Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Перескоков, Квазиклассическая асимптотика спектра оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 1, 88–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:26:34

© 2014 г.

А. В. Перескоков^{*†}

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

Рассматривается задача на собственные значения для возмущенного двумерного осциллятора в случае резонанса частот. Возбуждающий потенциал задается интегральной нелинейностью типа Хартри с гладким потенциалом самодействия. Найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции вблизи верхних границ спектральных кластеров, которые образуются вокруг уровней энергии невозмущенного оператора. Для их вычисления использованы асимптотические формулы квантовых средних.

Ключевые слова: самосогласованное поле, метод квантового усреднения, когерентное преобразование, ВКБ-приближение, спектральный кластер, квантовое среднее.

DOI: 10.4231/tmf8561

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\left(\mathbf{H}_0 + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} W(|q - q'|^2) |\psi(q')|^2 dq' \right) \psi = \lambda \psi, \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

– двумерный осциллятор, $W(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$ – произвольный многочлен второй степени с вещественными коэффициентами, $\hbar > 0$, $\varepsilon > 0$ – малые параметры, причем $\varepsilon \ll \hbar$. Для определенности рассмотрим случай $\varepsilon = \hbar^2$ и $w_2 > 0$.

^{*}Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Национальный исследовательский университет МЭИ, Москва, Россия. E-mail: pereskokov62@mail.ru

[†]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики Московский институт электроники и математики “МИЭМ НИУ ВШЭ”, Москва, Россия

Уравнение самосогласованного поля во внешнем поле с гладким потенциалом взаимодействия W играет фундаментальную роль в квантовой теории и нелинейной оптике, в частности в теории конденсата Бозе–Эйнштейна [1] и при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК [2].

Асимптотическим решениям уравнений типа Хартри, локализованным вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве, посвящено большое число работ (см., например, [3]–[12]). Особенностью задачи (1.1) является то, что она относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора $\mathbf{H}_0$ равны единице. Но в этом случае лучевой метод [13] и общая теория комплексного роста Маслова [3], которые позволяют строить асимптотические при $\hbar \rightarrow 0$ решения, локализованные вблизи точек, траекторий, торов и иных маломерных подмногообразий, неприменимы [14].

Метод построения квазиклассических асимптотик для уравнений с частотными резонансами был разработан в серии работ М. В. Карасева [15]–[17]. Он основан на алгебраическом усреднении возмущения, последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе.

Особый интерес представляют решения уравнений типа (1.1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного уравнения (при $\varepsilon = 0$), где упомянутые лагранжевы подмногообразия почти схлопываются, и интегральное представление решения над ними становится невозможным. В работах [18], [19] на примере спектральной задачи для двумерного возмущенного осциллятора был предложен метод нахождения серий асимптотических собственных значений вблизи границ спектральных кластеров. Он основан на новом интегральном представлении (см. формулу (3.8) настоящей работы). В работах [20], [21] этот метод был использован при изучении асимптотики спектра атома водорода в магнитном поле.

В настоящей работе указанный метод применен для нахождения асимптотических собственных значений оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров (см. теорему 1). В силу нелинейности оператора собственным значениям соответствуют однопараметрические семейства асимптотических собственных функций. Помимо нелинейности, имеется еще целый ряд свойств, отличающих задачу (1.1) от рассмотренных ранее. Например, после усреднения и когерентного преобразования в случае уравнения (1.1) получается уравнение, которое имеет иррегулярные особые точки (см. уравнение (3.3) настоящей работы). Оно не является уравнением класса Фукса [22], в отличие от работ [18]–[21].

Задача, подобная (1.1), но без резонансов рассматривалась ранее в работе [5], где для оператора типа Хартри была построена асимптотика серии собственных значений. Эта серия соответствует радиально несимметричным собственным функциям с большим орбитальным числом, произвольным магнитным числом и с небольшим радиальным числом. Отметим также работы [10], [11], где для небольших квантовых чисел была найдена серия асимптотических собственных значений для оператора типа Хартри. Она отвечает точке покоя системы Гамильтона–Эренфеста, ассоциированной с оператором Хартри.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ И КОГЕРЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Заметим, что оператор в левой части уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V(q_1, q_2),$$

где $V(q_1, q_2)$ – многочлен четвертой степени от q_1, q_2 , коэффициенты которого интегрально зависят от $|\psi|^2$. Применим к уравнению (1.1) квантовую версию метода усреднения [14], [23]. Исходная идея метода состоит в том, чтобы найти такой обратимый оператор $\mathbf{U}$ и такой оператор $\underline{\mathbf{V}}_0$, чтобы были выполнены равенства

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V)\mathbf{U} = \mathbf{H}_0 + \hbar^2 \underline{\mathbf{V}}_0 + O(\hbar^4), \quad [\underline{\mathbf{V}}_0, \mathbf{H}_0] = 0.$$

Новый возмущающий оператор $\underline{\mathbf{V}}_0$ коммутирует со старшей частью оператора $\mathbf{H}_0$. Поэтому решение спектральной задачи для оператора $\mathbf{H}_0 + \hbar^2 V$ сводится к решению спектральной задачи для оператора $\underline{\mathbf{V}}_0$ на собственном подпространстве оператора $\mathbf{H}_0$. Отметим, что реализовать эту идею удастся лишь при достаточно жестких ограничениях на оператор $\mathbf{H}_0$. А именно, должно быть выполнено условие

$$\exp\left\{\frac{2\pi i}{\hbar}\mathbf{H}_0\right\} = I,$$

где I – единичный оператор.

В случае задачи (1.1) оператор $\underline{\mathbf{V}}_0$ может быть представлен в виде

$$\underline{\mathbf{V}}_0 = 2w_2 f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) + b_0,$$

где f – многочлен второй степени, b_0 – константа, а $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ – симметризованные по Вейлю “швингеровские” образующие алгебры вращений [24], удовлетворяющие циклическим коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i\hbar\mathbf{S}_3, \quad [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = i\hbar\mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = i\hbar\mathbf{S}_2.$$

На гильбертовом подпространстве $\mathcal{H}_\ell \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ собственных функций оператора $\mathbf{H}_0$, отвечающих собственному значению $\hbar(\ell+1)$, где $\ell = 0, 1, 2, \dots$, получаем спектральную задачу

$$f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)\varphi = \xi\varphi, \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}_\ell} = 1. \quad (2.1)$$

Ее собственные значения обозначим через $\xi = \xi_{k,\ell}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и упорядочим их по убыванию. Рассмотрим число ℓ порядка $\hbar^{-1}$. Тогда спектр исходной задачи (1.1) имеет следующую асимптотику:

$$\lambda = \hbar(\ell+1) + \hbar^2(2w_2\xi_{k,\ell} + b_0) + O(\hbar^4). \quad (2.2)$$

Асимптотика соответствующих собственных функций дается формулой

$$\psi = \mathbf{U}\varphi_{k,\ell} + O(\hbar^3), \quad (2.3)$$

где $\varphi_{k,\ell}$ – собственная функция задачи (2.1), которая отвечает собственному значению $\xi_{k,\ell}$. Оператор $\mathbf{U}$ можно найти в явном виде [14], [19].

Положим $a = \ell\hbar/2$. В случае задачи (1.1) вычисления, аналогичные проведенным в работе [19], приводят к формулам для многочлена

$$f(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) = -\mathbf{S}_2^2 + b_1\mathbf{S}_1 + b_3\mathbf{S}_3 \quad (2.4)$$

и констант

$$b_0 = w_0 + 4\sqrt{a(a+\hbar)}w_1 + [28a(a+\hbar) - 2(\mathbf{S}_2^2\varphi, \varphi)\mathcal{H}_\ell]w_2, \quad (2.5)$$

$$b_1 = 4(\mathbf{S}_1\varphi, \varphi)\mathcal{H}_\ell, \quad b_3 = 4(\mathbf{S}_3\varphi, \varphi)\mathcal{H}_\ell. \quad (2.6)$$

Чтобы решить задачу (2.1), воспользуемся когерентным преобразованием [25]

$$I_\ell(g) = \frac{\ell+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} g(\bar{z})|z\rangle \frac{d\bar{z}dz}{(1+|z|^2)^{\ell+2}}, \quad (2.7)$$

где

$$|z\rangle = \frac{(1+z^2)^{\ell/2}}{\sqrt{\pi 2^\ell \ell! \hbar}} H_\ell\left(\frac{q_1 + zq_2}{\sqrt{\hbar}\sqrt{1+z^2}}\right) e^{-(q_1^2 + q_2^2)/2\hbar},$$

а $H_\ell(q)$ – полиномы Эрмита. Оно отображает гильбертово пространство $\mathcal{P}_\ell$ антиголоморфных многочленов степени не выше ℓ на гильбертово пространство $\mathcal{H}_\ell$. Скалярное произведение в $\mathcal{P}_\ell$ задается следующей формулой [25]:

$$(g_1, g_2)_{\mathcal{P}_\ell} = \frac{\ell+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} g_1(\bar{z})\overline{g_2(\bar{z})} \frac{d\bar{z}dz}{(1+|z|^2)^{\ell+2}}. \quad (2.8)$$

Будем искать решение задачи (2.1) в виде $\varphi_{k,\ell} = I_\ell(\Phi_{k,\ell}(\bar{z}))$. Поскольку в результате когерентного преобразования (2.7) операторы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ преобразуются в дифференциальные операторы первого порядка [25]

$$\begin{aligned} \overset{0}{S}_1 &= \frac{\hbar}{2} \left(\bar{z}\ell + (1 - \bar{z}^2) \frac{d}{d\bar{z}} \right), \\ \overset{0}{S}_2 &= \frac{i\hbar}{2} \left(\bar{z}\ell - (1 + \bar{z}^2) \frac{d}{d\bar{z}} \right), \\ \overset{0}{S}_3 &= \hbar \left(\frac{\ell}{2} - \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

мы получаем следующее уравнение для $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$:

$$f(\overset{0}{S}_1, \overset{0}{S}_2, \overset{0}{S}_3)\Phi_{k,\ell}(\bar{z}) = \xi_{k,\ell}\Phi_{k,\ell}(\bar{z}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Здесь функция f определена формулой (2.4). Назовем собственными числами уравнения (2.10) такие значения параметра $\xi_{k,\ell}$, при которых это уравнение имеет полиномиальное решение в пространстве $\mathcal{P}_\ell$. В силу унитарности когерентного преобразования мы имеем

$$\|\Phi_{k,\ell}\|_{\mathcal{P}_\ell} = 1. \quad (2.11)$$

Пусть $\bar{z} = x_0$ – точка, в малой окрестности которой локализована собственная функция $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$. Из предположения о единственности такой точки вытекает, что $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, как связана эта точка со спектром оператора Хартри.

Рассмотрим сужение функции (2.4) на сферу Ω_ℓ , заданную уравнением

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = a(a + \hbar), \quad (2.12)$$

которая является симплектическим листом для алгебры вращений. Введем на Ω_ℓ кэлерову структуру с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{S_1 + iS_2}{\sqrt{a(a + \hbar)} + S_3}. \quad (2.13)$$

Пусть $\bar{z}$ – функция, комплексно-сопряженная (2.13). Тогда в силу равенств (2.12) и (2.13) мы имеем [25]

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \\ S_2 &= i\sqrt{a(a + \hbar)} \frac{\bar{z} - z}{1 + |z|^2}, \\ S_3 &= \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Далее перейдем в f от координат S_1, S_2, S_3 к новым координатам $z, \bar{z}$. В результате сужение функции (2.4) на сферу Ω_ℓ примет вид

$$f_{\Omega_\ell}(z, \bar{z}) = a(a + \hbar) \frac{(\bar{z} - z)^2}{(1 + |z|^2)^2} + b_1 \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} + b_3 \sqrt{a(a + \hbar)} \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (2.15)$$

Чтобы вычислить значения коэффициентов b_1, b_3 , воспользуемся формулами для средних значений дифференциальных операторов на решениях задачи (1.1) вблизи границ спектральных кластеров [18], [19]. Поскольку собственные функции $\varphi_{k,\ell}(z, \bar{z})$ локализованы в малой окрестности точки $z = \bar{z} = x_0$, для вычисления квантовых средних операторов $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_3$ достаточно заменить функции в (2.14) их значениями в точке $z = \bar{z} = x_0$. В результате в силу формул (2.6) получаем, что при $\hbar \rightarrow 0$

$$b_1 \sim 4\sqrt{a(a + \hbar)} \frac{2x_0}{1 + x_0^2}, \quad b_3 \sim 4\sqrt{a(a + \hbar)} \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2}. \quad (2.16)$$

Приведенные выше формальные рассуждения будут далее строго обоснованы (см. лемму 4).

Подставляя асимптотики (2.16) в формулу (2.15), окончательно получаем

$$f_{\Omega_\ell}(z, \bar{z}) \sim a(a + \hbar) \left[\frac{(\bar{z} - z)^2}{(1 + |z|^2)^2} + \frac{8x_0(z + \bar{z})}{(1 + x_0^2)(1 + |z|^2)} + \frac{4(1 - x_0^2)(1 - |z|^2)}{(1 + x_0^2)(1 + |z|^2)} \right].$$

Глобальный максимум этой функции достигается в точке x_0 и равен

$$4a(a + \hbar) = 4a^2 + O(\hbar).$$

Число $4a^2$ определяет верхнюю границу спектрального кластера. Далее мы вычислим поправку к этому числу (см. формулу (6.7)).

Неоднозначность в выборе точки x_0 , вблизи которой локализовано решение, связана с неединственностью собственной функции в задаче (1.1). Действительно, собственные функции инвариантны относительно сдвига полярного угла. Это свойство сохраняется и после усреднения. Следовательно, в пространстве $\mathcal{P}_\ell$ также имеется однопараметрическое семейство собственных функций (многочленов), параметризуемое числом $x_0 \in \mathbb{R}$. Оператор, преобразующий одну собственную функцию в другую, приведен ниже (см. формулу (5.12)). Отметим, что для многомерных нестационарных уравнений типа Хартри операторы симметрии найдены в работе [12].

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим уравнение (2.1), где функция f имеет вид (2.4). С учетом соотношений (2.16) будем искать b_1 и b_3 в виде

$$b_1 = \frac{8ax_0}{1+x_0^2} + \hbar b_1^{(1)} + O(\hbar^2), \quad b_3 = 4a \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} + \hbar b_3^{(1)} + O(\hbar^2), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Кроме того, положим

$$\xi_{k,\ell} = 4a^2 + \hbar \xi_{k,\ell}^{(1)} + O(\hbar^2), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Числа $b_1^{(1)}$, $b_3^{(1)}$, $\xi_{k,\ell}^{(1)}$ будут определены ниже при вычислении поправок в квантовых средних. Учитывая формулы (2.9), а также отбрасывая в разложениях (3.1), (3.2) слагаемые порядка $O(\hbar^2)$, приходим к уравнению (далее для упрощения обозначений индексы k, ℓ у функции $\Phi(\bar{z})$ мы опускаем)

$$\begin{aligned} & \hbar^2 R^2(\bar{z}) \frac{d^2 \Phi}{d\bar{z}^2} + \left\{ -4a\hbar \left[\bar{z} R(\bar{z}) + \frac{4(1-x_0^2)\bar{z} - 4x_0(1-\bar{z}^2)}{R(x_0)} \right] + \right. \\ & \quad \left. + 2\hbar^2 [\bar{z} R(\bar{z}) - 2b_3^{(1)}\bar{z} + b_1^{(1)}(1-\bar{z}^2)] \right\} \frac{d\Phi}{d\bar{z}} + \\ & \quad + \left\{ 4a^2 \left[\bar{z}^2 + \frac{8x_0(\bar{z}-x_0)}{R(x_0)} \right] + 2a\hbar \left[-R(\bar{z}) + 2 \left(b_3^{(1)} - \frac{\xi_{k,\ell}^{(1)}}{a} \right) + 2b_1^{(1)}\bar{z} \right] \right\} \Phi = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$R(\bar{z}) = \bar{z}^2 + 1. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.3) имеет две особые точки $\bar{z}_1 = i$ и $\bar{z}_2 = -i$, которые являются корнями уравнения $R(\bar{z}) = 0$, а также особую точку $\bar{z}_3 = \infty$. Точки $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ являются иррегулярными, а точка $\bar{z}_3$ — регулярной.

Уравнения Фукса с тремя особыми точками порождают хорошо известные системы классических ортогональных полиномов [26]. Для уравнения (3.3) подобной теории не существует.

Нам потребуются некоторые результаты теории когерентных преобразований [25]. Наряду с пространством $\mathcal{P}_\ell$ рассмотрим дуальное ему гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{P}}_\ell$, состоящее из мероморфных распределений на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ вида

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{\tilde{g}_n}{z^{n+1}}.$$

Двойственность между пространствами $\tilde{\mathcal{P}}_\ell$ и $\mathcal{P}_\ell$ задается отображением

$$\mathcal{K}: \tilde{\mathcal{P}}_\ell \rightarrow \mathcal{P}_\ell, \quad (\mathcal{K}\tilde{g})(\bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} K(\bar{w}, z) \tilde{g}(z) dz,$$

где воспроизводящее ядро определяется как

$$K(\bar{w}, z) = (1 + \bar{w}z)^\ell, \quad (3.5)$$

а γ – замкнутый контур вокруг точки $z = 0$, ориентированный против часовой стрелки. Обратное отображение имеет вид

$$(\mathcal{K}^{-1}g)(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{L}(\bar{w}, z) g(\bar{w}) d\bar{w},$$

где мероморфное воспроизводящее ядро задается как

$$\tilde{L}(\bar{w}, z) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{n!(\ell - n)!}{\ell! (\bar{w}z)^{n+1}}. \quad (3.6)$$

Обозначим через $G(\bar{u}, \bar{w})$ ядро суперпозиции операторов $\mathcal{K}^{-1}$, $\mathcal{K}$. Из формул (3.5) и (3.6) вытекает, что

$$G(\bar{u}, \bar{w}) = \frac{\bar{u}^{\ell+1} - \bar{w}^{\ell+1}}{\bar{u}^{\ell+1}(\bar{u} - \bar{w})}. \quad (3.7)$$

Данное ядро в пространстве $\mathcal{P}_\ell$ определяет тождественный оператор, а на множестве J антиголоморфных в окрестности нуля функций является проектором на пространство $\mathcal{P}_\ell$.

Будем искать решение уравнения (3.3) в виде

$$\Phi(\bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} G(\bar{u}, \bar{z}) p(\bar{u}) d\bar{u}, \quad p \in J, \quad (3.8)$$

где G задается формулой (3.7). Под действием отображения (3.8) операторы $\overset{0}{S}_1, \overset{0}{S}_2, \overset{0}{S}_3$ преобразуются в операторы $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$, действующие из J в J , а уравнение (3.3) – в уравнение

$$\left(-\hat{S}_2^2 + \left[\frac{8ax_0}{1+x_0^2} + \hbar b_1^{(1)} \right] \hat{S}_1 + \left[4a \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} + \hbar b_3^{(1)} \right] \hat{S}_3 - 4a^2 - \hbar \xi_{k,\ell}^{(1)} \right) p = 0. \quad (3.9)$$

Справедлива следующая лемма [19].

ЛЕММА 1. Операторы $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \widehat{S}_3$ имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{S}_1 &= \frac{\hbar}{2} \left(\bar{u}\ell + (1 - \bar{u}^2) \frac{d}{d\bar{u}} - \frac{\bar{u}^\ell}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}} \right), \\ \widehat{S}_2 &= \frac{i\hbar}{2} \left(\bar{u}\ell - (1 + \bar{u}^2) \frac{d}{d\bar{u}} + \frac{\bar{u}^\ell}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}} \right), \\ \widehat{S}_3 &= \hbar \left(\frac{\ell}{2} - \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \right).\end{aligned}$$

Пусть Φ^{WKB} – ВКБ-приближение для решения уравнения (3.3) [27]. Тогда с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в работе [19], можно доказать, что если контур γ расположен достаточно близко к нулю, то при подстановке Φ^{WKB} в уравнение (3.9) дополнительные слагаемые

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{\bar{u}^\ell}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}}, \quad \frac{i\hbar}{2} \frac{\bar{u}^\ell}{\ell!} \frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}},$$

появившиеся в результате замены $\overset{0}{S}_1, \overset{0}{S}_2, \overset{0}{S}_3$ на $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \widehat{S}_3$, при $\ell \rightarrow \infty$ вносят в невязку экспоненциально малый вклад $O(\ell^{-\infty} \Phi^{\text{WKB}})$ по сравнению с невязкой $O(\ell^{-2} \Phi^{\text{WKB}})$ в случае уравнения (3.3). При этом используются неравенства Коши [28]. Следовательно, вместо асимптотического решения уравнения (3.9) $(\ell+2)$ -го порядка в правую часть равенства (3.8) можно подставить асимптотическое решение уравнения второго порядка (3.3).

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОТОЧЕЧНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВКИ В СПЕКТРАЛЬНОЙ СЕРИИ

При построении асимптотики существенную роль играет поведение решений уравнения (2.10) вблизи особых точек. В окрестностях иррегулярных точек $\bar{z}_1 = i$ и $\bar{z}_2 = -i$ одно решение представимо в виде суммы степенного ряда, а второе линейно независимое решение задается рядом Лорана. Для регулярной точки $\bar{z}_3 = \infty$ характеристические показатели равны $-\ell$ и $-\ell + 1$, и, следовательно, оба линейно независимых решения уравнения (2.10) растут на бесконечности не быстрее чем $\bar{z}^\ell$. Поэтому условие принадлежности решения пространству $\mathcal{P}_\ell$ не фиксирует поведение решения на бесконечности.

При $\xi = \xi_{k,\ell}$ точными решениями спектральной задачи (2.10), (2.11) являются многочлены. Наряду с такой задачей рассмотрим многоточечную спектральную задачу. Она состоит в нахождении чисел $\xi_{k,\ell}$ (собственных значений), при которых у уравнения (2.10) существуют ненулевые антиголоморфные решения, которые разлагаются в степенные ряды вблизи особых точек $\bar{z}_1 = i$ и $\bar{z}_2 = -i$.

Если число $\xi_{k,\ell}$ и функция $p(\bar{z})$ являются асимптотическим решением такой многоточечной спектральной задачи, то при подстановке $p(\bar{u})$ в правую часть формулы (3.8) получаем многочлен $\Phi(\bar{z})$ – асимптотическое решение уравнения (2.10) из пространства $\mathcal{P}_\ell$. Условие нормировки (2.11) для функции $\Phi(\bar{z})$ позволяет определить содержащийся в $p(\bar{u})$ произвольный множитель. Таким образом, число $\xi_{k,\ell}$

и многочлен $\Phi(\bar{z})$ являются асимптотическим решением исходной спектральной задачи (2.10), (2.11).

Перейдем к нахождению асимптотических решений уравнения (3.3). Выполним подстановку $\Phi(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z})$ (см. работу [27]), где

$$E(\bar{z}) = R^{a/\hbar-1/2}(\bar{z}) \exp\left(-\frac{4a(1-x_0^2+2x_0\bar{z})}{\hbar R(x_0)R(\bar{z})} - \frac{b_3^{(1)}+b_1^{(1)}\bar{z}}{R(\bar{z})}\right). \quad (4.1)$$

Тогда уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\hbar^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{z}^2} - \left(Q_0(\bar{z}) + \hbar Q_1(\bar{z}) + O(\hbar^2) + O\left(\frac{\hbar^2}{R^4(\bar{z})}\right) \right) Y = 0. \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_0(\bar{z}) &= 32a^2(\bar{z} - x_0)^2 \Lambda(\bar{z}) R^{-4}(\bar{z}) R^{-2}(x_0), \\ Q_1(\bar{z}) &= 4a \left\{ \left[2 - 2x_0^2 + 4x_0 b_1^{(1)} + R(x_0) b_3^{(1)} + R(x_0) \frac{\xi_{k,\ell}^{(1)}}{a} \right] \bar{z}^4 + \right. \\ &\quad + [-8x_0 + 2(1 - 3x_0^2) b_1^{(1)} + 8x_0 b_3^{(1)}] \bar{z}^3 + \\ &\quad + \left[-8x_0 b_1^{(1)} + 8(1 - x_0^2) b_3^{(1)} + 2R(x_0) \frac{\xi_{k,\ell}^{(1)}}{a} \right] \bar{z}^2 + \\ &\quad + [-8x_0 + 2(x_0^2 - 3) b_1^{(1)} - 8x_0 b_3^{(1)}] \bar{z} - \\ &\quad \left. - 2 + 2x_0^2 + 4x_0 b_1^{(1)} - R(x_0) b_3^{(1)} + R(x_0) \frac{\xi_{k,\ell}^{(1)}}{a} \right\} R^{-4}(\bar{z}) R^{-1}(x_0), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda(\bar{z}) = (3x_0^2 + 1)\bar{z}^2 + 4x_0\bar{z} + x_0^2 + 3, \quad (4.3)$$

а многочлен $R(\bar{z})$ задан формулой (3.4).

Приравнявая $Q_0(\bar{z})$ к нулю, находим, что уравнение (4.2) имеет точку поворота $\bar{z} = x_0$ кратности 2, а также простые точки поворота

$$\bar{z}_{\pm} = \frac{-2x_0 \pm i\sqrt{3}(1+x_0^2)}{1+3x_0^2}.$$

Точки $\bar{z}_{\pm}$ лежат на окружностях радиуса $1/\sqrt{3}$ с центрами в точках $\pm 2i/\sqrt{3}$. При движении x_0 по вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$ точки $\bar{z}_{\pm}$ совершают полные обороты по указанным окружностям (см. рис 1).

Построим ВКБ-приближения для решений уравнения (4.2). Они справедливы вне малых окрестностей точек поворота и имеют вид

$$Y_{\pm}^{\text{WKB}} = \frac{\tilde{c}_{\pm}}{\sqrt[4]{Q_0(\bar{z})}} \exp\left(\pm \frac{1}{\hbar} \int \sqrt{Q_0(\bar{z})} d\bar{z} \pm \int \frac{Q_1(\bar{z})}{2\sqrt{Q_0(\bar{z})}} d\bar{z}\right). \quad (4.4)$$

Здесь $\tilde{c}_{\pm}$ — константы, в степенных функциях берутся главные значения. Разрез между точками поворота $\bar{z}_{-}$ и $\bar{z}_{+}$ проведен либо вдоль дуги окружности $\bar{z}_{-} \bar{z}_{+}$, проходящей через точки $\bar{z}_{-}$, $\bar{z}_{+}$, $-1/x_0$, если $x_0 \neq 0$, либо вдоль лежащих на мнимой

Рис. 1

оси лучей $(\infty, -i\sqrt{3}]$ и $[i\sqrt{3}, \infty)$, если $x_0 = 0$. Отметим, что эти кривые являются линиями Стокса [27]. На рис. 2а (при $x_0 \neq 0$) и рис. 2б (при $x_0 = 0$), помимо особых точек и точек поворота, изображены линии Стокса. Интегралы в (4.4) выражаются через элементарные функции, однако имеют весьма громоздкий вид.

Вблизи точек поворота $\bar{z}_+$, $\bar{z}_-$ асимптотические решения уравнения (4.2) выражаются через функции Эйри. А именно, вблизи точек $\bar{z}_\pm$

$$Y(\bar{z}) \sim \alpha_{1,\pm} \text{Ai}\left(\frac{\pm \tau_\pm^{2/3}(i\bar{z} - i\bar{z}_\pm)}{\hbar^{2/3}}\right) + \alpha_{2,\pm} \text{Bi}\left(\pm \frac{\tau_\pm^{2/3}(i\bar{z} - i\bar{z}_\pm)}{\hbar^{2/3}}\right). \quad (4.5)$$

Здесь $\alpha_{1,\pm}$, $\alpha_{2,\pm}$ – константы, $\tau_\pm = 2a3^{3/4}(1 \mp i\sqrt{3}x_0)^3 R^{-3/2}(x_0)$. Вблизи точки поворота $\bar{z} = x_0$ асимптотическое решение представимо в виде линейной комбинации функций параболического цилиндра:

$$Y(\bar{z}) \sim \alpha_1 D_\nu(\bar{u}) + \alpha_2 D_{-\nu-1}(i\bar{u}), \quad (4.6)$$

где α_1 , α_2 – константы и

$$\bar{u} = \frac{\bar{z} - x_0}{\sqrt{\hbar}\beta}, \quad \beta = \frac{\sqrt[4]{2}(1+x_0^2)}{4\sqrt[4]{3}\sqrt{a}},$$

$$\nu = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(-\frac{\xi_{k,\ell}^{(1)}}{a} + 2 + \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} b_3^{(1)} + \frac{2x_0}{1+x_0^2} b_1^{(1)} \right) - \frac{1}{2}. \quad (4.7)$$

Анализ ВКБ-приближений показывает, что функция $\Phi_-^{\text{WKB}} = E(\bar{z})Y_-^{\text{WKB}}$ разлагается в степенной ряд вблизи особых точек $\bar{z}_1 = i$ и $\bar{z}_2 = -i$. Тем самым определен вид ВКБ-приближения в областях I–VI (см. рис. 2). Произведем согласование асимптотических разложений. Функция Y_-^{WKB} экспоненциально убывает при стремлении $\bar{z}$ к $\bar{z}_+$ в пределах области I. С другой стороны, в указанной области

Рис. 2

асимптотическое разложение для функций

$$\text{Ai}\left(\tau_+^{2/3} \frac{i\bar{z} - i\bar{z}_+}{\hbar^{2/3}}\right) \quad \text{и} \quad \text{Bi}\left(\tau_+^{2/3} \frac{i\bar{z} - i\bar{z}_+}{\hbar^{2/3}}\right)$$

при $|\bar{z} - \bar{z}_+| \gg \hbar^{2/3}$ экспоненциально убывает и возрастает соответственно [29]. Поэтому константа $\alpha_{2,+}$ в формуле (4.5) равна нулю. Аналогично можно показать, что $\alpha_{2,-} = 0$.

Асимптотические решения, построенные вблизи точек $\bar{z}_+$, $\bar{z}_-$, в областях V и VI также согласуются с $Y_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$. Таким образом, остается согласовать решения вблизи точки $\bar{z} = x_0$. При приближении к точке $\bar{z} = x_0$ в пределах области V ВКБ-приближение $Y_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$ экспоненциально убывает. Воспользуемся асимптотическими разложениями для функций параболического цилиндра [26]. При $|z| \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} D_\nu(z) &= z^\nu e^{-z^2/4} (1 + O(z^{-2})), & -\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, \\ D_\nu(z) &= z^\nu e^{-z^2/4} (1 + O(z^{-2})) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\nu\pi i} z^{-\nu-1} e^{z^2/4} (1 + O(z^{-2})), & \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция. Следовательно, при $-\pi/4 < \arg \bar{u} < \pi/4$ и $|\bar{u}| \rightarrow \infty$ в формуле (4.6) функция $D_{-\nu-1}(i\bar{u})$ экспоненциально возрастает, а функция $D_\nu(\bar{u})$ экспоненциально убывает. Поэтому $\alpha_2 = 0$.

Наконец, при приближении к точке $\bar{z} = x_0$ в пределах области VI ВКБ-приближение Y_-^{WKB} также экспоненциально убывает. В силу формулы (4.8) требование экспоненциального убывания функции $D_\nu(\bar{u})$ при $3\pi/4 < \arg \bar{u} < 5\pi/4$ и $|\bar{u}| \rightarrow \infty$ приводит к условию $1/\Gamma(-\nu) = 0$. Как известно [29], гамма-функция $\Gamma(-\nu)$ имеет

полюсы лишь при $\nu = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Так как ν и $\xi_{k,\ell}^{(1)}$ связаны равенством (4.7), поправка в спектральной серии найдена. Таким образом, доказана

ЛЕММА 2. Числа $\xi_{k,\ell}^{(1)}$ в формуле (3.2) имеют вид

$$\xi_{k,\ell}^{(1)} = a \left(2 + \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2} b_3^{(1)} + \frac{2x_0}{1 + x_0^2} b_1^{(1)} - 2\sqrt{6} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

При $\nu = k$ функции параболического цилиндра выражаются через полиномы Эрмита. Поэтому для асимптотики вблизи точки $\bar{z} = x_0$ имеем

$$\begin{aligned} Y(\bar{z}) \sim & \frac{\alpha_1}{2^{k/2}} H_k \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) e^{-\bar{u}^2/4} + \\ & + \frac{\sqrt{\hbar} \alpha_1}{\sqrt{a} 2^{(k+3)/2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left[x_0 \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^3 + (x_0 - B(x_0)) \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right] H_k \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) + \right. \\ & \left. + \left[-x_0 \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right)^2 + B(x_0) \right] H'_k \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \right) \right\} e^{-\bar{u}^2/4}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь

$$B(x_0) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2x_0}{1 + x_0^2} b_3^{(1)} - \frac{1 - x_0^2}{1 + x_0^2} b_1^{(1)} \right).$$

Формула (4.10), помимо главного члена, содержит также поправку. Наконец, при выполнении равенства (4.9) формула для ВКБ-приближения принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) = & \frac{c_- (\bar{z} - x_0)^k}{\sqrt[4]{\Lambda(\bar{z})}} \frac{(\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(x_0 \bar{z} + 1))^{\ell+1}}{(\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{3}(x_0 \bar{z} + 1))^{k+1/2}} \times \\ & \times \exp \left(\frac{\sqrt{2}\ell [x_0^2(1 + 3x_0^2)\bar{z}^2 + 2x_0(1 + 5x_0^2)\bar{z} + 1 + 5x_0^2 - 2x_0^4]}{(1 + x_0^2)[(x_0 \bar{z} + 1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(2x_0 \bar{z} + 1 - x_0^2)]} + \frac{\Lambda_1(\bar{z})}{\Lambda_2(\bar{z})} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, величина c_- — константа, $x_0 \geq 0$, многочлен $\Lambda(\bar{z})$ задан формулой (4.3) и

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\bar{z}) = & (1 + 3x_0^2)(b_1^{(1)} - x_0 b_3^{(1)})^2 \bar{z}^2 + 2(1 + x_0^2)(b_1^{(1)} - x_0 b_3^{(1)})(b_3^{(1)} + 3x_0 b_1^{(1)})\bar{z} + \\ & + (3 + x_0^2)(b_3^{(1)} + x_0 b_1^{(1)})^2 - 2(1 + x_0^2)^2 (b_3^{(1)})^2, \end{aligned}$$

$$\Lambda_2(\bar{z}) = \sqrt{2}(1 + x_0^2) [(b_1^{(1)} - x_0 b_3^{(1)})\bar{z} + b_3^{(1)} + x_0 b_1^{(1)}] \sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{2}(1 + x_0^2)(b_1^{(1)}\bar{z} + b_3^{(1)}).$$

Формула для ВКБ-приближения в случае $x_0 < 0$ получается в результате замены в правой части равенства (4.11) $\bar{z}$, x_0 , $b_1^{(1)}$ на $-\bar{z}$, $-x_0$, $-b_1^{(1)}$.

Таким образом, асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи построено (константы $b_1^{(1)}$, $b_3^{(1)}$ будут вычислены ниже). Числа $\xi_{k,\ell}$ задаются формулами (3.2), (4.9), а антиголоморфная функция $p(\bar{z})$ получается в результате согласования асимптотик. А именно, $p(\bar{z}) = \Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$ является асимптотическим решением уравнения (3.3) на всей комплексной плоскости, за исключением малых окрестностей точек поворота $\bar{z}_+$, $\bar{z}_-$, x_0 , а также дуги $\bar{z}_- \bar{z}_+$ (либо лучей $(\infty, -i\sqrt{3}]$, $[i\sqrt{3}, \infty)$ при $x_0 = 0$). Вблизи точек поворота $\bar{z}_+$, $\bar{z}_-$ и x_0 мы имеем $p(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z})$, где $Y(\bar{z})$ задается формулами (4.5) (при $\alpha_{2,\pm} = 0$) и (4.10) соответственно. Асимптотики согласуются между собой на расстояниях порядка $\hbar^{1/2}$ от точек $\bar{z}_{\pm}$ и расстояниях порядка $\hbar^{3/8}$ от точки x_0 .

Рис. 3

5. АСИМПТОТИКА МНОГОЧЛЕНОВ $\Phi(\bar{z})$

Подставим асимптотическое решение $p(\bar{z})$ многоточечной спектральной задачи в правую часть формулы (3.8) и вычислим асимптотику возникающего интеграла. Пусть для определенности $x_0 \neq 0$. Подынтегральная функция в равенстве (3.8) не имеет точек перевала. Поэтому воспользуемся интегральной теоремой Коши, согласно которой сумма интегралов по контурам γ , $\gamma_{\bar{z}}$, $\tilde{\gamma}$, γ_{x_0} и γ_∞ равна нулю (см. рис. 3).

Интегралы по контурам γ_{x_0} и γ_∞ равны нулю в силу антиголоморфности подынтегральной функции и теоремы о вычетах, а интеграл по $\gamma_{\bar{z}}$ вычисляется с помощью интегральной формулы Коши, таким образом, при значениях $\bar{z}$, не лежащих на дуге $\bar{z}_- \bar{z}_+$, и таких, что $|\bar{z} - x_0| \gtrsim \hbar^{3/8}$, $|\bar{z} - \bar{z}_\pm| \gtrsim \hbar^{1/2}$, многочлен $\Phi(\bar{z})$ можно представить в виде

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) + N(\bar{z}), \quad (5.1)$$

где

$$N(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}^{\ell+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u}) d\bar{u}}{\bar{u}^{\ell+1}(\bar{u} - \bar{z})}. \quad (5.2)$$

Здесь замкнутый контур $\gamma_{+,-}$ является дугой окружности $\bar{z}_- \bar{z}_+$ и проходится дважды по берегам разреза, соединяющего точки $\bar{z}_-$, $\bar{z}_+$. Этот контур ориентирован против часовой стрелки. Формула, аналогичная (5.1), справедлива и вблизи точки $\bar{z} = x_0$, но в этом случае вместо $\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z})$ в ней фигурирует $E(\bar{z})Y(\bar{z})$, где $Y(\bar{z})$ – разложение (4.10).

Оценим входящий в формулу (5.2) интеграл. Имеем

$$|N(\bar{z})| \leq \frac{|\bar{z}|^{\ell+1}}{2\pi} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{|\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u})| |d\bar{u}|}{|\bar{u}|^{\ell+1} |\bar{u} - \bar{z}|}. \quad (5.3)$$

Так как $\bar{z}_- \bar{z}_+$ – линия Стокса, на ней в силу соотношения (4.1) справедливо равенство

$$\frac{|\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{u})|}{|\bar{u}|^{\ell+1}} = \frac{(1+x_0^2)^{\ell/2} e^{\ell\Psi(\bar{u})/2} \vartheta(\bar{u})}{\sqrt[4]{|\Lambda(\bar{u})|}},$$

где

$$\Psi(\bar{u}) = \ln |1 + \bar{u}^2| - \frac{4(1 - x_0^2 + 2x_0\bar{u})}{(1 + x_0^2)(1 + \bar{u}^2)} - 2 \ln |\bar{u}|,$$

а $\vartheta(\bar{u})$ – непрерывная ограниченная функция.

При $0 < |x_0| < \sqrt{2e^2 - 3}$

$$\max_{\bar{u} \in \bar{z}_- \bar{z}_+} \Psi(\bar{u}) = \ln \left(\frac{2(1 + x_0^2)}{3 + x_0^2} \right) + \frac{2(1 + 3x_0^2)}{1 + x_0^2}$$

и достигается в точках поворота $\bar{z}_\pm$, а при $|x_0| \geq \sqrt{2e^2 - 3}$

$$\max_{\bar{u} \in \bar{z}_- \bar{z}_+} \Psi(\bar{u}) = \ln(1 + x_0^2) + \frac{4x_0^2}{1 + x_0^2}$$

и достигается в точке $-1/x_0$, если $|x_0| > \sqrt{2e^2 - 3}$, и в точках $\bar{z}_-$, $\bar{z}_+$, $-1/x_0$, если $|x_0| = \sqrt{2e^2 - 3}$. Наибольший вклад в асимптотику интеграла (5.3) вносят малые окрестности этих точек. Применяя метод Лапласа, а также используя интеграл [30]

$$\int_0^\infty x^{-1/4} e^{-\ell x} dx = \ell^{-3/4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right),$$

получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. При $\ell \rightarrow \infty$, $\bar{z} \notin \bar{z}_- \bar{z}_+$ справедливы следующие оценки: если $0 < |x_0| < \sqrt{2e^2 - 3}$, то

$$\begin{aligned} |N(\bar{z})| &\leq \frac{T|c_-|}{\ell^{3/4}} (1 + x_0^2)^\ell \left(\frac{2}{3 + x_0^2} \right)^{\ell/2} \exp \left(\frac{\ell(1 + 3x_0^2)}{1 + x_0^2} \right) \times \\ &\times |\bar{z}|^{\ell+1} \left(\frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_+|} + \frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_-|} \right); \end{aligned} \quad (5.4)$$

если $|x_0| = \sqrt{2e^2 - 3}$, то

$$\begin{aligned} |N(\bar{z})| &\leq \frac{T|c_-|}{\ell^{3/4}} (1 + x_0^2)^\ell \exp \left(\frac{\ell 2x_0^2}{1 + x_0^2} \right) \times \\ &\times |\bar{z}|^{\ell+1} \left(\frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_+|} + \frac{1}{|\bar{z} - \bar{z}_-|} + \frac{\ell^{1/4}}{|\bar{z} + 1/x_0|} \right); \end{aligned} \quad (5.5)$$

если $|x_0| > \sqrt{2e^2 - 3}$, то

$$|N(\bar{z})| \leq \frac{T|c_-|}{\sqrt{\ell}} (1 + x_0^2)^\ell \exp \left(\frac{\ell 2x_0^2}{1 + x_0^2} \right) \frac{|\bar{z}|^{\ell+1}}{|\bar{z} + 1/x_0|}. \quad (5.6)$$

Здесь T – константа.

Отметим, что и при $x_0 = 0$ имеет место формула, аналогичная (5.1). Надо лишь контур $\gamma_{+,-}$ в формуле (5.2) заменить на лучи $(\infty, -i\sqrt{3}]$, $[i\sqrt{3}, \infty)$, которые проходятся дважды по берегам разреза против часовой стрелки. Снова наибольший вклад в интеграл (5.3) дадут малые окрестности точек поворота $\pm i\sqrt{3}$. В результате получается следующая асимптотика для $N(\bar{z})$:

$$N(\bar{z}) \sim \frac{c_- e^\ell}{\ell^{3/4}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell/2} \left(\frac{T_1}{\bar{z} - i\sqrt{3}} + \frac{T_2}{\bar{z} + i\sqrt{3}} \right). \quad (5.7)$$

Здесь T_1 и T_2 – некоторые константы.

Рассмотрим окрестность точки $\bar{z} = x_0$, которая дает основной вклад в асимптотику средних, и найдем, при каких x_0 значения функции $N(\bar{z})$ в этой окрестности будут экспоненциально малыми по сравнению с $p(\bar{z}) = E(\bar{z})Y(\bar{z})$, где $Y(\bar{z})$ – разложение (4.10). Так как это разложение согласуется с ВКБ-приближением, из соотношения (4.11) вытекает, что порядок значений $p(\bar{z})$ вблизи точки x_0 определяется множителем

$$(1 + x_0^2)^\ell (\sqrt{3} + \sqrt{2})^\ell \exp\left(\frac{\sqrt{2}\ell(3x_0^4 + 6x_0^2 + 1)}{(1 + x_0^2)(\sqrt{3}(1 + x_0^2) + \sqrt{2})}\right).$$

Сравнивая это выражение с правыми частями формул (5.4)–(5.7), находим, что для экспоненциальной малости величины $N(\bar{z})$ по сравнению с $p(\bar{z})$ при

$$0 \leq |x_0| < \sqrt{2e^2 - 3} \quad (5.8)$$

должно выполняться неравенство

$$\frac{\sqrt{2}|x_0|}{\sqrt{3} + x_0^2} \exp\left(\frac{1 + 3x_0^2}{1 + x_0^2}\right) < (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \exp\left(\frac{\sqrt{2}(3x_0^4 + 6x_0^2 + 1)}{(1 + x_0^2)(\sqrt{3}(1 + x_0^2) + \sqrt{2})}\right), \quad (5.9)$$

а при $|x_0| \geq \sqrt{2e^2 - 3}$ – неравенство

$$|x_0| \exp\left(\frac{2x_0^2}{1 + x_0^2}\right) < (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \exp\left(\frac{\sqrt{2}(3x_0^4 + 6x_0^2 + 1)}{(1 + x_0^2)(\sqrt{3}(1 + x_0^2) + \sqrt{2})}\right). \quad (5.10)$$

Неравенство (5.9) имеет место при всех x_0 , удовлетворяющих неравенству (5.8), а неравенство (5.10) выполняется лишь при

$$|x_0| < x_*, \quad (5.11)$$

где x_* – корень уравнения

$$x \exp\left(\frac{2x^2}{1 + x^2}\right) = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \exp\left(\frac{\sqrt{2}(3x^4 + 6x^2 + 1)}{(1 + x^2)(\sqrt{3}(1 + x^2) + \sqrt{2})}\right),$$

приближенное значение которого $x_* \approx 4.94$. Это связано с тем, что для $N(\bar{z})$ выше была использована довольно грубая оценка сверху (5.6).

Далее мы ограничимся рассмотрением значений x_0 , которые удовлетворяют условию (5.11). Для нахождения асимптотических собственных функций при $|x_0| \geq x_*$ можно воспользоваться связью между изменением величины x_0 и сдвигом на полярный угол, который допускают собственные функции задачи (1.1). Сдвиг на угол φ_0 порождает в пространстве $\mathcal{P}_\ell$ оператор M_{φ_0} , действующий согласно формуле

$$M_{\varphi_0}g(\bar{z}) = (\cos \varphi_0 - \bar{z} \sin \varphi_0)^\ell g\left(\frac{\bar{z} \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - \bar{z} \sin \varphi_0}\right). \quad (5.12)$$

6. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КВАНТОВЫХ СРЕДНИХ. ИТОГОВАЯ ТЕОРЕМА

Пусть многочлен $\Phi(\bar{z})$ задан формулой (3.8), где функция $p(\bar{u})$ есть асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи. Предположим, что выполнено условие (5.11), и вычислим асимптотику нормы функции $\Phi(\bar{z})$ в пространстве $\mathcal{P}_\ell$.

Запишем ВКБ-приближение (4.11) в виде

$$\Phi_-^{\text{WKB}}(\bar{z}) = c_- t(\bar{z}) e^{\ell s(\bar{z})}.$$

Если подставить это выражение в формулу (2.8) для скалярного произведения, то получим интеграл

$$\|\Phi_-^{\text{WKB}}\|_{\mathcal{P}_\ell}^2 = \frac{\ell + 1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{|c_-|^2 |t(\bar{z})|^2 e^{\ell \Omega(\bar{z}, z)}}{(1 + |z|^2)^2} d\bar{z} dz, \quad (6.1)$$

где $\Omega(\bar{z}, z) = s(\bar{z}) + s(z) - \ln(1 + |z|^2)$. Так как функция $\Omega(\bar{z}, z)$ достигает глобального максимума при $\bar{z} = z = x_0$, интеграл (6.1) будет приближенно равен интегралу по малой окрестности этой точки.

Далее разложим заданную формулой (4.1) функцию $E(\bar{z})$ вблизи точки $\bar{z} = x_0$ и подставим в формулу (2.8) произведение этого разложения на $Y(\bar{z})$, заданную в (4.10). Также учтем, что $N(\bar{z})$ дает экспоненциально малый вклад в норму. В результате получаем, что если входящая в правую часть формулы (4.10) константа α_1 имеет вид

$$\alpha_1 = \sqrt{\pi} 2^{1+k/2} \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + x_0^2} \exp\left(\frac{2\ell + b_1^{(1)} x_0 + b_3^{(1)}}{1 + x_0^2}\right) \Sigma_0^{-1/2}(k) (1 + O(\hbar)), \quad (6.2)$$

где

$$\Sigma_j(k) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1-\sqrt{2/3})t^2 - (\sqrt{3/2}-1)r^2} \sigma_j(t, r) |H_k(t + ir)|^2 dt dr, \quad j = 0, 1, \quad (6.3)$$

и $\sigma_0 = 1$, то условие $\|\Phi(\bar{z})\|_{\mathcal{P}_\ell} = 1 + O(\hbar)$ при $\hbar \rightarrow 0$ будет выполнено. Таким образом, мы нашли входящий в p множитель α_1 .

Чтобы завершить построение $\Phi(\bar{z})$, остается вычислить значения $b_1^{(1)}$ и $b_3^{(1)}$. Они задаются квантовыми средними (2.6). Вычисление квантовых средних производится аналогично вычислению нормы. Основной вклад в асимптотику интегралов также вносит малая окрестность точки $\bar{z} = z = x_0$ [19]. Справедлива

ЛЕММА 4. При $\hbar \rightarrow 0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} b_1 &= 4(S_1^0 \Phi_{k,\ell}, \Phi_{k,\ell})_{\mathcal{P}_\ell} = \frac{8ax_0}{1+x_0^2} + \hbar \left\{ \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} \left[\frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} b_1^{(1)} - \frac{2x_0}{1+x_0^2} b_3^{(1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8x_0}{1+x_0^2} - \frac{4x_0 \Sigma_1(k)}{\sqrt{6}(1+x_0^2) \Sigma_0(k)} \right\} + O(\hbar^2), \\ b_3 &= 4(S_3^0 \Phi_{k,\ell}, \Phi_{k,\ell})_{\mathcal{P}_\ell} = \frac{4a}{1+x_0^2} + \hbar \left\{ \frac{2x_0}{1+x_0^2} \left[\frac{2x_0}{1+x_0^2} b_3^{(1)} - \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} b_1^{(1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} - \frac{2(1-x_0^2) \Sigma_1(k)}{\sqrt{6}(1+x_0^2) \Sigma_0(k)} \right\} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь функция $\Sigma_1(k)$ задана формулой (6.3), где $\sigma_1 = t^2 + r^2$.

В результате сравнения разложений (3.1) с (6.4) получаем соотношение, связывающее $b_1^{(1)}$ и $b_3^{(1)}$:

$$\frac{2x_0}{1+x_0^2} b_1^{(1)} + \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} b_3^{(1)} = 4 - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)}. \quad (6.5)$$

В силу этого равенства коэффициенты $b_1^{(1)}$, $b_3^{(1)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} &= \frac{2x_0}{1+x_0^2} \left[4 - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right] + \frac{8(1-x_0^2)x_1}{(1+x_0^2)^2}, \\ b_3^{(1)} &= \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} \left[4 - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right] - \frac{16x_0x_1}{(1+x_0^2)^2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где x_1 — произвольная вещественная константа, которая определяет поправку порядка $\hbar$ к числу x_0 , около которого локализовано решение (т. е. $\bar{z} = x_0 + \hbar x_1$). Отметим, что именно через параметры $b_1^{(1)}$ и $b_3^{(1)}$ функция Φ_-^{WKB} зависит от величин

$$\frac{\Sigma_1(k)}{\Sigma_0(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

характеризующих решение вблизи точки x_0 .

Наконец, с учетом равенства (6.5) формула (4.9) принимает вид

$$\xi_{k,\ell}^{(1)} = a \left(6 - 2\sqrt{6} \left(k + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\xi_{k,\ell} = 4a^2 + \frac{2a^2}{\ell} \left(6 - 2\sqrt{6} \left(k + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right) + O(\ell^{-2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.7)$$

а многочлен $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$ определен формулой (3.8), где $p(\bar{u})$ – решение многоточечной спектральной задачи такое, что α_1 и $b_1^{(1)}, b_3^{(1)}$ имеют вид (6.2) и (6.6) соответственно. Тогда при выполнении условия (5.11) $\xi_{k,\ell}$ и $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$ являются асимптотическим собственным значением и асимптотической собственной функцией задачи (2.10), (2.11) при $\ell \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathcal{P}_\ell$. Более точно, если $\xi_{k,\ell}$ имеет вид (6.7), то многочлен $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$ удовлетворяет уравнению (2.10) с точностью $O(\ell^{-2})$ с оценкой невязки по норме пространства $\mathcal{P}_\ell$, а также условию нормировки (2.11) с точностью $O(\ell^{-1})$.

В заключение найдем асимптотические собственные значения задачи (1.1), расположенные вблизи верхних границ спектральных кластеров, образующихся вокруг собственных значений невозмущенного оператора.

ЛЕММА 5. При $\hbar \rightarrow 0$ справедливо равенство

$$({}^0S_2^2 \Phi_{k,\ell}, \Phi_{k,\ell})_{\mathcal{P}_\ell} = 2a\hbar \left[1 + \sqrt{6} \left(k + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Sigma_1(k)}{\sqrt{6}\Sigma_0(k)} \right] + O(\hbar^2). \quad (6.8)$$

Подставляя далее соотношения (6.7), (6.8), (2.5) в формулу (2.2), для значений ℓ порядка $\hbar^{-1}$ получаем, что при $\hbar \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_{k,\ell} = \ell\hbar + \hbar + (w_0 + 2\ell\hbar w_1 + 9\ell^2\hbar^2 w_2)\hbar^2 + \\ + \left[2w_1 + 2\ell\hbar w_2 \left(9 - 2\sqrt{6} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) \right] \hbar^3 + O(\hbar^4), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Полученная серия описывает расщепление спектра оператора типа Хартри и содержит члены вплоть до третьего порядка по $\hbar$ включительно. Соответствующие асимптотические собственные функции задачи (1.1) получаются из многочленов $\Phi_{k,\ell}(\bar{z})$, заданных формулой (3.8), путем применения когерентного преобразования (2.7), а также преобразования (2.3).

Благодарности. Автор благодарен М.В. Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00627), Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.В37.21.0864) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2033.2012.1).

Список литературы

- [1] Л. П. Питаевский, *УФН*, **168**:6 (1998), 641–653.
- [2] А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [3] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [4] И. В. Симоног, *ТМФ*, **30**:3 (1977), 408–414.
- [5] М. В. Карасев, *Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста*, Препринт ИТФ-87-157Р, ИТФ АН УССР, Киев, 1987.
- [6] С. А. Вакуленко, В. П. Маслов, И. А. Молотков, И. А. Шафаревич, *Докл. РАН*, **345**:6 (1995), 743–745.
- [7] М. В. Карасев, А. В. Перескоков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 33–72.
- [8] М. В. Карасев, А. В. Перескоков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:6 (2001), 57–98.
- [9] А. В. Перескоков, *ТМФ*, **131**:3 (2002), 389–406.

- [10] В. В. Белов, Е. И. Смирнова, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 309–312.
- [11] В. В. Белов, Ф. Н. Литвинец, А. Ю. Трифонов, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 26–40.
- [12] А. Л. Лисок, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *Изв. Томск. политехн. ун-та*, **314**:2 (2009), 66–71.
- [13] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в дифракции коротких волн. Метод эталонных задач*, Наука, М., 1972.
- [14] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 115–173.
- [15] M. V. Karasev, “Birkhoff resonances and quantum ray method”, *Proceedings of International Seminar “Days of Diffraction–2004”*, St. Petersburg University and Steklov Math. Institute, St. Petersburg, 2004, 114–126.
- [16] M. V. Karasev, “Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances, I”, *Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics*, American Mathematical Society Translations Series 2, **216**, AMS, Providence, RI, 2005, 1–18; *Adv. Stud. Contemp. Math.*, **11**:1 (2005), 33–56; *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 131–150.
- [17] M. Karasev, “Resonance gyrons and quantum geometry”, *From Geometry to Quantum Mechanics. In Honor of Hideki Omori*, Progress in Mathematics, **252**, eds. Y. Maeda, T. Ochiai, P. Michor, A. Yoshioka, Birkäuser, Boston, 2007, 253–275.
- [18] А. В. Перескоков, *Матем. заметки*, **92**:4 (2012), 583–596.
- [19] А. В. Перескоков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 165–210.
- [20] А. В. Перескоков, *Тр. ММО*, **73**:2 (2012), 277–325.
- [21] А. В. Перескоков, *НМФМ*, **8**:1 (2013), 65–84.
- [22] В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.
- [23] A. Weinstein, *Duke Math. J.*, **44**:4 (1977), 883–892.
- [24] J. Schwinger, “On angular momentum”, *Quantum Theory of Angular Momentum*, eds. L. C. Biedenharn, H. van Dam, Academic Press, New York, 1965, 229–279.
- [25] M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding”, *Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry*, American Mathematical Society Translations Series 2, **187**, ed. M. V. Karasev, AMS, Providence, RI, 1998, 1–202.
- [26] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [27] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983.
- [28] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1987.
- [29] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [30] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.

Поступила в редакцию 9.06.2013