Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кириллов, Стохастическое квантование с помощью модифицированного уравнения Ланжевена, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 1, 46–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf856>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 05:02:52

© 1998 г.

А. И. Кириллов*

СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА

Для евклидовой модели квантового поля типа синус-Гордон доказаны существование решений у модифицированного уравнения Ланжевена и сходимости вероятностных распределений этих решений к некоторой мере. Никаких регуляризаций в функционале действия не используется. Размерность пространства-времени произвольна.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется квантовое поле, классическая евклидова модель которого определяется следующим функционалом действия:

$$A(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left[f(x)^2 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)^2 + v(f(x)) \right] dx, \quad (1)$$

здесь d – размерность пространства-времени и v – заданная функция. Она предполагается дифференцируемой и такой, что $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|v'(z_1) - v'(z_2)| < \lambda |z_1 - z_2| \quad \text{и} \quad |v'(z_1)| < \gamma |z_1|, \quad (2)$$

где λ и γ – некоторые положительные числа.

Модели такого типа исследовались в работах [1, 2]. В данной работе мы продолжаем эти исследования с помощью метода стохастического квантования. Мы вводим вспомогательную переменную $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ и строим случайный процесс $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \varphi_t$ со значениями в пространстве $S'(\mathbb{R}^d)$ обобщенных функций умеренного роста такой, что функции Швингера рассматриваемой модели определяются следующим равенством:

$$\mathfrak{S}_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \varphi_t(x_1) \dots \varphi_t(x_n),$$

*Centre Emil Borel, UMS 839 INP (CNRS/UPMC), Paris. Постоянный адрес: кафедра высшей математики МЭИ (ТУ), Москва 105835, Красноказарменная, 14, Россия. E-mail: tmp@genesis.mi.ras.ru

где E обозначает математическое ожидание.

Предполагается, что процесс $t \mapsto \varphi_t$ является решением стохастического уравнения

$$d\varphi_t = -\widehat{K}^2 \frac{\delta A(\varphi_t)}{\delta \varphi_t} dt + \sqrt{2} \widehat{K} dw_t, \quad t > 0, \quad (3)$$

где $\widehat{K}$ – некоторый оператор, явный вид которого будет уточнен ниже, и $t \mapsto w_t$ – стандартный винеровский процесс в $S'(\mathbb{R}^d)$, т.е. $\forall s, t > 0$ и $\forall f, g \in S(\mathbb{R}^d)$ справедливо равенство

$$E\langle w_s, f \rangle \langle w_t, g \rangle = \min\{s, t\} \langle f, g \rangle.$$

Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает форму двойственности между $S'(\mathbb{R}^d)$ и $S(\mathbb{R}^d)$, а также скалярное произведение в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Формальное уравнение Фоккера–Планка для уравнения (3) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{K}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi(x)} \left[\frac{\delta P_t(\varphi)}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi(x)} P_t(\varphi) \right] dx, \quad (4)$$

где P_t – “плотность” вероятностного распределения случайного элемента φ_t . Поскольку φ_t принимает значения в бесконечномерном пространстве, его вероятностное распределение не может иметь плотности. Тем не менее уравнение (4) часто используется в эвристических рассуждениях (см., например, [3]). В частности, уравнение (4) показывает, что

$$P(\varphi) \sim e^{-A(\varphi)}$$

– плотность стационарного вероятностного распределения. Кроме того, это стационарное распределение не зависит от выбора $\widehat{K}$.

Оператор $\widehat{K}$ называется ядром, а уравнение (3) – модифицированным (kerneled) уравнением Ланжевена. Ссылки на работы, в которых применялось модифицированное уравнение Ланжевена, приведены, например, в [4]. Укажем еще работы [5] и [6]. В них уравнение (3) для модели $\lambda\varphi^4$ исследовалось при $d = 2$ в конечной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Использовалось ядро $\widehat{K} = (-\Delta + 1)^{-(1-\varepsilon)/2}$ при $0 < \varepsilon < 1$. Тогда $\text{Tr } \widehat{K}^2 < \infty$ в пополнении $L^2(\Lambda)$ по норме $\|(-\Delta + 1)^{-1/2} \cdot\|$. Уравнение (3) неявно использовалось также в работах [1] и [2]. В них d – произвольное натуральное число, $\widehat{K} = (-\Delta + 1)^{-1/2}$ и в качестве гильбертова пространства, в котором $\text{Tr } \widehat{K}^2 < \infty$, использовалось пополнение $L^2(\mathbb{R}^d)$ по норме $\|\widehat{B} \cdot\|$, где $\widehat{B} = (1 + |x|^2)^{-b}(-\Delta + 1)^{-a}$ при некоторых $b > d/4$ и $a > (d - 2)/4$.

В данной работе мы используем ядро $\widehat{K} = \widehat{H}^{-k}$, где

$$\widehat{H} = -\Delta + 1 + |x|^2 + d.$$

Число k выбирается так, чтобы условие $\text{Tr } \widehat{K}^2 < \infty$ выполнялось в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, $k > d/2$. Мы используем такое k , при котором решение уравнения (3) в каждый

момент времени принадлежит одному и тому же гильбертову пространству достаточно гладких и быстро убывающих функций. Это пространство описано в разделе 1. Пока обозначим его символом Φ . Важно то, что отображение

$$\varphi \in \Phi \mapsto \widehat{K}^2 \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi} \in \Phi \quad (5)$$

определено без каких-либо регуляризаций. Более того мы доказываем в разделе 2, что это отображение удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, можно применить стандартные теоремы и доказать, что задача Коши для (3) при любом начальном распределении в пространстве Φ имеет единственное решение. Оно определено при всех $t > 0$ и является марковским процессом.

В разделе 3 мы доказываем, что вероятностные распределения случайных величин φ_t слабо сходятся при $t \rightarrow \infty$ к некоторой мере на $S'(\mathbb{R}^d)$.

В заключении кратко обсуждаются полученные результаты.

1. ПРОСТРАНСТВО Φ

Для каждого $l \in \mathbb{R}$ определим норму $\|\cdot\|_l$ в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ как отображение

$$f \in S(\mathbb{R}^d) \mapsto \|f\|_l := \|\widehat{H}^l f\|.$$

В частности, $\|\cdot\|_0$ — стандартная норма $\|\cdot\|$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Пополнение $S(\mathbb{R}^d)$ относительно нормы $\|\cdot\|_l$ обозначим символом $\mathcal{D}(\widehat{H}^l)$. Свойства элементов пространства $\mathcal{D}(\widehat{H}^l)$ характеризуются следующей теоремой (ср. [7]).

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $j = 0, 1, 2, \dots$ и любого*

$$l > (j + d)/d \quad (6)$$

имеет место вложение $\mathcal{D}(\widehat{H}^l) \subset C^{(j)}(\mathbb{R}^d)$. Кроме того, существует число $Q_j > 0$ такое, что $\forall f \in \mathcal{D}(\widehat{H}^l)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{C^{(j)}} \leq Q_j \|f\|_l. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $n_1, \dots, n_d = 0, 1, \dots$ пусть $\psi_{n_1, \dots, n_d}$ — собственная функция оператора $\widehat{H}$, т.е.

$$\widehat{H} \psi_{n_1, \dots, n_d} = [2(n_1 + \dots + n_d + d) + d] \psi_{n_1, \dots, n_d}$$

и

$$\langle \psi_{n_1, \dots, n_d}, \psi_{k_1, \dots, k_d} \rangle = \delta_{n_1, k_1} \dots \delta_{n_d, k_d}.$$

Иначе говоря,

$$\psi_{n_1, \dots, n_d}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d (\pi^{1/2} 2^{n_k} n_k!)^{-1/2} H_{n_k}(x_k) e^{-x_k^2/2},$$

где H_n – многочлены Эрмита n -й степени в смысле Куранта и Гильберта (см., например, [8]).

Функция f принадлежит $\mathcal{D}(\hat{H}^l)$ тогда и только тогда, когда

$$f = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_d} \psi_{n_1, \dots, n_d}, \quad (8)$$

где коэффициенты $c_{n_1, \dots, n_d}$ таковы, что

$$\sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} [2(n_1 + \dots + n_d) + 3d]^{2l} |c_{n_1, \dots, n_d}|^2 < \infty.$$

Если $l > d/2$, то ряд (8) сходится равномерно, поскольку из формулы (10.18.49) в [8] следует, что

$$|\psi_{n_1, \dots, n_d}| < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/4},$$

и, кроме того, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} |c_{n_1, \dots, n_d}| &\leq \left\{ \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} [2(n_1 + \dots + n_d) + 3d]^{-2l} \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} [2(n_1 + \dots + n_d) + 3d]^{2l} |c_{n_1, \dots, n_d}|^2 \right\}^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, если $l > d/2$, то $\mathcal{D}(\hat{H}^l) \subset C(\mathbb{R}^d)$ и неравенство (7) выполняется при $j = 0$.

Предположим теперь, что теорема справедлива при $j = j_0$, где j_0 – некоторое неотрицательное целое число, и докажем, что она справедлива при $j = j_0 + 1$.

Если $f \in S(\mathbb{R}^d)$, то $\|\partial_i f\|_{C^{(j)}} \leq Q_j \|\partial_i f\|_{l_j}$. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_i f &= \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_d} \partial_i \psi_{n_1, \dots, n_d} = \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_d} \left[\sqrt{\frac{n_i}{2}} \psi_{n_1, \dots, n_i-1, \dots, n_d} \sqrt{\frac{n_i+1}{2}} \psi_{n_1, \dots, n_i+1, \dots, n_d} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\partial_i f\|_{l_j} \leq \|f\|_{l_j+1/2}$ и

$$\|f\|_{C^{(j+1)}} \leq \|f\|_{C^{(j)}} + \sum_{i=1}^d \|\partial_i f\|_{C^{(j)}} \leq Q_j \|f\|_{l_j} + d \|f\|_{l_j+1/2} \leq (Q_j + d) \|f\|_{l_j+1/2}.$$

Таким образом, если $l \geq l_j + 1/2$, то $\mathcal{D}(\hat{H}^l) \subset C^{(j+1)}$ и справедливо неравенство (7). Мы получили также, что $Q_{j+1} \geq Q_j + d$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для моделей с пространственным обрезанием можно использовать оператор $\widehat{H}_0$ вместо $\widehat{H}$. Тогда теорема 1 должна быть заменена теоремой Соболева о вложении. $\square$

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $f \in S(\mathbb{R}^d)$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{H}_0 \widehat{H}^{-1} f\| \leq \|f\| \quad (9)$$

и $\forall m = 0, 1, \dots, \forall l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ неравенство

$$\|\widehat{H}^l |x|^{2m} f\| \leq C_{l,m} \|\widehat{H}^{l+m} f\|. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать неравенство (9), достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \|f\|^2 - \|\widehat{H}_0 \widehat{H}^{-1} f\| &= \langle \widehat{H}^{-1} f, (\widehat{H}_0 U + U \widehat{H}_0 + U^2) \widehat{H}^{-1} f \rangle = \\ &= 2 \langle \nabla g, U \nabla g \rangle + \langle g, (U^2 + 2U - \Delta U) g \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

где $U = |x|^2 + d$ и $g = \widehat{H}^{-1} f$.

Для того чтобы доказать неравенство (10), положим

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + \partial_i) \quad \text{и} \quad a_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - \partial_i),$$

тогда

$$\widehat{H} = 2 \sum_{i=1}^d a_i^+ a_i + 2d + 1$$

и

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^d a_i^+ a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d [(a_i^+)^2 + a_i^2] + \frac{d}{2}.$$

Теперь, используя коммутационные соотношения

$$[a_{i_1}, a_{i_2}^+] = \delta_{i_1, i_2},$$

мы получаем, что

$$\|\widehat{H}^l |x|^{2m} f\|^2 \leq \sum_{\alpha=0}^{l+m} c_\alpha \|\widehat{H}^\alpha f\|^2 \leq \|\widehat{H}^{l+m} f\|^2 \sum_{\alpha=0}^{l+m} c_\alpha. \quad \square$$

Из (7) и (10) следует, что $\forall f \in S(\mathbb{R}^d), \forall m = 0, 1, \dots$ и $\forall l = (d+1)/2, (d+2)/2, \dots$ имеем

$$\| |x|^{2m} f \|_C \leq Q_0 \|\widehat{H}^l |x|^{2m} f\| \leq Q_0 C_{l,m} \|\widehat{H}^{l+m} f\|.$$

Таким образом, $\forall f \in \mathcal{D}(\hat{H}^{l+m})$, $\forall m = 0, 1, \dots$ и $\forall l = (d+1)/2, (d+2)/2, \dots$ справедливо неравенство

$$\| |x|^{2m} f \|_C \leq G_{l,m} \|f\|_{l+m} \quad (11)$$

при некотором $G_{l,m} > 0$.

Теперь определим пространство Φ , в котором содержатся выборочные траектории процесса $t \mapsto \varphi_t$.

Поскольку $E\langle w_t, f \rangle^2 = t\|f\|^2$, то w_t почти наверное лежит в $\mathcal{D}(\hat{H}^{-k_0})$ при любом $k_0 > d/2$. Следовательно,

$$\hat{K}w_t = \hat{H}^{-k}w_t \in \mathcal{D}(\hat{H}^{k-k_0}).$$

Выберем некоторые $k_0 > d/2$ и $k > k_0$ такие, что

$$k - k_0 \geq (d+3)/2. \quad (12)$$

Затем положим

$$\Phi = \mathcal{D}(\hat{H}^{k-k_0}). \quad (13)$$

По теореме 1

$$\Phi \subset C^{(2)}(\mathbb{R}^d).$$

Используя (11) с $m = 1$ и $l = (d+1)/2$, мы получаем, что

$$f \in \Phi \Rightarrow \| |x|^2 f \|_C \leq G \|f\|_\Phi. \quad (14)$$

Итак, каждый элемент пространства Φ есть функция $\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, которая стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и имеет ограниченные непрерывные производные первого и второго порядков.

Дополнительно к (12) мы предполагаем, что число k таково, что выполняются следующие два условия:

$$\Phi \subset \mathcal{D}(\hat{H}_0^{1/2}) \quad (15)$$

и

$$\forall p \in [2, \infty[\quad \Phi \subset L^p(\mathbb{R}^d), \quad (16)$$

причем

$$\forall \varphi \in \Phi \quad \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq O(1) \|\varphi\|_\Phi. \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Поскольку $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ справедливо неравенство

$$\|\hat{H}_0^{1/2}\varphi\| \leq \|\hat{H}^{1/2}\varphi\|,$$

условие (15) выполняется при $k - k_0 > 1/2$, т.е. заведомо при всех k и k_0 , для которых справедливо неравенство (12).

2. Вложение (16) справедливо, поскольку $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\Phi \subset C(\mathbb{R}^d)$.

3. Неравенство (17) действительно выполняется при достаточно большом числе k . В этом можно убедиться, заметив, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{(d+1)/2} |\varphi(x)|^p \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{(d+1)/2}} = \\ &= \left[\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{(d+1)/(2p)} |\varphi(x)| \right]^p \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{(d+1)/2}}. \end{aligned}$$

Поэтому, если m — натуральное число, большее чем $(d+1)/(2p)$, то в силу (11) неравенство (17) выполняется при

$$k - k_0 \geq m + (d+1)/2. \quad \square$$

2. ПРОЦЕСС $t \mapsto \varphi_t$

В этом разделе мы исследуем уравнение (3).

ТЕОРЕМА 3. *Отображение (5) принимает значения в пространстве Φ и $\forall \varphi, \psi \in \Phi$ справедливо неравенство*

$$\left\| \hat{K}^2 \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi} - \hat{K}^2 \frac{\delta A(\psi)}{\delta \psi} \right\|_{2k-1} \leq (C+1) \|\varphi - \psi\|. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $q \in \mathcal{D}(\hat{H}^{-2k+1})$ и любого $\varphi \in \Phi$ справедливы неравенства

$$\left| \left\langle \hat{K}^2 \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi}, q \right\rangle \right| \leq |\langle v'(\varphi), \hat{H}^{-2k} q \rangle| + |\langle \varphi, \hat{H}_0 \hat{H}^{-2k} q \rangle| \leq (C+1) \|\varphi\| \|\hat{H}^{-2k+1} q\|.$$

Следовательно,

$$\left\| \hat{K}^2 \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi} \right\|_{2k-1} \leq (C+1) \|\varphi\|$$

и

$$\left\| \hat{K}^2 \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi} \right\|_{\Phi} \leq (C+1) \|\varphi\|_{\Phi},$$

поскольку

$$\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\Phi} = \|\cdot\|_{k-k_0} \leq \|\cdot\|_{2k-1}. \quad (19)$$

Таким образом, отображение (5) принимает значения в Φ . Аналогично можно доказать неравенство (18). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, мы доказали, что отображение (5) действует из $L^2(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{D}(\widehat{H}^{2k-1}) \subset \Phi$. $\square$

Используя (18) и (19), получаем, что отображение (5) удовлетворяет следующему условию Липшица:

$$\forall \varphi, \psi \in \Phi \quad \left\| \widehat{K}^2 \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi} - \widehat{K}^2 \frac{\delta A(\psi)}{\delta \psi} \right\|_{\Phi} \leq (C+1) \|\varphi - \psi\|_{\Phi}. \quad (20)$$

Следовательно, уравнение (3) является стохастическим уравнением типа Ито в гильбертовом пространстве Φ с липшицевым коэффициентом сноса $\widehat{K}^2 \delta A(\varphi_t) / \delta \varphi_t$. В силу стандартных теорем (см., например, [9, гл. VII.2.1]) при любом вероятностном распределении начального значения φ_0 в Φ существует единственное решение $t \mapsto \varphi_t$ уравнения (3). Это решение определено при всех $t \geq 0$ и является однородным по времени марковским процессом.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ φ_t

Здесь мы докажем, что вероятностные распределения случайных элементов φ_t ($t \geq 0$) слабо сходятся к некоторой вероятностной мере на $S'(\mathbb{R}^d)$. Начнем с того, что установим одно соотношение для $\mathbb{E} \|\widehat{K} \widehat{H}_0 \varphi_t\|^2$.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого φ_0 , для которого $\mathbb{E} \|\widehat{H}_0^{1/2} \varphi_0\| < \infty$, существует последовательность $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ и*

$$\sup_n \mathbb{E} \|\widehat{K} \widehat{H}_0 \varphi_{t_n}\|^2 < \infty. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу Ито для $\|\widehat{H}_0^{1/2} \varphi_t\|^2$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\widehat{H}_0^{1/2} \varphi_t\|^2 &= \mathbb{E} \|\widehat{H}_0^{1/2} \varphi_0\|^2 + 2t \operatorname{Tr} \widehat{K} \widehat{H}_0 \widehat{K} - \\ &\quad - 2 \int_0^t \mathbb{E} [\|\widehat{K} \widehat{H}_0 \varphi_s\|^2 + \langle \widehat{K} \widehat{H}_0 \varphi_s, \widehat{K} v'(\varphi_s) \rangle] ds. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} a &= \mathbb{E} \|\widehat{H}_0^{1/2} \varphi_0\|^2, \\ b &= 2 \operatorname{Tr} \widehat{K} \widehat{H}_0 \widehat{K}, \\ c &= \sup_{\varphi \in \Phi} \|\widehat{K} v'(\varphi)\| \end{aligned}$$

и

$$U(t) = \int_0^t \mathbb{E} \|\widehat{K} \widehat{H}_0 \varphi_s\|^2 ds,$$

тогда

$$0 \leq a + bt + 2c\sqrt{tU(t)} - 2U(t).$$

Следовательно,

$$\int_0^t \mathbb{E} \|\hat{K} \hat{H}_0 \varphi_s\|^2 ds \leq a + (a + b + c^2) \frac{t}{2}.$$

Теперь утверждение теоремы очевидно. $\square$

Используя неравенство Чебышева, мы выводим из (21), что $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\text{Prob}\{\|\hat{K} \hat{H}_0 \varphi_{t_n}\| > r\} \leq \frac{D}{r^2},$$

где D — левая часть неравенства (21).

Обозначим символом P_n вероятностное распределение φ_{t_n} , а символом μ_n — расширение P_n на пополнение $\mathcal{D}(\hat{H}^{-\varepsilon} \hat{K} \hat{H}_0)$ пространства $\mathcal{D}(\hat{K} \hat{H}_0)$ по норме $\|\hat{H}^{-\varepsilon} \hat{K} \hat{H}_0 \cdot\|$ при некотором $\varepsilon > 0$. Естественное вложение $\mathcal{D}(\hat{K} \hat{H}_0) \subset \mathcal{D}(\hat{H}^{-\varepsilon} \hat{K} \hat{H}_0)$ компактно. Следовательно, семейство мер μ_n ($n \in \mathbb{N}$) на $\mathcal{D}(\hat{H}^{-\varepsilon} \hat{K} \hat{H}_0)$ слабо предкомпактно. Таким образом, существуют последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots$ и вероятностная мера μ на $\mathcal{D}(\hat{H}^{-\varepsilon} \hat{K} \hat{H}_0)$ такие, что последовательность $\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \dots$ слабо сходится к μ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование модифицированного уравнения Ланжевена с подходящим ядром $\hat{K}$ позволило нам обойтись без каких-либо промежуточных регуляризаций. Заметим, что регуляризации необходимы тогда, когда требуется определить функционал действия на пространстве обобщенных функций и затем строить меру Нельсона как слабый предел мер

$$e^{-\int \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{rag}}(\varphi(x)) dx} d\mu_{\text{free}}(\varphi) \quad (22)$$

при снятии регуляризации. В данной статье функционал действия не продолжался с того пространства гладких функций, на котором он определен в классической теории. Вместо этого использовалось продолжение вероятностных распределений случайных элементов φ_t ($t \geq 0$). Эти распределения изначально заданы на пространстве Φ . Мы продолжили их с Φ на $S'(\mathbb{R}^d)$ и показали, что продолженные вероятностные распределения слабо сходятся к некоторой вероятностной мере на $S'(\mathbb{R}^d)$. Заметим, что продолжение мер в отличие от продолжения функционалов обычно не вызывает никаких затруднений.

Предположим, что $\forall t > 0$ вероятностное распределение случайного элемента φ_t может быть представлено в виде

$$\varrho(\varphi_t) d\mu_{\text{free}}(\varphi_t). \quad (23)$$

Если это действительно так, то сравнивая (22) и (23), можно узнать, какой регуляризации эквивалентно использование стохастического квантования с помощью модифицированного уравнения Ланжевена. Понятно, что регуляризованные функционалы действия зависят только от одного параметра t , а не от нескольких параметров типа размеров пространственного и импульсного обрезаний. Этим стохастическое квантование отличается от других способов построения квантово-полевых моделей.

Коэффициент сноса $\widehat{K}^2 \delta A / \delta \varphi$ для полиномиальных моделей типа $\lambda \varphi^4$ удовлетворяет условию Липшица лишь локально (ср. с теоремой 3). Тем не менее можно доказать, что для модели $\lambda \varphi^4$ в пространстве-времени произвольной размерности уравнение (3) имеет решения, определенные при всех $t > 0$. Мы надеемся опубликовать результаты, относящиеся к модели $\lambda \varphi^4$, в отдельной статье.

Эта работа выполнена во время пребывания автора в институте им. А. Пуанкаре (Франция) в рамках организованного центром Э. Бореля семестрового цикла лекций и семинаров, посвященных функциональному интегрированию. Автор благодарен организаторам цикла Ж.-М. Бисмю, С. де Витт-Моретт и П. Картье за предоставленную возможность принять участие в работе цикла. Автор благодарен также профессорам Д. Бриджесу и С. де Витт-Моретт за весьма полезные замечания и О.В. Зиминной за постоянную помощь и заботу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 96-01-00726).

Список литературы

- [1] А. И. Кириллов. ТМФ. 1994. Т. 98. С. 12–28.
- [2] А. И. Кириллов. ТМФ. 1995. Т. 105. С. 179–197.
- [3] М. Namiki. Stochastic Quantization. Berlin: Springer, 1992.
- [4] О. И. Завьялов, М. Каненага, А. И. Кириллов, В. Ю. Мамакин, М. Намики, И. Охба, Е. В. Поляченко. ТМФ. 1996. Т. 109. С. 175–186.
- [5] G. Jona-Lasinio, S. K. Mitter. Commun. Math. Phys. 1985. V. 101. P. 409–436.
- [6] B. S. Borkar, R. T. Chari, S. K. Mitter. J. Funct. Anal. 1988. V. 81. P. 184–206.
- [7] B. Simon. J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 140–148.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [9] Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерном пространстве. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 28.XI.1997 г.