$. В работах [17]–[19], посвященных эффекту Ефимова, виртуальные уровни двухчастичных подгамильтонианов $h_\alpha(\mathbf{0})$, $\alpha = 1, 2, 3$, являются простыми (однократными, см. ниже определение 1). Поэтому, с учетом результатов настоящей работы, возникает новая задача о существовании или отсутствии эффекта Ефимова для трехчастичного дискретного оператора Шредингера в случае, когда двухчастичные подгамильтонианы достигают кратного виртуального уровня в нуле.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка, $(\mathbb{Z}^3)^2 = \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$ – декартова степень $\mathbb{Z}^3$ и $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^2$.

Рассмотрим координатное представление действующего в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ гамильтониана системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с парным короткодействующим потенциалом $\hat{v}(\cdot)$ на трехмерной решетке:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где $\hat{h}_0$ и $\hat{v}$ действуют по следующим правилам:

$$\begin{aligned} (\hat{h}_0 \hat{\psi})(n_1, n_2) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} [\hat{\varepsilon}_1(s) \hat{\psi}(n_1 + s, n_2) + \hat{\varepsilon}_2(s) \hat{\psi}(n_1, n_2 + s)], \\ (\hat{v} \hat{\psi})(n_1, n_2) &= \hat{v}(n_1 - n_2) \hat{\psi}(n_1, n_2). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_1(s)$ и $\hat{\varepsilon}_2(s)$ – вещественнозначные четные функции, которые описывают перенос частицы с узла на соседний узел,

$$\hat{\varepsilon}_i(s) = \begin{cases} \frac{3}{m_i} & \text{при } s = 0, \\ -\frac{1}{2m_i} & \text{при } s = \pm 2e_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

функция $\hat{v}(\cdot)$ задается следующей формулой:

$$\hat{v}(s) = \begin{cases} \frac{\mu_\alpha (2\pi)^3}{2} & \text{при } s = \pm e_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В последних соотношениях $m_i > 0$ – масса i -й частицы, $i = 1, 2$, постоянные $\mu_\alpha > 0$ и e_α , $\alpha = 1, 2, 3$, – единичные орты.

Отметим, что рассматриваемый оператор $\hat{h}$ является ограниченным и самосопряженным в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$, $L_2(\mathbb{T}^d)$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^d$. С помощью преобразования Фурье [3], [15]

$$\mathfrak{F}: \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2) \rightarrow L_2((\mathbb{T}^3)^2)$$

получим импульсное представление h оператора $\hat{h}$, т. е. $h = \mathfrak{F} \hat{h} \mathfrak{F}^{-1}$. Далее разложим оператор h в прямой операторный интеграл

$$h = \int_{\mathbb{T}^3} \bigoplus h(k) dk,$$

где $h(k)$ – самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v}, \quad k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$h_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos 2p_i), \quad (1)$$

$\mathbf{v}$ – интегральный оператор с ядром

$$v(p-s) = \sum_{\alpha=1}^3 \mu_{\alpha} \cos(p_{\alpha} - s_{\alpha}).$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [20] следует, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении v и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ совпадает с областью значений функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$:

$$\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)], \quad m(k) = \min_p \mathcal{E}_k(p), \quad M(k) = \max_p \mathcal{E}_k(p).$$

Поскольку $\mathbf{v} \geq 0$, мы имеем

$$\sup(h(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т. е.

$$\sigma(h(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $m = m_1 = m_2$ и $k \in \Pi$, где

$$\Pi = \left\{ k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3 : k_{\alpha} = \pm \frac{\pi}{2} \text{ хотя бы для одного } \alpha \in \{1, 2, 3\} \right\}. \quad (2)$$

В случае, когда предположение 1 не выполнено, положим (см. ниже лемму 2)

$$\mu_i^{\pm}(k) = \frac{c_i(k; m(k)) + s_i(k; m(k)) \pm \sqrt{[c_i(k; m(k)) - s_i^2(k; m(k))] + 4\xi_i^2(k; m(k))}}{2[c_i(k; m(k))s_i(k; m(k)) - \xi_i^2(k; m(k))]}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} c_i(k; z) &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, & s_i(k; z) &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, \\ \xi_i(k; z) &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin s_i \cos s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, & z &\leq m(k), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что из неравенства Коши–Буняковского следует положительность знаменателя в правой части формулы (3), т. е.

$$c_i(k; m(k))s_i(k; m(k)) - \xi_i^2(k; m(k)) > 0.$$

Обозначим через M_{i0} , M_{i1} , M_{i2} следующие множества:

$$M_{i0} = [0, \mu_i^-(k)], \quad M_{i1} = (\mu_i^-(k), \mu_i^+(k)], \quad M_{i2} = (\mu_i^+(k), \infty), \quad i = 1, 2, 3.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть не выполняется предположение 1 и $\mu \in M_{1\alpha} \times M_{2\beta} \times M_{3\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2\}$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{T}^3$ оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно $\alpha + \beta + \gamma$ собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Множество Π разделим на три подмножества Π_n , $n = 1, 2, 3$, заданных следующим образом: в множество Π_n мы включаем те элементы $k \in \Pi$, у которых ровно n координат принимают значения $\pm\pi/2$. Положим

$$\mu_i^{(1)}(k) = \left(m\pi \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin^2 s_i ds_\alpha ds_\beta}{\sum_{l \in \{\alpha, \beta\}} (|\cos k_l| - \cos k_l \cos 2s_l)} \right)^{-1}, \quad k \in \Pi_1, \quad i = \alpha, \beta, \quad (5)$$

где через k_α и k_β , $\alpha < \beta$, обозначены координаты элемента $k \in \Pi_1$, не равные $\pm\pi/2$; пусть также

$$\mu_i^{(2)}(k) = \left(2m\pi^2 \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s ds}{(|\cos k_i| - \cos k_i \cos 2s)} \right)^{-1}, \quad k \in \Pi_2,$$

где k_i – координата элемента $k \in \Pi_2$, отличная от $\pm\pi/2$. Введем следующие обозначения:

$$L_{i0}^{(j)} = [0, \mu_i^{(j)}(k)], \quad L_{i1}^{(j)} = (\mu_i^{(j)}(k), \infty), \quad i = \alpha, \beta, \quad j = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется предположение 1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Пусть $k \in \Pi_1$ и $(\mu_\alpha, \mu_\beta) \in L_{\alpha r}^{(1)} \times L_{\beta t}^{(1)}$, где α, β ($\alpha < \beta$) – индексы координат k_α, k_β элемента $k \in \Pi_1$, отличных от $\pm\pi/2$, и $r, t = 0, 1$. Тогда оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно $4 + r + t$ собственных значений, лежащих левее существенного спектра,

2. Пусть $k \in \Pi_2$ и $\mu_\alpha \in L_{\alpha i}^{(2)}$, где α – индекс координаты k_α элемента $k \in \Pi_2$, отличной от $\pm\pi/2$, и $i = 0, 1$. Тогда оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно $5 + i$ собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

3. Если $k \in \Pi_3$, то для каждого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^3$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, оператор $h(k)$ имеет ровно 6 простых собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях теоремы 2 в случае $k \in \Pi_1$ имеет место включение $(\mu_\alpha, \mu_\beta) \in L_{\alpha r}^{(1)} \times L_{\beta t}^{(1)}$ для каждого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^3$ и для некоторых $r, t \in \{0, 1\}$. В случае $k \in \Pi_2$ имеет место включение $\mu_\alpha \in L_{\alpha i}^{(2)}$ для каждого $\mu \in \mathbb{R}_+^3$ и для некоторого $i \in \{0, 1\}$.

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ – банахово пространство непрерывных (периодических) функций на торе $\mathbb{T}^3$, и G – интегральный оператор (Бирмана–Швингера) с ядром

$$G(p, q) = v(p - q)(\mathcal{E}_0(q))^{-1}, \quad p, q \in \mathbb{T}^3.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если единица является собственным значением оператора G и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_0(p)} \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3),$$

то говорят, что оператор $h(\mathbf{0})$ имеет *виртуальный уровень в нуле* (на левом краю существенного спектра). Число таких линейно независимых собственных векторов ψ оператора G назовем *кратностью виртуального уровня* оператора $h(\mathbf{0})$.

Положим $\mu^0 = [c_1(\mathbf{0}; 0)]^{-1}$ и $R_0 = [0; \mu^0]$, $R_1 = \{\mu^0\}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mu \in [0, \mu^0] \times [0, \mu^0] \times [0, \mu^0]$. Тогда оператор $h(\mathbf{0})$ не имеет собственного значения, лежащего левее существенного спектра.

Из леммы 1 следует, что $h(\mathbf{0}) \geq 0$. Поэтому из теоремы 1 работы [15] вытекает, что $h(k) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{T}^3$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu \in R_\alpha \times R_\beta \times R_\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$. Тогда оператор $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень в нуле с кратностью $\alpha + \beta + \gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях теоремы 3 в случае $\alpha + \beta + \gamma = 0$ считается, что $z = 0$ не является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. Если $\alpha + \beta + \gamma = 2$, т. е. $\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu^0$, $\mu_\gamma < \mu^0$, то $z = 0$ является двукратным виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. В этом случае единица является собственным значением кратности 2 оператора G , а соответствующие собственные функции имеют вид $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$, где $\varphi_i(p) = \cos p_i$, $i = 1, 2, 3$. Если $\alpha + \beta + \gamma = 3$, т. е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu^0$, то $z = 0$ является трехкратным виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. В этом случае единица является собственным значением кратности 3 оператора G , а соответствующие собственные функции имеют вид $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА $h(K)$

В этом разделе докажем теоремы 1 и 2.

Случай, когда предположение 1 не выполнено. Пусть не выполняется предположение 1, т. е. либо $m_1 \neq m_2$ и $k \in \mathbb{T}^3$, либо $m = m_1 = m_2$ и $k \notin \Pi$, где множество Π определено в (2).

ЛЕММА 2. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(s) ds}{\mathcal{E}_k(s) - m(k)} \quad (6)$$

сходится для всех $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $m(k)$ является невырожденной точкой минимума функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$. Заметим, что функция $\mathcal{E}_k(p)$, заданная в (1), представляется в виде

$$\mathcal{E}_k(p) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2k_i + \frac{1}{m_2^2} \cos(2p_i - \theta(k_i))} \right],$$

где

$$\theta(k_i) = \arccos \frac{(1/m_1) + (1/m_2) \cos 2k_i}{\sqrt{(1/m_1^2) + (2/m_1 m_2) \cos 2k_i + (1/m_2^2)}}.$$

Поэтому $\{p: \mathcal{E}_k(p) = m(k)\}$ есть множество тех векторов $p = (p_1, p_2, p_3)$, у которых каждая координата имеет вид

$$p_i = \pi n_i + \frac{\theta(k_i)}{2}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Мы считаем, что предположение 1 не выполнено, поэтому либо $m_1 \neq m_2$ и $k \in \mathbb{T}^3$, либо $m = m_1 = m_2$ и $k \notin \Pi$. В обоих случаях

$$\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2k_i + \frac{1}{m_2^2} = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2 + \frac{2}{m_1 m_2} (1 + \cos 2k_i) \neq 0.$$

Отсюда следует, что $m(k)$ является невырожденной точкой минимума функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$. Так как минимум функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$ невырожденный, интеграл (6) существует для всех $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$.

Пусть A – самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $\mathcal{H}_A(\lambda)$ – подпространство, состоящее из векторов $f \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию $(Af, f) > \lambda(f, f)$, где $\lambda > \sup \sigma_{\text{ess}}(A)$.

Положим

$$n(\lambda, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(\lambda)} \dim \mathcal{H}_A(\lambda).$$

Отметим, что $n(\lambda, A)$ определяет число собственных значений (с учетом кратности) самосопряженного оператора A , лежащих правее λ , где $\lambda > \sup \sigma_{\text{ess}}(A)$.

Обозначим через $N(\mu)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^3$, число собственных значений оператора $h(k)$, лежащих левее $m(k)$. По определению

$$N(\mu) = n(-m(k), -h(k)).$$

ЛЕММА 3. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда имеет место равенство

$$N(\mu) = n(1, r_0^{1/2}(m(k)) \mathbf{v} r_0^{1/2}(m(k))), \quad \mu \in \mathbb{R}_+^3,$$

где $r_0^{1/2}(z)$ – оператор умножения на функцию $1/\sqrt{\mathcal{E}_k(p) - z}$, $z \leq m(k)$.

Доказательство. Предположим, что $u \in \mathcal{H}_{-h(k)}(-z)$, $z < m(k)$, т. е.

$$((-h_0(k) + \mathbf{v})u, u) > -z(u, u) \quad \text{или} \quad ((h_0(k) - z)u, u) < (\mathbf{v}u, u).$$

Положим $y = (h_0(k) - z)^{1/2}u$. Тогда $u = r_0^{1/2}(z)y$. Поэтому

$$(y, y) < (r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)y, y),$$

т. е. $y \in \mathcal{H}_{r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)}(1)$, $z < m(k)$. Таким образом,

$$n(-z, -h(k)) \leq n(1, r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)).$$

Рассуждая аналогично, получим обратное утверждение:

$$n(-z, -h(k)) \geq n(1, r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)) \quad \text{при} \quad z < m(k).$$

Отсюда для всех $z < m(k)$ следует равенство

$$n(-z, -h(k)) = n(1, r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)).$$

Покажем, что

$$\lim_{z \rightarrow m(k)-0} n(1, r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)) = n(1, r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))). \quad (7)$$

Из невырожденности точки минимума функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$ следует, что при $z \leq m(k)$ ядро $t(z; \cdot, \cdot)$ интегрального оператора $r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)$ является квадратично-интегрируемым на $(\mathbb{T}^3)^2$ и при $z \rightarrow m(k)$ сходится почти всюду к $t(m(k); \cdot, \cdot)$. Поэтому по теореме Лебега оператор $r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)$ сходится по норме к $r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$ при $z \rightarrow m(k)$.

Заметим, что $\mathbf{v} \geq 0$. Так как для ограниченных операторов A и B каждое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением оператора BA с той же кратностью [21], имеет место равенство

$$n(1, r_0^{1/2}(z)\mathbf{v}r_0^{1/2}(z)) = n(1, T(z)), \quad z \leq m(k),$$

где $T(z) = \mathbf{v}^{1/2}r_0(z)\mathbf{v}^{1/2}$.

В силу компактности оператора $T(m(k))$ по определению функции $n(a, T(z))$ для некоторого $\delta_0 > 0$ мы можем записать

$$n(1, T(m(k))) = n(1 + \delta_0, T(m(k))).$$

Далее, пользуясь неравенством Вейля [21] $n(a + b, A + B) \leq n(a, A) + n(b, B)$ для компактных операторов A, B , при всех малых $\rho > 0$ получим

$$n(1 + \delta_0, T(m(k))) \leq n(1, T(m(k) - \rho)) + n(\delta_0, T(m(k)) - T(m(k) - \rho)) = n(1, T(m(k) - \rho)),$$

т. е.

$$n(1, T(m(k))) \leq n(1, T(m(k) - \rho)). \quad (8)$$

Заметим, что $\mathbf{v}$ является конечномерным (шестимерным) оператором. Поэтому $n(1, T(z)) \leq 6$, т. е. оператор $h(k)$ может иметь не более шести собственных значений, лежащих левее $m(k)$. Отсюда следует, что существует $\rho_0 > 0$ такое, что

$$\sigma(h(k)) \cap [m(k) - \rho_0; m(k)) = \emptyset.$$

Таким образом, для всех $z \in [m(k) - \rho_0; m(k))$

$$n(1, T(m(k) - \rho_0)) = n(1, T(z)). \quad (9)$$

Положим λ_0 равным минимальному значению λ из множества

$$\{\lambda > 1: \lambda \in \sigma(T(m(k) - \rho_0))\}.$$

если указанное множество непусто, и $\lambda_0 = 1$, если это множество пустое. Тогда

$$n(1, T(m(k) - \rho_0)) = n(\lambda_0, T(m(k) - \rho_0)).$$

Предположим, что $\varphi \in \mathcal{H}_{T(m(k) - \rho_0)}(\lambda_0)$, т. е. $(T(m(k) - \rho_0)\varphi, \varphi) > \lambda_0(\varphi, \varphi)$. Так как функция $(T(\cdot)\varphi, \varphi)$ монотонна на $(-\infty, m(k))$, мы имеем

$$(T(z)\varphi, \varphi) > \lambda_0(\varphi, \varphi)$$

для всех $z \in [m(k) - \rho_0, m(k))$. Отсюда

$$n(\lambda_0, T(m(k) - \rho_0)) \leq n(\lambda_0, T(z))$$

для всех $z \in [m(k) - \rho_0; m(k))$. Поэтому из (9) получаем, что

$$n(1, T(z)) = n(\lambda_0, T(z))$$

для всех $z \in [m(k) - \rho_0; m(k))$. Таким образом, существует $\eta > 0$ такое, что

$$n(\lambda_0, T(z)) = n(1 + \eta, T(z))$$

для всех $z \in [m(k) - \rho_0, m(k))$.

Отсюда, вновь пользуясь неравенством Вейля, из сходимости по норме оператора $T(z)$ к $T(m(k))$ при $z \rightarrow m(k)$ имеем при всех малых $\rho > 0$ неравенство

$$n(1, T(m(k) - \rho)) \leq n(1, T(m(k))). \quad (10)$$

Из неравенств (8) и (10) получаем (7). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда число $\lambda \neq 0$ является собственным значением оператора $r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda) = 0$, где

$$\Delta(\lambda) = \prod_{\alpha=1}^3 ([\lambda - \mu_\alpha c_\alpha(k; m(k))][\lambda - \mu_\alpha s_\alpha(k; m(k))] - \mu_\alpha^2 \xi_\alpha^2(k; m(k))).$$

При этом кратность нуля функции $\Delta(\cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$.

Доказательство. Пусть λ – ненулевое собственное значение оператора

$$r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$$

и f – соответствующий собственный вектор, т. е. уравнение

$$r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))f = \lambda f \quad (11)$$

имеет нетривиальное решение f . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{f(s) \cos s_\alpha ds}{\sqrt{\mathcal{E}_k(s) - m(k)}}, \\ \varphi_{\alpha+3} &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{f(s) \sin s_\alpha ds}{\sqrt{\mathcal{E}_k(s) - m(k)}}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда равенство (11) принимает вид

$$\lambda f(p) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_k(p) - m(k)}} \sum_{\alpha=1}^3 \mu_\alpha (\varphi_\alpha \cos p_\alpha + \varphi_{\alpha+3} \sin p_\alpha). \quad (13)$$

Из периодичности функции $\mathcal{E}_0(\cdot)$ с периодом π по каждому аргументу следует, что

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_\alpha \cos s_\beta ds}{\mathcal{E}_k(s) - m(k)} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_\alpha \sin s_\beta ds}{\mathcal{E}_k(s) - m(k)} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin s_\alpha \sin s_\beta ds}{\mathcal{E}_k(s) - m(k)} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (14)$$

Подставляя выражение (13) в формулы (12), с учетом соотношений (14) получим, что числа φ_α , $\alpha = 1, \dots, 6$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \lambda \varphi_\alpha &= \mu_\alpha c_\alpha(k; m(k)) \varphi_\alpha + \mu_\alpha \xi_\alpha(k; m(k)) \varphi_{\alpha+3}, \\ \lambda \varphi_{\alpha+3} &= \mu_\alpha \xi_\alpha(k; m(k)) \varphi_\alpha + \mu_\alpha s_\alpha(k; m(k)) \varphi_{\alpha+3}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение $(\varphi_1, \dots, \varphi_6)$ тогда и только тогда, когда ее детерминант равен нулю. Легко проверить, что $\det D(\lambda) = \Delta(\lambda)$.

Обратно, пусть $\Delta(\lambda) = 0$. Тогда

$$[\lambda - \mu_\alpha c_\alpha(k; m(k))][\lambda - \mu_\alpha s_\alpha(k; m(k))] - \mu_\alpha^2 \xi_\alpha^2(k; m(k)) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

и решения $\lambda_\alpha^-(\mu)$ и $\lambda_\alpha^+(\mu)$ этого квадратного уравнения являются собственными значениями оператора $r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$f_\alpha^\mp(p) = \frac{\mu_\alpha}{\sqrt{\mathcal{E}_k(p) - m(k)}} (\varphi_\alpha^\mp \cos p_\alpha + \varphi_{3+\alpha}^\mp \sin p_\alpha),$$

где $\varphi_\alpha^\mp$, $\varphi_{3+\alpha}^\mp$ – решения системы

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^\mp \varphi_\alpha &= \mu_\alpha c_\alpha(k; m(k)) \varphi_\alpha + \mu_\alpha \xi_\alpha(k; m(k)) \varphi_{\alpha+3}, \\ \lambda_\alpha^\mp \varphi_{\alpha+3} &= \mu_\alpha \xi_\alpha(k; m(k)) \varphi_\alpha + \mu_\alpha s_\alpha(k; m(k)) \varphi_{\alpha+3}. \end{aligned}$$

Функция $\Delta(\cdot)$ имеет шесть нулей $\lambda_1^\mp(\mu)$, $\lambda_2^\mp(\mu)$, $\lambda_3^\mp(\mu)$, и этим нулям соответствуют шесть собственных функций $f_1^\mp(\cdot)$, $f_2^\mp(\cdot)$, $f_3^\mp(\cdot)$ оператора $r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$. Заметим, что нули функции $\Delta(\cdot)$ могут совпадать. Например, если $m_1 = m_2$, $k_1 = k_2 = k_3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, то $\lambda_1^\mp(\mu) = \lambda_2^\mp(\mu) = \lambda_3^\mp(\mu)$. При этом кратность нуля функции $\Delta(\cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку $\Delta(\lambda)$ является произведением квадратных трехчленов, легко получить, что уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет шесть не обязательно различных решений $\lambda_1^\mp(\mu)$, $\lambda_2^\mp(\mu)$, $\lambda_3^\mp(\mu)$, где

$$\lambda_\alpha^\mp(\mu_\alpha) = \frac{\mu_\alpha}{2} [c_\alpha(k; m(k)) + s_\alpha(k; m(k)) \mp \sqrt{(c_\alpha(k; m(k)) - s_\alpha(k; m(k)))^2 + 4\xi_\alpha^2(k; m(k))}].$$

Заметим, что функция $\lambda_\alpha^\mp(\cdot)$ является положительной, монотонно возрастающей на полуоси $(0, \infty)$ и

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^-(\mu_\alpha) < 1 \text{ при } \mu_\alpha \in (0, \mu_\alpha^-(k)], & \quad \lambda_\alpha^-(\mu_\alpha) > 1 \text{ при } \mu_\alpha \in (\mu_\alpha^-(k), \infty), \\ \lambda_\alpha^+(\mu_\alpha) < 1 \text{ при } \mu_\alpha \in (0, \mu_\alpha^+(k)], & \quad \lambda_\alpha^+(\mu_\alpha) > 1 \text{ при } \mu_\alpha \in (\mu_\alpha^+(k), \infty), \end{aligned}$$

где число $\mu_\alpha^\pm(k)$ определено по формуле (3). Отсюда и из леммы 4 следует, что если $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in M_{1\alpha} \times M_{2\beta} \times M_{3\gamma}$, то оператор $r_0^{1/2}(m(k))\mathbf{v}r_0^{1/2}(m(k))$ имеет с учетом кратности ровно $\alpha + \beta + \gamma$ собственных значений, больших единицы. Здесь

$$M_{i0} = [0, \mu_\alpha^-(k)], \quad M_{i1} = (\mu_\alpha^-(k), \mu_\alpha^+(k)], \quad M_{i2} = (\mu_\alpha^+(k), \infty), \quad i = 1, 2, 3.$$

С учетом леммы 3 таким образом получаем утверждение теоремы 1.

Случай, когда предположение 1 выполнено. Пусть выполняется предположение 1, т. е. $m = m_1 = m_2$ и $k \in \Pi$.

Обозначим через $U_k: L_2(\mathbb{T}^3) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^3)$, $k \in \mathbb{T}^3$, унитарный оператор, определенный по формуле $(U_k f)(p) = f(p + k/2)$, $f \in L_2(\mathbb{T}^3)$. С помощью оператора U_k построим оператор $\tilde{h}(k) = U_k h(k) U_k^{-1}$, унитарно эквивалентный оператору $h(k)$. Оператор $\tilde{h}(k)$ имеет вид

$$\tilde{h}(k) = \tilde{h}_0(k) - \mathbf{v},$$

где $\tilde{h}_0(k)$ – оператор умножения на четную функцию

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \frac{1}{m} \varepsilon\left(p + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{m} \varepsilon\left(p - \frac{k}{2}\right).$$

Аналогично лемме 4 доказывается

ЛЕММА 5. Число $z < m(k)$ является собственным значением оператора $\tilde{h}(k)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\Delta}(k; z) = 0$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(k; z) &= \prod_{\alpha=1}^3 [1 - \mu_\alpha \tilde{c}_\alpha(k; z)][1 - \mu_\alpha \tilde{s}_\alpha(k; z)], \\ \tilde{c}_\alpha(k; z) &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \quad \tilde{s}_\alpha(k; z) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}. \end{aligned}$$

При этом кратность нуля функции $\tilde{\Delta}(\cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $\tilde{h}(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $k \in \Pi_1$ и α, β ($\alpha < \beta$) – индексы координат k_α, k_β элемента $k \in \Pi_1$, не равные $\pm\pi/2$. В этом случае

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_k(p) &= \frac{2}{m} \left[1 + \sum_{l \in \{\alpha, \beta\}} (1 - \cos k_l \cos 2p_l) \right], \\ m(k) = \min_p \tilde{\mathcal{E}}_k(p) &= \frac{2}{m} \left[1 + \sum_{l \in \{\alpha, \beta\}} (1 - |\cos k_l|) \right].\end{aligned}$$

Отсюда получим для всех индексов $i = 1, 2, 3$ и для $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, отличного от α, β ,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow m(k)} \tilde{c}_i(k; z) &= m\pi \lim_{z \rightarrow m(k)} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\cos^2 s_i ds_\alpha ds_\beta}{3 - \cos k_\alpha \cos 2s_\alpha - \cos k_\beta \cos 2s_\beta - mz} = +\infty, \\ \lim_{z \rightarrow m(k)} \tilde{s}_\gamma(k; z) &= \frac{m\pi}{2} \lim_{z \rightarrow m(k)} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds_\alpha ds_\beta}{3 - \cos k_\alpha \cos 2p_\alpha - \cos k_\beta \cos 2p_\beta - mz} = +\infty,\end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{c}_i(k; z) = 0$ для всех $i = 1, 2, 3$, из непрерывности и монотонности функции $\tilde{c}_i(k; \cdot)$ следует, что функция $1 - \mu_i \tilde{c}_i(k; \cdot)$ имеет единственный ноль на полуоси $(-\infty, m(k))$ для каждого $i = 1, 2, 3$. Аналогично, для $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, отличного от α, β , поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{s}_\gamma(k; z) = 0$, из непрерывности и монотонности функции $\tilde{s}_\gamma(k; \cdot)$ следует, что функция $1 - \mu_\gamma \tilde{s}_\gamma(k; \cdot)$ имеет единственный ноль на полуоси $(-\infty, m(k))$. Таким образом, функция $\tilde{\Delta}(k; \cdot)$ имеет не менее четырех нулей для всякого $\mu \in \mathbb{R}_+^3$.

Пусть $\mu_i \leq \mu_i^{(1)}(k)$, где число $\mu_i^{(1)}(k)$ определено в формуле (5), $i = \alpha, \beta$. Тогда $1 - \mu_i \tilde{s}_i(k; z) \geq 0$. Если $\mu_i > \mu_i^{(1)}(k)$ для $i = \alpha, \beta$, то $1 - \mu_i \tilde{s}_i(k; m(k)) < 0$. Отсюда и из равенства $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{s}_i(k; z) = 0$ следует существование на полуоси $(-\infty, m(k))$ единственного нуля функции $1 - \mu_i \tilde{s}_i(k; \cdot)$, $i = \alpha, \beta$. Таким образом, согласно лемме 4 имеем следующее: если $k \in \Pi_1$ и $(\mu_\alpha, \mu_\beta) \in L_{\alpha r}^{(1)} \times L_{\beta t}^{(1)}$, $r, t = 0, 1$, то оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно $4 + r + t$ собственных значений, лежащих левее существенного спектра. Утверждение 1 теоремы 2 доказано.

Второе утверждение теоремы 2 доказывается аналогично.

Докажем третье утверждение. Пусть $k \in \Pi_3$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \frac{6}{m}.$$

Поэтому

$$\lim_{z \rightarrow m(k)} \tilde{c}_i(k; z) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow m(k)} \tilde{s}_i(k; z) = +\infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{c}_i(k; z) = 0$ и $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{s}_i(k; z) = 0$ для каждого $i = 1, 2, 3$, из непрерывности и монотонности функций $\tilde{c}_i(k; \cdot)$ и $\tilde{s}_i(k; \cdot)$ следует, что функция $\tilde{\Delta}(k; \cdot)$ имеет не менее шести нулей для всякого $\mu \in \mathbb{R}_+^3$. Отсюда и из леммы 4 следует, что если $k \in \Pi_3$, то для каждого $\mu \in \mathbb{R}_+^3$ оператор $h(k)$ имеет ровно шесть простых собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

4. ВИРТУАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ ОПЕРАТОРА $h(\mathbf{0})$

В этом разделе докажем теорему 3. Согласно определению виртуального уровня оператора $h(\mathbf{0})$ будем изучать уравнение

$$G\varphi = \varphi.$$

Сначала заметим, что при $\mu \in [0, \mu^0] \times [0, \mu^0] \times [0, \mu^0]$ дискретный спектр оператора $h(\mathbf{0})$ отсутствует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Функция $\mathcal{E}_0(\cdot)$ имеет вид

$$\mathcal{E}_0(s) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \sum_{i=1}^3 (1 - \cos 2s_i).$$

Введем обозначение

$$J(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2t \, dt}{a - b \cos 2t}, \quad 0 < b < a.$$

Для $0 < b < a$ легко проверяется равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2t \, dt}{a - b \cos 2t} = \frac{2\pi}{b} \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Поэтому

$$J(a, b) > 0 \quad \text{для всех } 0 < b < a. \quad (15)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 s_\alpha \, ds}{\mathcal{E}_0(s)} - \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_\alpha \, ds}{\mathcal{E}_0(s)} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos 2s_\alpha \, ds}{\sum_{i=1}^3 (1 - \cos 2s_i)} = \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J(A, 1) \, ds_\beta \, ds_\gamma, \end{aligned}$$

где $A = 1 + \sum_{i \in \beta, \gamma} [1 - \cos 2s_i]$ и $A > 1$ всюду на $\mathbb{T}^3$, за исключением четырех точек, из (15) получим $I > 0$, т. е.

$$c_\alpha(\mathbf{0}; 0) > s_\alpha(\mathbf{0}; 0),$$

где $c_\alpha(\mathbf{0}; 0)$, $s_\alpha(\mathbf{0}; 0)$ – интегралы, определенные по формулам (4) при $k = \mathbf{0}$. Отметим, что $m(k) = 0$ при $k = \mathbf{0}$ и функция $\Delta(\cdot)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \prod_{\alpha}^3 [\lambda - \mu_\alpha c_\alpha(\mathbf{0}; 0)][\lambda - \mu_\alpha s_\alpha(\mathbf{0}; 0)].$$

Поскольку

$$\lambda - \mu_\alpha s_\alpha(\mathbf{0}; 0) > \lambda - \mu_\alpha c_\alpha(\mathbf{0}; 0) \geq 1 - \mu^0 c_\alpha(\mathbf{0}; 0) = 0$$

для всех $\mu_\alpha \in [0, \mu^0]$ и $\lambda > 1$, мы имеем $\Delta(\lambda) > 0$ для всех $\lambda > 1$ при условии, что $\mu \in [0, \mu^0] \times [0, \mu^0] \times [0, \mu^0]$. Отсюда согласно лемме 3 получим утверждение леммы 1.

Аналогично лемме 4 доказывается

ЛЕММА 6. Число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора G тогда и только тогда, когда

$$D(\mu) = \prod_{\alpha}^3 [1 - \mu_\alpha c_\alpha(\mathbf{0}; 0)][1 - \mu_\alpha s_\alpha(\mathbf{0}; 0)] = 0.$$

При этом если $1 - \mu_\alpha c_\alpha(\mathbf{0}; 0) = 0$ (если $1 - \mu_\alpha s_\alpha(\mathbf{0}; 0) = 0$), то функция $\varphi_\alpha(p) = \cos p_\alpha$ (функция $\psi_\alpha(p) = \sin p_\alpha$) является собственной функцией оператора G , соответствующей собственному значению 1.

Из леммы 6 следует, что если число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора G и $\mu_\alpha = 1/s_\alpha(\mathbf{0}; 0)$, то $\psi_\alpha(p) = \sin p_\alpha$ является соответствующей собственной функцией оператора G . Поэтому

$$h(\mathbf{0})f(p) = 0,$$

где $f(p) = \sin p_\alpha / \mathcal{E}_0(p) \in L_2(\mathbb{T}^3)$, т.е. $z = 0$ является собственным значением оператора $h(\mathbf{0})$. При этом $z = 0$ не является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. Если $\mu_\alpha = 1/c_\alpha(\mathbf{0}; 0)$, то число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора G , соответствующим собственной функции $\varphi_\alpha(p) = \cos p_\alpha$, и

$$F(p) = \frac{\cos p_\alpha}{\mathcal{E}_0(p)} \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3),$$

т.е. $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. Таким образом, из леммы 6 получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Ноль является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$ тогда и только тогда, когда

$$\mu_\alpha = \mu^0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Доказательство теоремы 3 следует из леммы 7.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное чтение работы и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, *Тр. МИАН СССР*, **69** (1963), 1–125.
- [2] D. C. Mattis, *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.
- [3] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Commun. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115, arXiv:math-ph/0501013.
- [4] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [5] A. V. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [6] Д. Р. Яфаев, *ТМФ*, **25**:2 (1975), 185–195.

- [7] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, *Тр. ММО*, **49** (1986), 95–112.
- [8] Г. М. Жислин, *ТМФ*, **68**:2 (1986), 265–275.
- [9] С. Н. Лакаев, Ш. М. Тилавова, *ТМФ*, **101**:2 (1994), 235–252.
- [10] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 94–108.
- [11] С. Н. Лакаев, И. Н. Бозоров, *ТМФ*, **158**:3 (2009), 425–443.
- [12] Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, *Функци. анализ и его прил.*, **38**:3 (2004), 52–69.
- [13] Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, *Функци. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 39–55.
- [14] P. A. Faria da Veiga, L. Ioriatti, M. O'Carroll, *Phys. Rev. E*, **66** (2002), 016130, 9 pp.
- [15] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 381–387.
- [16] С. Н. Лакаев, А. М. Халхужаев, *ТМФ*, **158**:2 (2009), 263–276.
- [17] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.
- [18] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [19] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **159**:2 (2009), 299–317.
- [20] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [21] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Из-во ЛГУ, Л., 1980.

Поступила в редакцию 31.05.2013
после доработки 13.07.2013