Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Аван, Т. Фонсека, Л. Фраппа, П. П. Кулиш, Э. Рагуси, Ж. Ролле, Построение R -матриц Темперли–Либа и обобщенные матрицы Адамара, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 2, 255–273

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 11:19:42

© 2014 г.

Ж. Аван^{*}, Т. Фонсека[†], Л. Фраппа[†],
П. П. Кулиш[‡], Э. Рагуси^{*†}, Ж. Ролле^{*}

ПОСТРОЕНИЕ R -МАТРИЦ ТЕМПЕРЛИ–ЛИБА И ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЦЫ АДАМАРА

Построены новые наборы представлений ранга n алгебры Темперли–Либа $TL_N(q)$, характеризующихся двумя матрицами, удовлетворяющими обобщенному комплексному свойству Адамара. Приведены частичные классификации для двух матриц, в частности в случае, когда они сводятся к матрицам Фурье или Батсона.

Ключевые слова: уравнение Янга–Бакстера, алгебра Темперли–Либа, R -матрица, матрица Адамара.

DOI: 10.4213/tmf8564

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебра Темперли–Либа (ТЛ) $TL_N(q)$ [1], [2] широко использовалась в качестве мощного алгебраического инструмента построения и вывода квантовых интегрируемых моделей, которые играют важную роль в статистической механике и физике твердого тела (см., например, [2], [3]). Специальные представления алгебры ТЛ, где генераторы представляют собой копии одного эндоморфизма, действующего на тензорном произведении $V \otimes V$ (V – n -мерное векторное пространство), порождают постоянные решения R уравнения Янга–Бакстера. Это позволяет проводить систематически процедуру янг-бакстеризации (см., например, [4]). Исходя из такой янг-бакстеризованной R -матрицы можно, в частности, построить интегрируемые квантовые спиновые цепочки [5] на пространстве состояний $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^n)^{\otimes N}$ для любого целого n . Эти спиновые цепочки очень похожи на XXZ -модель со спином $1/2$.

Конкретные представления алгебры ТЛ введены, например, в работах [5], [6]. Они параметризуются одним бивектором b , который порождает проектор ранга 1

^{*}Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation, Université de Cergy-Pontoise, Cergy-Pontoise, France. E-mail: avan@u-cergy.fr, rollet@u-cergy.fr

[†]Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique, CNRS – Université de Savoie, Annecy-le-Vieux, France.
E-mail: dinis@lapth.cnrs.fr, frappat@lapth.cnrs.fr, ragoucy@lapth.cnrs.fr

[‡]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: kulish@pdmi.ras.ru

на $V \otimes V$. Параметр ТЛ q , который мы определим ниже, в этом случае задается как $q + 1/q \equiv -\text{tr}(b\bar{b}^t)$. В работе [4] была предложена классификация решений уравнения отражения, связанного с полученной R -матрицей, для построения квантовых интегрируемых открытых спиновых цепочек.

Дополнительные представления, включающие n таких бивекторов, которые были предложены в работах [7], [8], важны в контексте запутывания состояний и квантовых вычислений. При этом параметр ТЛ или *петлевой индекс* определяется как $q + 1/q \equiv \sqrt{n}$. Матрица, исходно параметризованная n бивекторами, естественным образом записывается в виде $(n^2 \times n^2)$ -матрицы, как это было сделано, например, в работе [8] для $n = 3$:

$$U^{(\text{II})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Оказывается (см. ниже), что эти новые представления алгебры ТЛ можно более подходящим образом переформулировать в терминах суммы n^2 обыкновенных тензорных произведений двух $(n \times n)$ -матриц, а именно

$$T_i = \sum_{a,b=1}^n \mathbb{I}^{\otimes(i-1)} \otimes e_{ab} \otimes M^{n_a - n_b} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-i-1)}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (1.1)$$

где e_{ab} обозначает канонический вид генераторов $(n \times n)$ -матриц, M – обратимая $(n \times n)$ -матрица, а n_a, n_b – целые числа.

Представление $U^{(\text{II})}$ из работы [8] в точности принимает вид (1.1) при

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В явном виде $U^{(\text{II})}$ выражается как

$$U^{(\text{II})} = \begin{pmatrix} M^0 & M^2 & M \\ M^{-2} & M^0 & M^{-1} \\ M^{-1} & M & M^0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Как обычно в таких представлениях, i -й генератор ТЛ T_i действует нетривиально только на две копии пространства V с номерами i и $i+1$ в полном пространстве представления, заданном как тензорное произведение $\bigotimes_{k=1}^N V_{(k)}$. R -матрица, полученная из такого объекта, – это просто $R_{i,i+1} = \Pi_{i,i+1}(q\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + T_i)$, где Π_{ij} – общее обозначение для оператора перестановки на тензорном произведении $V_i \otimes V_j$,

а $\mathbb{I}$ – тождественный оператор. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением только диагонализуемых матриц M . Матрицы, приводимые к жорданову виду, требуют отдельного рассмотрения.

В результате мы получаем интересный пример реализаций ранга n алгебры ТЛ, а также мотивировку наших исследований подобных реализаций общего вида. Соответствующие числовые матрицы отражения можно изучать, следуя работе [4], однако мы оставим это до следующей работы. Естественно ожидать, что новые решения, которые мы здесь предлагаем, могут представлять интерес для описания эффектов квантового запутывания или, после янг-бакстеризации, как строительные блоки для моделей, подобных замкнутым или открытым спиновым цепочкам. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в разделе 6.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы вводим необходимые обозначения, точно определяем алгебру ТЛ и используемый нами анзац ранга n . Затем мы выводим соответствующие уравнения, которые приводят к полному решению на основе анзаца (1.1).

В разделе 3 мы выделяем из этих уравнений полиномиальные уравнения (которые будем называть *полиномиальными мастер-уравнениями*), контролирующие собственные значения матрицы M , и матричные уравнения, контролирующие собственные векторы M . Замечательным образом и те, и другие уравнения характеризуются $(n \times n)$ -матрицами, которые удовлетворяют определяемому нами обобщению (называемому *общим условием Адамара* (ОУА)) комплексного свойства Адамара [9], [10]. Затем мы обсуждаем явную классификацию собственных значений и собственных векторов, основанную на этих соотношениях. Собственные значения образуют *мастер-матрицу*, удовлетворяющую общему условию Адамара. Здесь, однако, имеются деликатные моменты, пока не до конца проясненные, поскольку условие Адамара в данном случае является необходимым, но не достаточным. Собственные векторы, напротив, полностью определяются выбором произвольной обобщенной матрицы Адамара, коль скоро известна мастер-матрица.

Частный набор решений комплексного условия Адамара и его обобщения приведен в разделе 4. Представление $U^{(1)}$ из работы [7] – простой пример несколько более общего набора объектов, который обсуждается в разделе 5. В разделе 6 приведены некоторые выводы и перспективы.

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА И УРАВНЕНИЯ

Сначала напомним общий контекст наших рассуждений и выведем уравнения, которые нужно решить, чтобы получить по крайней мере частичную классификацию решений.

2.1. Алгебры Гекке и Темперли–Либа. Группа кос $\mathcal{B}_N$ порождается $N - 1$ генераторами $\check{R}_j$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$, их обратными $\check{R}_j^{-1}$ и соотношениями (см. [11])

$$\begin{aligned} \check{R}_j \check{R}_k \check{R}_j &= \check{R}_k \check{R}_j \check{R}_k, & |j - k| &= 1, \\ \check{R}_j \check{R}_k &= \check{R}_k \check{R}_j, & |j - k| &> 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

И алгебра Гекке $H_N(q)$, и алгебра ТЛ $TL_N(q)$ являются факторами групповой алгебры группы $\mathcal{B}_N$.

Алгебра Гекке $H_N(q)$ получается путем добавления к этим соотношениям следующих связей, которым подчиняется каждый генератор $\check{R}_j$ (q -деформация симметрической группы):

$$(\check{R}_j - q\mathbb{I})\left(\check{R}_j + \frac{1}{q}\mathbb{I}\right) = 0, \quad (2.2)$$

где $\mathbb{I}$ – единичный элемент в алгебре Гекке. Мы записываем $\check{R}_j$ через некий идемпотент X_j :

$$\check{R}_j = q\mathbb{I} + X_j. \quad (2.3)$$

Тогда уравнение (2.2) становится эквивалентным

$$X_j^2 = -\left(q + \frac{1}{q}\right)X_j. \quad (2.4)$$

Соотношения (2.1) из группы кос в терминах идемпотентов X_j и X_k при $|j - k| = 1$ имеют вид

$$X_j X_k X_j - X_j = X_k X_j X_k - X_k. \quad (2.5)$$

Алгебра TL $TL_N(q)$ получается как фактор-алгебра алгебры Гекке $H_N(q)$ по набору соотношений, требующих, чтобы каждая часть уравнения (2.5) была равна нулю. В итоге $TL_N(q)$ задается генераторами X_j , $j = 1, 2, \dots, N - 1$, и соотношениями

$$X_j^2 = -\nu(q)X_j, \quad (2.6)$$

$$X_j X_k X_j = X_j, \quad |j - k| = 1, \quad (2.7)$$

$$X_j X_k = X_k X_j, \quad |j - k| > 1 \quad (2.8)$$

где $\nu(q) = q + 1/q$.

При рассмотрении интегрируемых спиновых систем нас будут интересовать представления алгебры $TL_N(q)$ на пространстве, являющемся тензорным произведением $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^n)^{\otimes N}$. Генераторы $\check{R}_j$ при этом представлены в терминах эндоморфизмов на $\mathcal{H}$, действующих нетривиально на пару $(j, j + 1)$ соседних пространств V . Эти эндоморфизмы обозначаются очевидным образом как $\check{R}_{j,j+1}$. Тогда условия (2.1) представляются как уравнение Янга–Бакстера типа соотношения из группы кос

$$\check{R}_{12}\check{R}_{23}\check{R}_{12} = \check{R}_{23}\check{R}_{12}\check{R}_{23}. \quad (2.9)$$

R -матрица немедленно определяется из этого представления генераторов группы кос как $R_{j,j+1} = \Pi_{j,j+1}\check{R}_{j,j+1}$, где $\Pi(v \otimes v') = v' \otimes v$ для любой пары векторов из пространства $\mathbb{C}^n$. Индексация $(j, j + 1)$ оператора Π снова очевидна. Обозначение $R_{j,j+1}$ немедленно расширяется до определения общих эндоморфизмов R_{ij} пространства $\mathcal{H}$, занумерованных любой не являющейся соседней парой “индексов вершин” (i, j) , с использованием проверенных временем обозначений [12] для таких элементов из $\text{End}(\mathcal{H})$ с индексами, нумерующими пространства.

Тогда уравнение (2.9) немедленно принимает вид уравнения Янга–Бакстера для R :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (2.10)$$

Разумеется, любая матричная реализация алгебры Янга–Бакстера (2.10) может быть калибровочно преобразована путем сопряжения $R_{ij}^g \equiv g \otimes g R_{ij} g^{-1} \otimes g^{-1}$, где g – любая обратимая $(n \times n)$ -матрица. При переформулировке анзаца для представлений алгебры ТЛ мы будем использовать калибровочную свободу, разумеется, справедливую также для рассматриваемых представлений алгебры ТЛ.

Наконец, сформулируем процедуру янг-бакстеризации R -матриц. На самом деле процедура янг-бакстеризации справедлива уже на стадии абстрактных генераторов алгебры Гекке. Действительно, если определить зависящую от спектрального параметра R -матрицу как [13]

$$\check{R}_j(u) = u\check{R}_j - \frac{1}{u}\check{R}_j^{-1} = \left(u - \frac{1}{u}\right)\check{R}_j + \frac{\omega(q)}{u}\mathbb{I}, \quad \omega(q) = q - \frac{1}{q}, \quad (2.11)$$

то можно видеть, что она удовлетворяет кубическому уравнению типа соотношения в группе кос с мультипликативным спектральным параметром u (аддитивный спектральный параметр получается как $u \equiv e^\lambda$):

$$\check{R}_j(u)\check{R}_k(uw)\check{R}_j(w) = \check{R}_k(w)\check{R}_j(uw)\check{R}_k(u), \quad |j - k| = 1. \quad (2.12)$$

Коль скоро мы представили сами генераторы $\check{R}$ алгебры Гекке $H_N(q)$ как R -матрицы, действующие на некотором тензорном произведении двух конечномерных векторных пространств, эта процедура немедленно (см. [4]) порождает решения уравнения Янга–Бакстера типа соотношения из группы кос с мультипликативными спектральными параметрами:

$$\check{R}_{12}(u)\check{R}_{23}(uw)\check{R}_{12}(w) = \check{R}_{23}(w)\check{R}_{12}(uw)\check{R}_{23}(u). \quad (2.13)$$

2.2. Анзац ранга n и мастер-уравнение. Исходное построение представления ранга 1 алгебры ТЛ было предложено в работе [5]. Генераторы U представляются копиями проектора на один бивектор в $V_i \otimes V_{i+1}$. Обобщения этого построения были даны в работах [7], [8] в виде суммы n проекторов на n бивекторов $A^{(k)}$ вдоль n бивекторов $B^{(k)}$ с учетом условий согласованности. Однако точные решения были получены только для размерностей $n = 2, 3$. Здесь же мы получим общие решения для любого n .

Уместно сделать замечание относительно нормировки. Представления в работах [7], [8] реализуют точную формулировку алгебры ТЛ (2.6)–(2.8) с однопетлевым множителем $\nu(q) = \sqrt{n}$. Чтобы исключить громоздкие множители $\sqrt{n}$, переопределим генераторы U_i путем общего умножения на $\sqrt{n}$. Тогда в однопетлевом уравнении (2.6) появляется множитель n , а в уравнении (2.7) возникает множитель n в правой части. Мы будем исследовать именно эти перенормированные уравнения.

ЛЕММА 1. Пусть M – обратимая диагонализуемая $(n \times n)$ -матрица: $M = P\Lambda P^{-1}$, где Λ – диагональная матрица, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда матрица

$$T_{i,i+1} = \sum_{a,b=1}^n \mathbb{I}^{\otimes(i-1)} \otimes e_{ab} \otimes M^{n_a - n_b} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-i-1)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.14)$$

удовлетворяет алгебре ТЛ тогда и только тогда, когда

$$\left(\sum_r \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right)^{n_r} \right) \left(\sum_{kl} P_{ik}^{-1} P_{lj} \lambda_u^{n_k - n_l} \right) = n \delta_{ij} \quad (2.15)$$

для всех $i, j, u \in \{1, \dots, n\}$ и

$$\sum_s (\lambda_s)^{n_i - n_j} = n \delta_{ij}. \quad (2.16)$$

для всех $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в общем случае калибровочная ковариантность таких представлений алгебры ТЛ $T_{ij} \rightarrow g_i g_j T_{ij} g_i^{-1} g_j^{-1}$ позволяет переупорядочить индексы $1, \dots, n$ так, чтобы выполнялось условие $n_a \geq n_b$ при $a \geq b$. Более того, поскольку существенны только разности $n_a - n_b$, с точностью до глобального сдвига всегда можно предположить, что $n_a \geq 0$ для любого n_a .

Представление в виде (2.14) автоматически дает решение однопетлевого условия (2.6), так что остается рассмотреть только второе условие (2.7), когда $k = j + 1$. Оно имеет вид

$$\sum_{i,j,k,l,r} e_{ij} \otimes M^{n_i - n_r} e_{kl} M^{n_r - n_j} \otimes M^{n_k - n_l} = n \sum_{ij} e_{ij} \otimes M^{n_i - n_j} \otimes \mathbb{I}, \quad (2.17)$$

что эквивалентно

$$\sum_{r,k,l} M^{-n_r} e_{kl} M^{n_r} \otimes M^{n_k - n_l} = n \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (2.18)$$

Теперь ограничимся обратимыми и диагонализуемыми матрицами M . Положим при этом $M = R \Lambda R^{-1}$, где Λ – обратимая диагональная матрица. Тогда уравнение (2.18) принимает вид

$$\sum_{r,k,l} \Lambda^{-n_r} P^{-1} e_{kl} P \Lambda^{n_r} \otimes \Lambda^{n_k - n_l} = n \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (2.19)$$

что эквивалентно (2.15) после проецирования на $e_{ij} \otimes e_{uu}$.

Второе соотношение в (2.7) $X_i X_{i-1} X_i = n X_i$ после устранения присоединенного действия P в третьем множителе проецируется на тройное тензорное произведение генераторов $e_{ij} \otimes e_{al} \otimes e_{tt}$, давая для всех $(i, j, t) \in \{1, \dots, n\}^3$

$$\sum_s \lambda_s^{n_i - n_j} \left(\sum_{k,b} P_{sk}^{-1} P_{bs} \lambda_t^{n_k - n_b} \right) = n \delta_{ij}. \quad (2.20)$$

В отличие от предыдущего случая, это уравнение имеет иерархическую структуру вместо факторизованной. Однако, если использовать (2.15) при $i = j$, двойная сумма в (2.20) равна единице для любого значения s и, следовательно, (2.20) сводится к (2.16).

3. РЕШЕНИЕ УСЛОВИЯ ТЛ

Из уравнений (2.15) мы теперь выделим мастер-уравнения на собственные значения и собственные векторы матрицы M . Сначала дадим некоторые общие ключевые определения для объектов, которые встретятся нам в процессе обсуждения.

3.1. Матрицы Адамара и мастер-уравнение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Комплексная матрица Адамара* представляет собой обратимую $(n \times n)$ -матрицу U , удовлетворяющую условиям

$$|U_{ij}| = 1, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

$$U = n(U^{-1})^\dagger. \quad (3.2)$$

Обобщенная матрица Адамара есть обратимая $(n \times n)$ -матрица U , все элементы которой отличны от нуля, удовлетворяющая единственному условию

$$U^{-H} = n(U^{-1})^t, \quad (3.3)$$

где U^{-H} – матрица, обратная в смысле Адамара: $(U^{-H})_{ij} = 1/U_{ij}$.

Комплексная (или обобщенная) матрица Адамара H называется *расфазированной*, если любые элементы ее первого столбца и первой строки равны единице, $H_{1j} = H_{j1} = 1$ при любом j .

Заметим, что соотношение (3.3) эквивалентно

$$nU_{ij}(U^{-1})_{ji} = 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Вещественные матрицы Адамара (определение 1, в котором вещественные элементы равны ± 1) рассматривались еще в работе Сильвестра [14]. Комплексные матрицы Адамара, все элементы которых равны корням из единицы, известны также как матрицы Батсона, введенные в работе [15]. Случай общего положения, когда элементы матрицы являются унимодулярными, описан, например, в работе [10]. Введенный в определении 1 критерий типа критерия Адамара для матриц с неунимодулярными комплексными элементами, насколько нам известно, является новым.

Заметим, что термин “обобщенная матрица Адамара”, который мы ввели для обозначения матрицы, удовлетворяющей условию (3.3), не следует путать со сходным понятием из работы [15], относящимся к частным комплексным матрицам Адамара с дополнительным свободным параметром $k \neq n$: $U^* = k(U^{-1})^t$, которое впоследствии уступило место термину *матрицы Батсона*.

Наш объект в самом деле обобщает понятие комплексной матрицы Адамара путем замены комплексного сопряжения (идемпотентной операции на каждом матричном элементе) на взятие обратного числа – равным образом идемпотентную операцию, дающую естественное продолжение первой на неунимодулярные комплексные числа. Операция транспонирования матрицы сохраняется. Тогда комплексное условие Адамара состоит в том, что матрица, обратная к U , дается транспонированием комплексно-сопряженной матрицы [9]. Поэтому любая комплексная матрица Адамара является обобщенной матрицей Адамара. Позднее мы поставим (но не решим) вопрос: можно ли с помощью хорошо определенной процедуры получить любую обобщенную матрицу Адамара из комплексной матрицы Адамара?

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Если H – комплексная (обобщенная) матрица Адамара, то $H' = \sigma_1 D_1 H D_2 \sigma_2$ также является комплексной (обобщенной) матрицей Адамара, где $D_j, j = 1, 2$, –*

унитарные (обратимые) диагональные матрицы, а σ_j , $j = 1, 2$, – матрицы перестановок. Две комплексные (обобщенные) матрицы Адамара H и H' , связанные таким образом, называются эквивалентными.

2. Любая комплексная (обобщенная) матрица Адамара эквивалентна расфазированной комплексной (обобщенной) матрице Адамара.

Перечисленные выше свойства комплексных матриц Адамара были найдены, например, в работе [10]. Аналогичное условие на обобщенные матрицы Адамара тривиально.

Теперь мы можем сосредоточиться на исследовании нашей проблемы. Сначала введем матрицу Ω с элементами

$$\Omega_{ij} = \lambda_i^{n_j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

которую в дальнейшем будем называть *мастер-матрицей*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Мастер-матрица, являющаяся решением уравнения (2.15), должна быть обобщенной матрицей Адамара:

$$\Omega^{-H} = n(\Omega^{-1})^t. \quad (3.6)$$

Более того, все n_a должны быть различны, а спектр матрицы M должен быть простым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (2.15) можно переписать в терминах матриц Ω и P как

$$(\Omega^{-H}\Omega^t)_{ij}(P^{-1}\Omega^t)_{iu}(\Omega^{-H}P)_{uj} = n\delta_{ij} \quad (3.7)$$

для всех i, j, u . Суммирование уравнения (3.7) по j и по i дает соответственно

$$(P^{-1}\Omega^t)_{iu}(\Omega^{-H}P\Omega(\Omega^{-H})^t)_{ui} = n, \quad i, u = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

$$(\Omega^{-H}P)_{uj}(\Omega(\Omega^{-H})^tP^{-1}\Omega^t)_{ju} = n, \quad j, u = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Поэтому две матрицы $P^{-1}\Omega^t$ и $\Omega^{-H}P$ являются полными, т. е. все их элементы отличны от нуля.

Всегда можно непротиворечиво записать $\Omega^{-H}\Omega^t \equiv n\mathbb{I}_n + K$, где K – некоторая матрица с нулевой диагональю. Действительно, из определения Ω нетрудно видеть, что $(\Omega^{-H}\Omega^t)_{i,i} = n$, и поэтому K является мерой того, насколько далека Ω^{-H} от матрицы Ω^t , обратной в смысле обычного матричного обращения (если таковая имеется).

Из уравнения (3.7) теперь получаем

$$K_{ij}(P^{-1}\Omega^t)_{iu}(\Omega^{-H}P)_{uj} = 0, \quad i, j, u = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Поскольку мы уже установили, что обе матрицы $P^{-1}\Omega^t$ и $\Omega^{-H}P$ являются полными, с необходимостью получаем $K_{ij} = 0$. Отсюда $\Omega^{-H}\Omega^t = n\mathbb{I}_n$, т. е. матрица Ω является обратимой и удовлетворяет условию (3.6).

Сразу заметим, что любые два целых числа n_a должны быть несовпадающими, иначе матрица Ω имела бы по крайней мере два тождественных столбца и не была бы обратима.

Двойственное необходимое условие заключается в том, что никакие два собственных значения с разными номерами не равны между собой (равенство означало бы, что в матрице Ω имеются две тождественные строки). Другими словами, при реализации условия ТЛ с помощью диагонализующих матриц M не допускается никакого вырождения по собственным значениям. Предложение доказано.

Теперь нужно рассмотреть уравнения (2.16). Сразу видно, что эти уравнения характеризуют транспонированную мастер-матрицу как обобщенную матрицу Адамара. Поскольку операция транспонирования и общий критерий Адамара коммутируют, уравнения (2.16) автоматически выполнены. Интересно заметить, что это утверждение вместе с выводом уравнений (2.16) из исходных уравнений (2.20) и (2.15) означает, что каждое решение первого условия ТЛ $X_i X_{i+1} X_i = n X_i$ специального вида, который задается нашим анзацем, является также решением второго условия ТЛЛ $X_i X_{i-1} X_i = n X_i$.

Таким образом, условие ТЛ (2.15) или эквивалентное ему условие (3.7) полностью факторизуется как два набора уравнений. Первый набор, получаемый при $i \neq j$ (и тривиально при $i = j$), представляет собой полиномиальное условие, отражающее тот факт, что мастер-матрица является обобщенной матрицей Адамара:

$$\Omega^{-n} = n(\Omega^{-1})^t, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{a=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{n_a} = n \delta_{ij}. \quad (3.11)$$

Решения этого условия для мастер-матрицы дают одновременно согласованные наборы степеней n_a для T и наборы собственных значений λ_i для M .

Второй набор, получаемый при $i = j$, дает единственное условие для матрицы собственных векторов P : для всех i, u

$$(P^{-1} \Omega^t)_{iu} (\Omega^{-n} P)_{ui} = 1. \quad (3.12)$$

Однако, поскольку матрица Ω^{-n} равняется матрице, обратной к Ω^t , умноженной на n , имеем $\Omega^{-n} P = n(P^{-1} \Omega^t)^{-1}$, а потому соотношение (3.12) на самом деле означает, что матрица $\Omega^{-n} P$ является обобщенной матрицей Адамара в том же смысле, что и ранее (включая множитель n). Будем обозначать ее через H . Поэтому, коль скоро собственные значения определены решением условия (3.11), соответствующая самосогласованная матрица P получается непосредственно из мастер-матрицы Ω , если имеется классификация обобщенных матриц Адамара.

Таким образом, проблема сводится к двум вопросам, связанным с понятием обобщенных матриц Адамара.

1. Найти классификацию самих обобщенных матриц Адамара H (с комплексными элементами) с целью получить P из Ω , используя H .
2. Получить характеристику и/или классификацию всех обобщенных матриц Адамара, которые можно реализовать как мастер-матрицы, т. е. в виде (3.5), чтобы получить все самосогласованные наборы λ_i и n_a , удовлетворяющие (3.11) и связанные с мастер-матрицей Ω . Целые числа n_a определяют многочлен

$$p(z) = \sum_{a=1}^n z^{n_a}, \quad (3.13)$$

который в дальнейшем мы будем называть *мастер-многочленом*, а условие (3.11) означает, что отношения любых двух различных собственных значений матрицы M являются нулями функции $p(z)$.

Из этих данных восстановим все матрицы M как

$$M = \Omega^t H \Lambda H^{-1} \Omega^{-n}. \quad (3.14)$$

Теперь частично рассмотрим эти два вопроса.

3.2. Решение обобщенного условия Адамара. Следует прежде всего подчеркнуть, что даже в наиболее изученном случае комплексных матриц Адамара общей классификации не существует. Поэтому мы ограничимся описанием последних достижений в этом случае и формулировкой некоторых точных результатов, которые позволяют распространить их на обобщенное условие Адамара.

Рассмотрим комплексные матрицы Адамара ($|H_{ij}| = 1$). Довольно полный обзор современных представлений можно найти в работе [16] (см. также [10]). Приведем несколько важных фактов:

- 1) классификация выполнена для $n = 2, 3, 4, 5$;
- 2) при $n = 2, 3, 5$ только матрицы Фурье $\Omega_{ab} \equiv \omega^{(a-1)(b-1)}$ (где $\omega = e^{2i\pi/n}$) являются комплексными матрицами Адамара (с точностью до эквивалентности);
- 3) при $n = 4$ существует дополнительное однопараметрическое семейство;
- 4) при $n = 6$ существуют несколько семейств (включая возможное квазивсеобъемлющее четырехпараметрическое семейство) [17];
- 5) имеются гипотезы [16] для частичных классификаций при $n = p^k$ для простых p , при $n = ab^k$ для простых a и b , а также для многих отдельных значений n [10].

Теперь наша задача – попытаться расширить некоторые из этих заключений на расфазированные обобщенные матрицы Адамара. Прямые решения обобщенного свойства Адамара, получаемые аналитически или путем компьютерных расчетов, возможны при $n = 1, \dots, 4$, и мы приведем результаты этих исследований. К сожалению, они становятся очень громоздкими при $n \geq 5$.

Однако мы нашли мощный и при этом легкий в применении способ получения обобщенных матриц Адамара из комплексных матриц Адамара (достаточное условие).

*Процедура утолщения*¹⁾ состоит в том, чтобы начать с любого параметризованного набора $M(a_i)$ таких комплексных матриц Адамара, что комплексный критерий Адамара выполнен исключительно в силу алгебраических соотношений $a_i \bar{a}_i = 1$ для всех параметров a_i . Если в M заменить величину $\bar{a}_i$ на $1/a_i$ и снять условия $|a_i| = 1$, то результирующий набор матриц будет удовлетворять обобщенному критерию Адамара. Такая процедура, в частности, справедлива для всех семейств параметрических комплексных матриц Адамара размера 4×4 и 6×6 .

¹⁾Мы позаимствовали эту формулировку из понятия “утолщенных контуров”, которую Ю.И. Манин использовал, например, в задаче Римана–Гильберта.

Рассмотрим в качестве примера семейство F_4 однопараметрических комплексных матриц Адамара размера 4×4 . Они параметризуются как

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & -a \\ 1 & -a & -1 & a \end{pmatrix}, \quad |a| = 1. \quad (3.15)$$

Если теперь a – любое отличное от нуля комплексное число, то эти матрицы становятся обобщенными матрицами Адамара.

Чтобы получить гораздо больше примеров обобщенных матриц Адамара, эту процедуру можно скомбинировать с несколькими классическими описанными ниже конструкциями, используемыми для комплексных матриц Адамара.

В завершение приведем некоторые результаты в размерностях $n = 2, 3, 4$, для которых мы смогли получить полную классификацию обобщенных матриц Адамара посредством явного решения уравнений:

- а) при $n = 2, 3$ обобщенные матрицы Адамара тождественны комплексным матрицам Адамара;
- б) при $n = 4$ все они получаются посредством утолщения комплексных матриц Адамара.

У нас пока нет аналогичного результата для $n = 5$, который позволил бы, в частности, получить обобщенные матрицы Адамара, не тождественные комплексным матрицам Адамара типа матриц Фурье (единственный подобный случай имеет место при $n = 5$).

4. ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЦЫ АДАМАРА, МАСТЕР-МАТРИЦЫ И МАСТЕР-МНОГОЧЛЕНЫ

В настоящем разделе мы объясним, как порождаются обобщенные матрицы Адамара большей размерности, уделяя при этом особое внимание построению мастер-матриц. Наш метод основан на построении Дитца комплексных матриц Адамара, которая представляет собой обобщение процедуры тензорного произведения.

4.1. Общие построения.

4.1.1. *Матрицы Фурье.* Существует общее построение, дающее одну (с точностью до эквивалентности) комплексную матрицу Адамара, которая также является мастер-матрицей. Это построение можно выполнить в любой размерности, а соответствующие матрицы называются матрицами Фурье.

Пусть ω – примитивный корень n -й степени из единицы, т.е. $\omega = e^{i\ell 2\pi/n}$, где ℓ взаимно просто с n . Матрица Фурье определяется как

$$\Omega_{ab} = \omega^{(a-1)(b-1)}, \quad a, b = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Так как мастер-матрица имеет вид $\lambda_a^{n_b}$, естественно взять $\lambda_a = \omega^{a-1}$ и $n_b = b - 1$. Заметим, что это не единственное решение, например $n_b = k_b n + b - 1$ для некоторых $k_b \in \mathbb{N}$ также является приемлемым отождествлением.

Тогда можно построить мастер-многочлен

$$F_n(z) = \sum_{b=1}^n z^{n_b} = 1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}. \quad (4.2)$$

Корни этого многочлена равны $\lambda_a/\lambda_b = \omega^{a-b}$ при $a \neq b$, чего и следовало ожидать. Решения, предложенные в работах [7], [8], принадлежат данному классу.

4.1.2. Построение Дитца. Как и в случае комплексных матриц Адамара, если A и B – две обобщенные матрицы Адамара, то $A \otimes B$ – также обобщенная матрица Адамара. Дитца обобщил это построение.

ЛЕММА 3. Пусть A – комплексная $(n \times n)$ -матрица Адамара, $\{B^{(1)}, \dots, B^{(n)}\}$ – семейство комплексных $(m \times m)$ -матриц Адамара. Тогда $(nm \times nm)$ -матрица

$$C = \begin{pmatrix} A_{11}B^{(1)} & A_{12}B^{(1)} & \dots & A_{1n}B^{(1)} \\ A_{21}B^{(2)} & A_{22}B^{(2)} & \dots & A_{2n}B^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B^{(n)} & A_{n2}B^{(n)} & \dots & A_{nn}B^{(n)} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

также является комплексной матрицей Адамара. Это утверждение верно также для обобщенных матриц Адамара.

Доказательство леммы 3 для комплексных матриц Адамара можно найти в работе [18], а для обобщенных матриц Адамара оно получается путем тривиального обобщения.

4.2. Два примера. В соответствии с леммой 2 мы будем работать с расфазированными матрицами.

4.2.1. Семейство F_4 комплексных матриц Адамара. Одно однопараметрическое семейство комплексных матриц Адамара ранга 4 можно представить с помощью мастер-матриц, когда параметр a – корень любой степени из единицы. Пусть Ω – матрица, заданная в (3.15). Ее можно ассоциировать с мастер-многочленом

$$p(z) = (1+z)(1+z^{2k}) = 1 + z + z^{2k} + z^{2k+1}.$$

Пусть

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = e^{\pi i m/2k} = a, \quad \lambda_4 = -e^{\pi i m/2k} = -a, \quad (4.4)$$

где m нечетно. Мастер-матрица имеет вид $\Omega_{ij} = \lambda_i^{n_j}$, где n_j – показатели степени, появляющиеся в мастер-многочлене $p(z)$, т. е.

$$\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = \{0, 1, 2k, 2k+1\}. \quad (4.5)$$

Заметим, что, варьируя значения m и k , мы получаем плотное множество параметров $a \in S^1$.

4.2.2. Семейство F_6 комплексных матриц Адамара. Двухпараметрическое семейство F_6 комплексных матриц Адамара ранга 6 вида

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & a & b & -1 & -a & -b \\ 1 & a\omega^2 & b\omega^4 & -1 & -a\omega^2 & -b\omega^4 \\ 1 & a\omega^4 & b\omega^2 & -1 & -a\omega^4 & -b\omega^2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

можно представить с помощью мастер-матриц, когда параметры a, b – корни любой степени из единицы. Напомним, что в матрице (4.6) ω является корнем шестой степени из единицы.

Зафиксируем три целых числа k, r и s таких, что $0 < r, s < k$, и рассмотрим многочлен

$$p(z) = (1 + z^{3r+1} + z^{3s+2})(1 + z^{3k}). \quad (4.7)$$

Тогда показатели степени n_i суть

$$\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\} = \{0, 3r + 1, 3s + 2, 3k, 3k + 3r + 1, 3k + 3s + 2\}. \quad (4.8)$$

Выберем следующие значения λ_i :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, & \lambda_2 &= e^{i\pi/3k}, & \lambda_3 &= \omega^2, \\ \lambda_4 &= \omega^2 e^{i\pi/3k}, & \lambda_5 &= \omega^4, & \lambda_6 &= \omega^4 e^{i\pi/3k}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что все отношения λ_i/λ_j (при $i \neq j$) являются корнями многочлена $p(z)$. Мастер-матрица, ассоциированная с этими λ_i , есть в точности матрица (4.6) при $a = \lambda_2^{3r+1}$ и $b = \lambda_3^{3s+2}$. Теперь, варьируя k, r и s , получаем плотное множество параметров a и b в $S^1 \times S^1$.

В контексте обобщенных матриц Адамара мы можем позволить, чтобы a и b были любыми комплексными числами, отличными от нуля. Однако нельзя отождествить получающуюся матрицу с мастер-матрицей, поскольку, например, нужно удовлетворить условию $\lambda_4^{n_2 n_4} = a^{n_4} = (-1)^{n_2}$, поэтому a должно быть равно корню из единицы.

4.3. Вложенные матрицы Фурье. Оба примера можно записать, используя построение Дитца (лемма 3). Так, второй случай соответствует (2×2) - и (3×3) -матрицам Фурье и диагональной матрице D :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где мы положили $B^{(1)} = B$ и $B^{(2)} = BD$.

Этот процесс вложения уже становится явным в нашем способе построения мастер-многочлена. Далее мы покажем, как построить новые решения путем вложения друг в друга решений меньших размерностей, так что малый блок всегда будет представлять собой матрицы Фурье. Это позволит построить довольно большой класс решений.

Пусть

$$F_{p_1}(z) = \sum_{i=1}^{p_1} z^{g_{1i}p_1+i-1}, \quad (4.10)$$

где $g_{1i} \in \mathbb{N}$. Возьмем корень многочлена $\omega_1 = e^{2\pi i/p_1}$ и выберем $\lambda_i = \omega_1^{f_{1i}p_1+i-1}$. Тогда ассоциированная мастер-матрица будет матрицей Фурье $\Omega_{ij}^{(p_1)} = \omega_1^{(i-1)(j-1)}$.

Определим $F_{p_1 p_2}(z) = F_{p_1}(z)F_{p_2}(z^{\eta_2})$, где $\eta_2 = k_1 p_1$ для некоторого положительного целого k_1 , а второй многочлен определим аналогично:

$$F_{p_2}(z) = \sum_{i=1}^{p_2} z^{g_{2i}p_2+i-1}. \quad (4.11)$$

Пусть $\omega_2 = e^{2\pi i/\eta_2 p_2}$, положим

$$\lambda_{ij} = \omega_1^{f_{1i}p_1+i-1} \omega_2^{f_{2j}p_2+j-1}. \quad (4.12)$$

Нетрудно показать, что

$$F_{p_1 p_2} \left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{k\ell}} \right) = n \delta_{ik} \delta_{j\ell}, \quad (4.13)$$

где $n = p_1 p_2$.

Мастер-матрицу, ассоциированную с многочленом $F_{p_1 p_2}$, можно получить, используя построение Дитца:

$$\Omega_{(ij),(k\ell)}^{(p_1 p_2)} = \lambda_{ij}^{(g_{1k} p_1 + k - 1) + \eta_2 (g_{2\ell} p_2 + \ell - 1)} = \omega_2^{\eta_2 (j-1)(\ell-1)} \Omega_{ik}^{(p_1)} D(\omega_2^{f_{2j} p_2 + j - 1}), \quad (4.14)$$

где $D(z)$ – диагональная матрица:

$$(D(z))_{k\ell} = \delta_{k\ell} z^{g_{1k} p_1 + k - 1}. \quad (4.15)$$

Теперь к этому процессу можно применить метод итераций. В конце концов получим матрицу размера $n = \prod_i p_i$. Таким путем можно получить много примеров, включая все примеры, которые мы смогли построить исходя из известных примеров комплексных матриц Адамара. Возникает интересный вопрос: можно ли понять, является ли данный метод полным, или можно найти контрпример?

Заметим, что все элементы матрицы являются корнями из единицы, однако свободные параметры f_{ij} и g_{ij} позволяют получить плотное множество в S^1 при варьировании k_i . Поэтому из доказательства того, что с помощью данного метода можно получить все примеры, должно следовать, что любая мастер-матрица является комплексной матрицей Адамара с элементами, равными корням из единицы, т.е. матрицей Батсона.

Альтернативный подход заключается в использовании мастер-многочлена. Можно задаться вопросом, найдется ли такой многочлен $F(z)$ с коэффициентами в $\{0, 1\}$,

что выполнены два следующих условия: $F(1) = n$, и найдется подмножество его корней $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, удовлетворяющих соотношениям типа $\alpha_i \alpha_j = \alpha_k$. Эти вопросы были рассмотрены в работе [19], хотя и не совсем в нашей формулировке.

4.4. Ограничения. Предложенный метод имеет следующие ограничения.

1. Хотя с помощью данного метода можно получить широкий спектр мастер-матриц и мастер-многочленов, у нас нет доказательства, что он является исчерпывающим.

2. Не все построенные мастер-многочлены соответствуют различным мастер-матрицам. Например, многочлен

$$F(z) = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^6$$

также соответствует матрице Фурье, построенной исходя из корня $e^{i2\pi/5}$.

3. Используя предложенное построение, мы построили только мастер-матрицы, состоящие лишь из корней из единицы. Необходимо добавить, что ни одна из утолщенных матриц для $n = 4, 6$ с матричными элементами, по модулю отличными от единицы, не отождествляется как мастер-матрица для какого бы то ни было многочлена. Например, если рассмотреть матрицу вида (4.6), то Ω примет вид мастер-матрицы, только если a и b являются комплексными числами, по модулю равными единице. То же самое произойдет, если мы попытаемся подвергнуть утолщению комплексные матрицы Адамара, построенные предложенным выше методом.

4.5. Комплексные матрицы Адамара, не являющиеся мастер-матрицами. Важно отметить, что не все комплексные матрицы Адамара являются мастер-матрицами. Приведем два примера:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & j & j & j^2 & j^2 \\ 1 & j & 1 & j^2 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 & 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^2 & j & 1 & j \\ 1 & j^2 & j & j^2 & j & 1 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i & -i & i \\ 1 & i & -1 & a & -a & -i \\ 1 & -i & -\bar{a} & -1 & i & \bar{a} \\ 1 & -i & \bar{a} & i & -1 & -\bar{a} \\ 1 & i & -i & -a & a & -1 \end{pmatrix},$$

где j – примитивный кубический корень из единицы, а a – отличное от нуля комплексное число.

Докажем, что матрица H_0 не является мастер-матрицей. Предположим, что $(H_0)_{ij} = \lambda_i^{n_j}$, где $n_1, \dots, n_6$ не имеют общего делителя. Все элементы матрицы H_0 являются корнями третьей степени из единицы, поэтому λ_i является корнем третьей степени из единицы. Однако имеются только три различных корня третьей степени из единицы, и это противоречит тому, что матрица H_0 имеет шесть различных строк.

Аналогично можно доказать, что матрица H_1 также не является мастер-матрицей.

5. ОБОБЩЕННЫЙ АНЗАЦ РАНГА n

В заключение предложим обобщение исходного анзаца. На самом деле начальный анзац ранга n (1.1) можно переписать в очень поучительном виде:

$$T = \left(\sum_{i=1}^n e_{ii} \otimes M^{n_i} \right) (\Gamma \otimes \mathbb{I}) \left(\sum_{j=1}^n e_{jj} \otimes M^{n_j} \right)^{-1}, \quad (5.1)$$

где Γ – определенный проектор ранга 1: $\Gamma \equiv v.v^t$, а v – n -вектор, все компоненты которого равны единице.

Теперь распространим это построение на более общий случай проектора ранга 1 $\Gamma \equiv v.w^t$, где v и w – два любых n -вектора, таких что $\sum_{i=1}^n v_i w_i \equiv \alpha \neq 0$ (т.е. $\Gamma^2 = \alpha \Gamma$). Заметим, что в этом построении немедленно видно, что T имеет ранг n :

$$\text{rank } T = \text{rank}(\Gamma \otimes \mathbb{I}) = \text{rank } \Gamma \text{ rank } \mathbb{I} = n. \quad (5.2)$$

Теперь генераторы ТЛ имеют вид, обобщающий (1.1):

$$T_i = \sum_{a,b=1}^n v_a w_b \mathbb{I}^{\otimes(i-1)} \otimes e_{ab} \otimes M^{n_a - n_b} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-i-1)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

В этом обобщенном случае весь вывод работает точно так же и позволяет реализовать представления алгебры ТЛ $TL_N(q)$, где $\nu(q) = \sqrt{n}$, с помощью анзаца (5.1), по крайней мере для диагонализуемых матриц M . Сохраняя точное определение мастер-матрицы Ω в виде (3.5), мы должны будем решить взвешенное обобщенное условие Адамара для Ω :

$$\Omega^{-n} V W = \alpha (\Omega^{-1})^t. \quad (5.4)$$

Здесь V, W – представления алгебры Картана векторов v, w :

$$V \equiv \sum v_i e_{ii}, \quad W \equiv \sum w_i e_{ii}.$$

Квазиточное (с точностью до замены n на α) условие Адамара определяет матрицу P , но на этот раз для “твистованной” комбинации, включающей V и W :

$$(P^{-1} V \Omega^t)_{iu} (\Omega^{-n} W P)_{ui} = \frac{\alpha}{n}. \quad (5.5)$$

Общее решение взвешенного условия Адамара (5.4) будет являться предметом дальнейших исследований.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, выбор различных векторов V и W для параметризации T вводит в критерий Адамара дополнительный параметр α . Однако параметр ТЛ q остается неизменным; другими словами, новый анзац по-прежнему представляет только алгебру $TL_N(q)$ с $\nu(q) = \sqrt{n}$ вследствие необходимого тождества при $k = l$ для обобщенного варианта уравнения (2.18).

Представление, предложенное в работе [7], принимает точно такой же вид (5.1) или, эквивалентно, (5.3), хотя и с более общими векторами v, w , коль скоро несущественные параметры q_1, q_2 удалены с использованием стандартной калибровочной ковариантности условий ТЛ $T_{12} \rightarrow g_1 g_2 T_{12} (g_1 g_2)^{-1}$.

В работе [7] после избавления от калибровки, порожденной матрицей

$$g = \begin{pmatrix} q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем матрицу

$$U^{(I)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & \omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая принимает вид (5.3) при

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В компактном виде $U^{(I)}$ записывается как

$$U^{(I)} = \begin{pmatrix} M^0 & \omega M & \omega M^2 \\ \omega^2 M^{-1} & M^0 & M \\ \omega^2 M^{-2} & M^{-1} & M^0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Однако дополнительные векторы v, w обладают упрощающим свойством, в соответствии с которым ассоциированные диагональные матрицы удовлетворяют равенству $VW = 1$, а потому условие для мастер-матрицы (5.4) не меняется. Более точно,

$$V = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Условие (5.5), ассоциированное с P , можно в этом случае переписать как нетривиальное условие (3.12) для матрицы $\tilde{P} \equiv V^{-1}PV$. Решения из работы [7], таким образом, тесно связаны с матрицами M , выведенными из канонических решений типа решений Фурье для условий Адамара, но не тождественны им.

Однако из-за условия вырождения $VW = 1$ эта форма генератора в действительности становится калибровочно-эквивалентной в смысле канонического условия ТЛ (т.е. $T_{12} \rightarrow g_1 g_2 T_{12} (g_1 g_2)^{-1}$) исходному выражению (2.14) чисто степенного вида с матрицей $\bar{M} = g M g^{-1}$, сопряженной матрице M . Этот случай на самом деле является общим: когда диагональные матрицы V и W , построенные из векторов v и w , обратны друг другу, общий анзац ранга n с v и w является калибровочно-эквивалентным стандартному условию ТЛ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили явное построение всех диагонализуемых строительных блоков M для анзаца (1.1) представления алгебры ТЛ. В предложенном построении комплексные матрицы Адамара и их обобщения занимают видное место, характеризуя как набор собственных значений (мастер-матрица Ω), так и набор собственных векторов (матрица P). Интересно отметить, что исходное предложение для таких генераторов алгебры ТЛ [7], [8] проистекало из рассмотрений квантового запутывания: действительно, комплексные матрицы Адамара появляются, в частности, в задачах, связанных с проблемой квантовых компьютеров и дискретного матричного преобразования Фурье (в последнем случае матриц Фурье); они определяют так называемые вентили Уолша–Адамара или более общие квантовые вентили (см., например, [20]). Таким образом, не слишком удивительно видеть такую связь между представлением алгебры ТЛ и матрицами Адамара.

Хотя собственные векторы параметризуются с помощью обобщенных матриц Адамара, в настоящее время представляется, что все мастер-матрицы Ω , которые содержат собственные значения матрицы M , построенные в явном виде в предыдущих разделах, являются комплексными матрицами Адамара типа матриц Батсона (т. е. их элементами являются корни из единицы) [15]. Открытым остается вопрос, могут ли появляться более общие мастер-матрицы типа обобщенных матриц Адамара, а также вопрос о том, как найти некоторый достаточный критерий для обобщенной матрицы Адамара, чтобы ее можно было переписать в виде мастер-матрицы.

Матрицы Батсона – это матрицы, наиболее подходящие для рассмотрения вопросов квантовой запутанности и вычислений с помощью квантового компьютера [10]. В настоящий момент, однако, не известно, имеют ли обобщенные матрицы Адамара какое-либо конкретное отношение к этим проблемам. Следует поставить вопрос об их значимости, а также значимости полученных представлений алгебры ТЛ (по крайней мере с собственными векторами, описываемыми обобщенной матрицей Адамара вместо комплексной матрицы Адамара) для некоторых “обобщенных квантовых вычислений”.

Для будущих исследований осталось еще много технических вопросов. Наиболее содержательный из них – это, вероятно, вопрос о недиагонализуемых матрицах M (имеющих жорданов вид). Предварительные результаты [21] указывают на то, что понятие мастер-многочлена сохраняется для невырожденных собственных значений (простых нулей минимального многочлена). Однако сформулировать условия ТЛ гораздо сложнее из-за появления внедиагональных вкладов, запутанных с уравнениями, зависящими только от собственных значений.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Тьерри Юлье за то, что он указал на актуальность понятия комплексных матриц Адамара, и Луиджи Кантини за полезные замечания об условиях ТЛ. Работа выполнена при поддержке CNRS, Université de Cergy-Pontoise, Université de Savoie и ANR Project DIADEMS (Programme Blanc ANR SIMI1 2010-BLAN-0120-02). Работа П.П. Кулиша выполнена при частичной поддержке GDRI “Formation et recherche en physique théorique” и РФФИ (гранты № 11-01-00570_a, 12-01-00207_a).

Список литературы

- [1] H. N. V. Temperley, E. Lieb, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **322**:1549 (1971), 251–280.
- [2] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [3] P. Martin, *Potts Models and Related Problems in Statistical Mechanics*, Series on Advances in Statistical Mechanics, **5**, World Sci., Singapore, 1991.
- [4] Ж. Аван, П. П. Кулиш, Ж. Роллет, *ТМФ*, **169**:2 (2011), 194–203.
- [5] P. P. Kulish, *J. Phys. A*, **36**:38 (2003), L489–L493.
- [6] P. P. Kulish, N. Manojlović, Z. Nagy, *J. Math. Phys.*, **49**:2 (2008), 023510, 9 pp.
- [7] G. Wang, K. Xue, C. Sun, C. Zhou, T. Hu, Q. Wang, *Quantum Inf. Process.*, **9**:6 (2010), 699–710, arXiv: 0903.3711.
- [8] C. Sun, G. Wang, T. Hu, C. Zhou, Q. Wang, K. Xue, *Internat. J. Quantum Inf.*, **7**:6 (2009), 1285–1293, arXiv: 0904.0090.
- [9] F. Szöllősi, *Construction, classification and parametrization of complex Hadamard matrices*, arXiv: 1110.5590.
- [10] W. Tadej, K. Życzkowski, *Open Syst. Inf. Dyn.*, **13**:2 (2006), 133–177.
- [11] V. Chari, A. N. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [12] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [13] V. Jones, *Internat. J. Modern Phys. B*, **4**:5 (1990), 701–713.
- [14] J. J. Sylvester, *Phil. Mag. Ser. 4*, **34**:232 (1867), 461–475.
- [15] A. T. Butson, *Proc. AMS*, **13** (1962), 894–898.
- [16] N. Barros e Sa, I. Bengtsson, *Linear Algebra Appl.*, **438**:7 (2013), 2929–2957, arXiv: 1202.1181.
- [17] F. Szöllősi, *J. London Math. Soc.*, **85**:3 (2012), 616–632.
- [18] P. Diță, *J. Phys. A*, **37**:20 (2004), 5355–5374.
- [19] M. Drmota, M. Skalba, *Acta Arith.*, **71**:1 (1995), 64–77.
- [20] K. Fujii, K. Funahashi, T. Kobayashi, *Internat. J. Geom. Methods Modern Phys.*, **3**:2 (2006), 269–283.
- [21] G. Rollet, private communication, 2013.

Поступила в редакцию 18.06.2013