Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пополитов, О связи между функциями Некрасова и периодами Бора–Зоммерфельда в случае чистой $SU(N)$ калибровочной теории, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 2, 274–289

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:51:44

© 2014 г.

А. В. Пополитов*

О СВЯЗИ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ НЕКРАСОВА И ПЕРИОДАМИ БОРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА В СЛУЧАЕ ЧИСТОЙ $SU(N)$ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Изучается дуальность между функцией Некрасова и квантованным препо-тенциалом Зайберга–Виттена. Гипотеза протестирована более тщательно, чем это было сделано до сих пор, мотивация и исторический контекст дуальности не об-суждаются. Проверка гипотезы с точностью $o(\hbar^6, \ln \Lambda)$ проведена аналитически для произвольного N (представлены явные формулы). Подробно представле-ны детали вычисления, необходимые для того, чтобы провести проверку на компьютере. Это позволяет проверить гипотезу с точностью до 6-го порядка по $\hbar$ и полиномиальных степеней Λ при $N = 2, 3, 4$. Рассмотрен только случай чистой $SU(N)$ калибровочной теории.

Ключевые слова: калибровочные теории, интегрируемые системы.

DOI: 10.4213/tmf8565

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий наука нередко сталкивалась с тем, что величи-ны, вычисленные в двух теориях с различными математическими аппаратами и/или физическим смыслом, совпадают. Когда так происходит, говорят, что имеет место дуальность между этими двумя теориями, и зачастую это указывает на существова-ние некоторой скрытой структуры или объединяющего принципа, который делает дуальность очевидной.

Открытие и изучение дуальностей чрезвычайно важно, поскольку как только скрытую структуру удастся обнаружить, она позволяет взглянуть с правильной стороны на обе теории. Более того, поскольку некоторые теории в современной математической физике еще не получили экспериментального подтверждения, сам факт того, что они дуальны некоторым другим теориям, может служить некоторым указанием на то, что они действительно описывают реальный мир. Кроме того, даже в случае, когда скрытую структуру не удастся обнаружить, сама дуальность

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: popolit@itep.ru

может быть использована для решения задач, которые давно поставлены в рамках одной из теорий, с помощью методов другой теории.

Недавно было сделано предположение о дуальности, которая связывает между собой огромное количество теорий в современной математической физике. А именно, она связывает теорию Зайберга–Виттена (ЗВ) [1]–[14], функции Некрасова для квиверных теорий [15]–[19], конформную теорию поля [20]–[26] (связь с конформной теорией поля осуществляется с помощью напумевшего соотношения Алдая–Гайотто–Тачикавы [27]–[38]) и матричные модели в фазе Дайкграафа–Вафы [39]–[42]. Важность этого объединения, следы которого можно найти в новых [43], [44], [27]–[38], [45], а также в не очень новых работах [1], [46]–[58], невозможно переоценить. Однако, хотя на уровне концепций полная картина уже достаточно ясна [45], все еще необходимо провести множество проверок и доказательств, чтобы удостовериться, что объединение действительно имеет место.

В этой работе мы концентрируемся на малой части этого большого объединения, а именно на утверждении, что функция Некрасова при $\epsilon_2 = 0$ равна квантованному препотенциалу ЗВ при условии, что $\epsilon_1 = \hbar$. Более того, мы рассматриваем только случай чистой калибровочной теории, без гипермультиплетов материи. Идея о том, что такое соотношение существует, впервые появилась в статье [1] и была затем исследована в работах [43], [44]. Тем не менее для групп $SU(N)$ с $N > 2$ была сделана только простая проверка (с точностью $o(\hbar^2, \Lambda^{2N})$). В настоящей работе мы представляем более тщательную проверку, частично выписывая формулы явно (с точностью $o(\hbar^6, \ln \Lambda)$ для произвольных N) и частично прибегая к компьютерному эксперименту (для $N = 2, 3, 4$ мы также проверили аналитически, что дуальность выполняется с более высокой точностью, но формулы слишком длинные, чтобы явно приводить их здесь). Общего доказательства утверждения пока нет.

2. НАБРОСОК КОНСТРУКЦИИ

Сама гипотеза, а также способ ее проверки описаны в деталях в работах [44]. В этом разделе мы лишь кратко напомним конструкцию. Утверждение состоит в том, что функция Некрасова с одним из параметров регуляризации, равным нулю, совпадает с квантованным препотенциалом ЗВ:

$$\mathcal{F}_{\text{Nek}}(\epsilon_1, 0, \Lambda)|_{\epsilon_1=\hbar} = \mathcal{F}_{\text{SW}}(\hbar, \Lambda), \quad (1)$$

где препотенциал определяется уравнениями

$$\begin{aligned} a_i &= \Pi_{A_i}^{\hbar}(\lambda), \\ -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a_i} &= \Pi_{B_i}^{\hbar}(\lambda). \end{aligned}$$

Здесь Π – это периоды Бора–Зоммерфельда для квантового дифференциала ЗВ, A_i и B_i – симплектический базис в пространстве 1-циклов на кривой, λ – корни многочлена, который входит в преобразование Фурье от уравнения Бакстера (см. ниже).

Доказательство включает в себя вычисление $\Pi_{A_i}^{\hbar}$ и $\Pi_{B_i}^{\hbar}$, которые можно выразить через $\Pi_{A_i}^0$ и $\Pi_{B_i}^0$ – периоды для классического дифференциала ЗВ. Хотя $\Pi_{A_i}^0$

легко получить с помощью непосредственного интегрирования [59], прямое вычисление $\Pi_{B_i}^0$ выполнить не так просто. Вместо этого можно, например, воспользоваться широко известным фактом, что при $\hbar = 0$ соотношение верно,

$$\mathcal{F}_{\text{Nek}}(0, 0, \Lambda) = \mathcal{F}_{\text{SW}}(0, \Lambda), \quad (2)$$

откуда можно вывести

$$\Pi_{B_i}^0 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a_i}(0, 0, \Lambda). \quad (3)$$

Затем надо построить $\Pi_{B_i}^{\hbar}$ и посмотреть, совпадает ли результат с $-\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{Nek}}}{\partial a_i}(\hbar, 0, \Lambda)$. Тонкость состоит в том, что $\Pi_{B_i}^{\hbar}$ и $-\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{Nek}}}{\partial a_i}(\hbar, 0, \Lambda)$ выражены через разные наборы переменных (λ и a), так что надо выразить a через λ .

Мнемонически можно записать гипотезу в следующем виде:

$$\Pi_B^{\hbar}(\hat{\mathcal{O}}\Pi_A^0) = \hat{\mathcal{O}}(\Pi_B^0(\Pi_A^0)), \quad (4)$$

эта запись содержит в себе способ проверки гипотезы.

Далее работа организована следующим образом. В разделах 3 и 4 мы рассматриваем гипотезу более подробно с точки зрения теории кривых ЗВ и теории функций Некрасова соответственно. Особое внимание уделено вопросам автоматизации вычислений. В разделе 5 приведены сами проверки.

3. СТОРОНА ЗАЙБЕРГА–ВИТТЕНА

3.1. Основные определения. Классический препотенциал ЗВ $\mathcal{F}_{\text{SW}}$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} a_i &= \oint_{A_i} \lambda_{\text{SW}} = \Pi_{A_i}^0 \\ -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a_i} &= \oint_{B_i} \lambda_{\text{SW}} = \Pi_{B_i}^0, \end{aligned} \quad (5)$$

где λ_{SW} – это дифференциал ЗВ $\lambda_{\text{SW}} = p dx$, определенный на спектральной кривой, заданной уравнением

$$K(p) + \gamma \cos x = 0, \quad (6)$$

где $K = \sum_j u_j p^j = u_N \prod_j (p - \lambda_j)$ – многочлен. A_i и B_i образуют симплектический базис в пространстве 1-циклов на кривой.

Исходная идея статей [44] состоит в том, чтобы заменить “классический” дифференциал ЗВ $p dx$ на “квантовый” дифференциал $P dx$, где P является решением квантовой версии уравнения (6), т. е. преобразования Фурье от уравнения Бакстера

$$\left(K \left(\frac{\hbar}{i} \partial \right) + \gamma \cos x \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int^x P dx \right] = 0, \quad (7)$$

где $P = p + O(\hbar)$. Итак, $P = P(\hbar, x)$ – это формальный ряд по $\hbar$, причем каждый порядок по $\hbar$ – это (возможно, многозначная) функция x .

Периоды этого квантованного дифференциала затем определяют $\mathcal{F}_{\text{SW}}(\hbar)$ аналогично классическому случаю:

$$a_i = \Pi_{A_i}^{\hbar}(\lambda), \quad -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}(\hbar)}{\partial a_i} = \Pi_{B_i}^{\hbar}(\lambda), \quad (8)$$

где необходимо разрешить неявную зависимость $\lambda(a)$, используя первый набор уравнений (для A -циклов), и подставить ее во второй набор (для B -циклов).

Из вышесказанного ясно, что для того чтобы определить препотенциал, надо знать только периоды λ_{SW} , а не сам дифференциал λ_{SW} , это означает, что мы можем добавлять к λ_{SW} произвольные точные члены, чтобы упростить вычисления. Кроме того, идея, примененная в работах [44], состоит в том, чтобы представить квантованный дифференциал ЗВ как действие некоторого дифференциального оператора $\hat{O}$ на классический дифференциал $P dx = \hat{O}(p dx)$. Тогда для периодов также получаем

$$\Pi_{A_i}^{\hbar} = \hat{O} \Pi_{A_i}^0, \quad \Pi_{B_i}^{\hbar} = \hat{O} \Pi_{B_i}^0,$$

где $\hat{O} = 1 + O(\hbar)$.

Итак, чтобы посчитать квантовые периоды ЗВ, надо сделать следующее:

- 1) решить по теории возмущений уравнение Бакстера для P ;
- 2) упростить ряд P , добавляя к нему полные производные;
- 3) переписать получившийся ряд P в виде $\hat{O}(p)$.

Оставшаяся часть этого раздела посвящена описанию деталей этих шагов.

3.2. Решение уравнения Бакстера. Первый шаг состоит в том, чтобы вычислить ряд P по теории возмущений. При рассмотрении сопряжения ∂^n экспонентами $\exp\left[\frac{i}{\hbar} \int^x P dx\right]$ получаем

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int^x P dx\right] \partial^n \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int^x P dx\right] &= P^n + \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2} n(n-1) \dot{P} + \\ &+ \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left(\frac{1}{6} n(n-1)(n-2) P^{n-3} \ddot{P} + \frac{1}{24} 3n(n-1)(n-2)(n-3) P^{n-4} \dot{P}^2\right) + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

где суммирование на уровне k выполняется по разбиениям (диаграммам Юнга) веса k . Именно, вклад разбиения $\bar{k} = (k_1, \dots, k_m)$ равен $((\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ обозначает сопряженное разбиение)

$$\frac{1}{\alpha_m!} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \left[\left(\frac{\hbar}{i}\right)^{\alpha_m} n \dots (n - \alpha_m) P^{(k_1)} \dots P^{(k_m)} \right],$$

где

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^j (k_i + 1), \quad \beta = \prod_{i=1}^m C_{\alpha_i}^{k_i+1}, \quad \gamma = \prod_{i=1}^n (\tilde{k}_i - \tilde{k}_{i-1})!,$$

что подталкивает нас к тому, чтобы ввести величины

$$C(\bar{k}) = \frac{1}{\alpha_m!} \cdot \frac{\beta}{\gamma}.$$

Используя новые обозначения, мы можем переписать уравнение Бакстера следующим образом:

$$\sum_{\bar{k}} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{\alpha_m} K^{(\alpha_m)}(P) C(\bar{k}) + \gamma \cos x = 0, \quad (10)$$

где $K^{(i)}$ означает i -ю производную от K . Пользуясь этим уравнением, можно вычислить $P = p + \hbar p_1 + \dots + \hbar^n p_n$ с любой желаемой точностью.

3.3. Упрощение ряда P . Так как нам нужны только A - и B -периоды $P dx$, а не сам ряд P , мы можем добавлять к нему члены, которые являются точными, чтобы его упростить.

Характерный член в P имеет вид

$$\frac{K^{(i_1)}(p) \dots K^{(i_j)}(p)}{(K'(p))^k} V^{(j_1)} \dots V^{(j_l)}. \quad (11)$$

Упрощенной формой этого вклада будем называть такую форму, в которой степень по $1/K'$ наименьшая. Причина такого определения состоит в том, что если мы хотим представить P в виде действия некоторого дифференциального оператора $\hat{O}$ на p , то порядок этого оператора, грубо говоря, равен половине степени P по $1/K'$.

Мы предлагаем следующий анзац для упрощенной формы: она сама является производной от выражения вида (11).

Для того чтобы понять, как именно надо упрощать ряд P , надо заметить, что среди членов нашего анзаца есть тот, который при дифференцировании $1/K'$ дает наибольший вклад в порядок P . В самом деле, сравним следующие два выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(K')^k} &= -\frac{K''V'}{(K')^{k+2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} K^{(i)} &= -K^{(i+1)} \frac{V'}{K'}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ясно, что процедура упрощения должна выглядеть следующим образом:

- 1) находим член в P , который содержит $(K''/(K')^n)V'$ с наибольшим n ;
- 2) вычитаем из P соответствующую полную производную;
- 3) повторяем шаги 1, 2, пока в P не останется членов такого вида.

3.4. От пертурбативного ответа к дифференциальному оператору. Напомним, что для того чтобы найти периоды квантового дифференциала ЗВ, надо найти такой дифференциальный оператор $\hat{O}$, что $P = \hat{O}p$. Оказывается, что вплоть до $\hbar^4$ упрощенная форма P содержит только четные производные V , которые для $V = \cos x$ пропорциональны самому V . Это очень хорошо, так как дифференциальный оператор $\hat{O}$ можно составить из следующих элементарных дифференциальных операторов:

$$\mathcal{D}_\gamma = \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \mathcal{D}_i = \sum_{j \geq i} \frac{j!}{(j-i)!} u_j \frac{\partial}{\partial u_{j-i}} = i! \sum_{j \geq i} C_i^j u_j \frac{\partial}{\partial u_{j-i}}. \quad (13)$$

Следующие тождества являются очень полезными:

$$\mathcal{D}_\gamma(p) = -\frac{\gamma \cos x}{K'} = -\frac{V}{K'}, \quad \mathcal{D}_i(p) = -\frac{K^{(i)}}{K'}, \quad (14)$$

$$\mathcal{D}_\gamma(K^{(j)}) = -\frac{K^{(j+1)}V}{K'}, \quad \mathcal{D}_i(K^{(j)}) = K^{(j+i)} - \frac{K^{(j+1)}K^{(i)}}{K'}. \quad (15)$$

Можно заметить, что член наибольшего порядка по $1/K'$ в результате действия дифференциального оператора $\mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n}(\mathcal{D}_\gamma)^m$ на p пропорционален

$$\mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n}(\mathcal{D}_\gamma)^m(p)|_{\text{highest degree}} \sim \frac{V^m (K'')^{m-1}}{(K')^{2m-1}} \frac{(K'')^n K^{(i_1)} \cdots K^{(i_n)}}{(K')^{2n}}. \quad (16)$$

Так что процедура нахождения дифференциального оператора выглядит следующим образом:

- 1) найти член вида (16) в P ;
- 2) определить дифференциальный оператор $\mathcal{D}$, который генерирует такой член;
- 3) вычесть результат действия $\mathcal{D}$ на p из P ;
- 4) повторять шаги 1–3 до тех пор, пока P не станет равным нулю.

Суммируя все дифференциальные операторы $\mathcal{D}$, найденные в ходе выполнения этой процедуры, получаем исходный оператор $\hat{\mathcal{O}}$.

Применив эту процедуру, приходим к следующему выражению для дифференциального оператора:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}} = 1 + \frac{\hbar^2}{23 \cdot 3} \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_\gamma + \frac{7\hbar^4}{27 \cdot 3^2 \cdot 5} \left(\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_\gamma \mathcal{D}_\gamma - \frac{2}{7} \mathcal{D}_4 \mathcal{D}_\gamma \mathcal{D}_\gamma - \frac{2}{7} \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_\gamma \right) + \\ + \hat{\mathcal{O}}^{(6)} + o(\hbar^6), \end{aligned} \quad (17)$$

а формула для $\hat{\mathcal{O}}^{(6)}$ будет приведена ниже, так как ее вывод требует использования нескольких дополнительных хитростей.

Здесь важно подчеркнуть, что получившийся оператор зависит от переменных u_i и γ не произвольным образом, как в принципе могло случиться, а составлен из $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_\gamma$, т.е. лежит в довольно узком классе дифференциальных операторов. Можно надеяться, что подобное упрощение происходит также и в случае калибровочной теории с материей (XXX -цепочки).

3.4.1. Шестой порядок по $\hbar$. В шестом порядке по $\hbar$ возникает новая тонкость: упрощенная версия P содержит член $(V^{(3)})^2 \sim \sin^2 x$, так что на первый взгляд кажется, что набор операторов $(\mathcal{D}_\gamma, \mathcal{D}_i)$ недостаточен для того, чтобы выразить $\hat{\mathcal{O}}^{(6)}$. Однако взглянем на ситуацию повнимательней.

Рассмотрим более общую форму классического уравнения Бакстера

$$K(p) + \frac{\gamma}{2} e^{ix} + \frac{\beta}{2} e^{-ix} = 0, \quad (18)$$

так что предыдущая форма соответствует наложению условия $\beta = \gamma$.

Удобно ввести следующие операторы:

$$\mathcal{D}_{\gamma+} = \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \mathcal{D}_{\gamma-} = \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}. \quad (19)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\gamma+})^n(p)|_{\beta=\gamma} &= \frac{(K'')^{n-1} \cos^n x}{(K')^{2n-1}} + \dots, \\ (\mathcal{D}_{\gamma-})^n(p)|_{\beta=\gamma} &= (i)^n \frac{(K'')^{n-1} \sin^n x}{(K')^{2n-1}} + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

так что для того чтобы выразить $\hat{\mathcal{O}}^{(6)}$, нам нужен только оператор

$$(\mathcal{D}_{\gamma-})^2(p)|_{\beta=\gamma} = -\frac{\cos x}{K'} - \frac{K'' \sin^2 x}{(K')^3}. \quad (21)$$

Менее очевидно, что

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \Pi^0 = 0. \quad (22)$$

В самом деле, $\oint p dx = -\oint x dp$, так что если сделать сдвиг $x \rightarrow x + i \ln \gamma$, уравнение (18) принимает вид

$$K(p) + \frac{1}{2} e^{ix} + \frac{\beta \gamma}{2} e^{-ix} = 0, \quad (23)$$

и, вычисляя $x(p)$ пертурбативно, мы всегда получаем функцию от произведения $\gamma\beta$, которую $\mathcal{D}_{\gamma-}$ отображает в нуль. Далее, так как

$$[\mathcal{D}_{\gamma-}, \mathcal{D}_{\gamma+}] = \mathcal{D}_{\gamma-}, \quad (24)$$

только те члены в $\hat{\mathcal{O}}$, которые не содержат $\mathcal{D}_{\gamma-}$, дают ненулевой вклад при действии на Π^0 . А это означает, что после того как мы выразим $\hat{\mathcal{O}}$ через $\mathcal{D}_{\gamma+}$ и $\mathcal{D}_{\gamma-}$, можно отбросить члены с $\mathcal{D}_{\gamma-}$, а $\mathcal{D}_{\gamma+}$ всюду заменить на $\gamma \partial / \partial \gamma$.

Проделав все это, получаем следующий ответ для $\hat{\mathcal{O}}^{(6)}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}^{(6)} &= \frac{\hbar^6}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} \left[\left(\frac{31}{8} (\mathcal{D}_2)^3 - \frac{15}{4} \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_4 + \frac{1}{3} (\mathcal{D}_3)^2 + \mathcal{D}_6 \right) (\mathcal{D}_\gamma)^3 + \right. \\ &\quad + \left(-\frac{15}{4} (\mathcal{D}_2)^3 + 2 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_4 - (\mathcal{D}_3)^2 - \mathcal{D}_6 \right) (\mathcal{D}_\gamma)^2 + \\ &\quad \left. + \left((\mathcal{D}_2)^3 - \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_4 + \frac{2}{3} (\mathcal{D}_3)^2 \right) \mathcal{D}_\gamma \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

3.4.2. Оператор D_i , выраженный через корни. Так как A - и B -периоды удобно выражаются через корни полинома K , а не через его коэффициенты, необходимо выразить D_i , а значит, и $\hat{\mathcal{O}}$ через корни. Можно явно проверить, что верно следующее достаточно простое выражение для D_i через корни:

$$D_i = - \sum_m \frac{K^{(i)}(\lambda_m)}{K'(\lambda_m)} \frac{\partial}{\partial \lambda_m}. \quad (26)$$

3.5. Классические A -периоды, выраженные через корни. В работе [59] было получено общее выражение для классических A -периодов

$$\Pi_{A_i}^0 = \lambda_i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)_n \Lambda^{2nN}}{n!(2n)!} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^{2n-1} \prod_{k \neq i} (\lambda_k - \lambda_i)^{-2n}. \quad (27)$$

С точностью $o(\Lambda^{4N})$ имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{A_i}^0 = \lambda_i - \frac{\Lambda^{2N}}{2} \frac{1}{\prod \lambda^2} \sum \frac{1}{\lambda} - \\ - \Lambda^{4N} \frac{1}{\prod \lambda^4} \left(\left(\sum \frac{1}{\lambda} \right)^3 + \frac{3}{4} \left(\sum \frac{1}{\lambda} \right) \left(\sum \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{8} \sum \frac{1}{\lambda^3} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\prod 1/\lambda^n$ – это краткая запись для $\prod_{k \neq i} 1/\lambda_{ik}^n$, а $\sum 1/\lambda^n$ – краткая запись для $\sum_{k \neq i} 1/\lambda_{ik}^n$.

4. СТОРОНА НЕКРАСОВА

Определение функции Некрасова можно найти во множестве статей (см., например, [18], [44]). Приведем здесь определение для случая $\epsilon_2 = 0$. Функция Некрасова $\mathcal{F}_{\text{Nek}}$ равна сумме пертурбативного и инстантонного вкладов:

$$\mathcal{F}_{\text{Nek}} = \mathcal{F}_{\text{pert}} + \mathcal{F}_{\text{inst}}. \quad (29)$$

Для $\mathcal{F}_{\text{pert}}$ не существует удобного выражения, но такое выражение есть для $\partial \mathcal{F}_{\text{pert}} / \partial a_i$, чего вполне достаточно для наших целей:

$$-\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{pert}}}{\partial a_i} = \sum_{j \neq i} 4a_{ij} \left[\left(\ln \frac{a_{ij}}{\Lambda} - 1 \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \left(\frac{\epsilon_1}{a_{ij}} \right)^{2m} \right]. \quad (30)$$

Чтобы так определить $\mathcal{F}_{\text{pert}}$, вклад $\mathcal{F}_{\text{inst}}$ надо определить следующим образом (это немного отличается от определения в [21], но мы считаем, что это вопрос нормировки параметров):

$$\mathcal{F}_{\text{inst}} = -2\epsilon_1 \epsilon_2 \ln Z_{\text{inst}}, \quad (31)$$

где Z_{inst} – сумма по наборам из n разбиений

$$\begin{aligned} Z_{\text{inst}} &= \sum_n \left(\tilde{\Lambda}^{2Nn} \sum_{\bar{k}, |k|=n} Z_{\text{inst}}^{\bar{k}} \right), \\ Z_{\text{inst}}^{\bar{k}} &= \prod_{n,l} \prod_{i,j} \frac{a_{nl} + \epsilon_1(i-1) + \epsilon_2(-j)}{a_{nl} + \epsilon_1(i-1 - \tilde{k}_{li}) + \epsilon_2(k_{nj} - j)}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\tilde{\Lambda}^N = \frac{1}{2i^N} \Lambda^N, \quad (33)$$

и Λ – это в точности Λ со стороны ЗВ дуальности.

В двуинстантонном приближении Z_{inst} имеет вид (индексы в квадратных скобках нумеруют типы наборов диаграмм Юнга)

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{inst}} &= 1 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 Z_{[1]} + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 (Z_{[2]} + Z_{[1,1]} + Z_{[1],[1]}), \\
 Z_{[1]} &= -\frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \sum_{i=1}^N R_i(a_i), \\
 Z_{[2]} &= \frac{1}{2\epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \sum_{i=1}^N R_i(a_i) R_i(a_i + \epsilon_2), \\
 Z_{[1,1]} &= -\frac{1}{2\epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \sum_{i=1}^N R_i(a_i) R_i(a_i + \epsilon_1), \\
 Z_{[1],[1]} &= \frac{1}{2\epsilon_1^2 \epsilon_2^2} \sum_{i \neq j} R_i(a_i) R_j(a_j) \frac{a_{ij}^2 (a_{ij}^2 - \epsilon^2)}{(a_{ij}^2 - \epsilon_1^2)(a_{ij}^2 - \epsilon_2^2)}, \\
 R_i(x) &= \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x - a_j)(x - a_j + \epsilon)}.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Из выражения для Z_{inst} можно легко получить выражение для $\mathcal{F}_{\text{inst}}(\epsilon_1, 0)$ (теперь в $R_i(x)$ ϵ_2 тоже надо положить равным нулю):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\text{inst}} &= \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_i R_i(a_i) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \left[\frac{1}{\epsilon_1} \sum_i \left(R_i^2(a_i) \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{a_{ij}} + \frac{1}{a_{ij} + \epsilon_1} \right) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\epsilon_1^2} \sum_i R_i^2(a_i) + \frac{1}{\epsilon_1^2} \sum_i R_i(a_i) R_i(a_i + \epsilon_1) + \sum_{i \neq j} R_i(a_i) R_j(a_j) \frac{1}{a_{ij}^2 - \epsilon_1^2} \right]. \tag{35}
 \end{aligned}$$

5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ

Как было замечено в работах [44], вычисление обеих сторон (ЗВ и Некрасова) дуальности можно легко компьютеризировать и, следовательно, можно проверить дуальность до любого желаемого порядка по $\hbar$ и Λ для данного N . Однако в случае общего N вычисления надо проводить “руками”, и для больших порядков по Λ представление результатов – нелегкая задача (главным образом потому, что формулы получаются очень длинными и на самом деле ничего не иллюстрируют). Так что для простоты здесь мы приводим явные вычисления для произвольных N только с точностью $o(\hbar^6, \ln \Lambda)$.

Мы провели явные компьютерные проверки для нескольких малых значений N и можем утверждать, что дуальность выполняется со следующей точностью:

- 1) $N = 2$: по крайней мере $o(\hbar^6, \Lambda^{6N})$;
- 2) $N = 3$: по крайней мере $o(\hbar^6, \Lambda^{4N})$;
- 3) $N = 4$: по крайней мере $o(\hbar^6, \Lambda^{2N})$.

5.1. Нулевой порядок по Λ . Здесь мы сосредоточим свои усилия на проверке гипотезы с точностью $o(\hbar^6, \ln \Lambda)$ для произвольных N . Формулы в этом случае довольно просты и идеи проверок легко ими подкреплять.

Прежде всего, как классические, так и квантовые A -периоды на стороне ЗВ равны соответствующим корням полинома K :

$$\Pi_{A_i}^{\hbar} = \Pi_{A_i}^0 = a_i = \lambda_i, \quad (36)$$

так как $\hat{\mathcal{O}}$ нетривиально действует только на Λ -зависимые члены, которых в этом случае нет. Так что ниже мы пишем во всех формулах a вместо λ и надеемся, что это не вызовет непонимания.

Напомним, что тождество, которое мы хотим проверить, – это

$$\Pi_{B_i}^{\hbar} = \hat{\mathcal{O}}\Pi_{B_i}^0,$$

или, другими словами,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{pert}}}{\partial a_i}(\hbar, \Lambda) = \hat{\mathcal{O}} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{pert}}}{\partial a_i}(0, \Lambda). \quad (37)$$

С точностью $o(\hbar^6)$ $\Pi_{B_i}^{\hbar}$ равно

$$\begin{aligned} \Pi_{B_i}^{\hbar} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{pert}}}{\partial a_i}(\hbar, \Lambda) = \sum_{j \neq i} \left[a_{ij} \left(\ln \frac{a_{ij}}{\Lambda} - 1 \right) + \frac{\hbar^2}{12} \frac{1}{a_{ij}^2} - \frac{\hbar^4}{360} \frac{1}{a_{ij}^4} + \frac{\hbar^6}{1260} \frac{1}{a_{ij}^6} \right], \\ \Pi_{B_i}^0 &= -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{pert}}}{\partial a_i}(0, \Lambda) = \sum_{j \neq i} a_{ij} \left(\ln \frac{a_{ij}}{\Lambda} - 1 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Так как $\hat{\mathcal{O}}$ нетривиально действует только на Λ -зависимую часть $\Pi_{B_i}^0$ и $\mathcal{D}_\gamma \ln \gamma = 1$, члены в $\hat{\mathcal{O}}$ со степенью $\mathcal{D}_\gamma$ больше единицы не дают вклада, и на самом деле мы проверяем тождество

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \frac{\hbar^2}{12} \frac{1}{a_{ij}} - \frac{\hbar^4}{360} \frac{1}{a_{ij}^3} + \frac{\hbar^6}{1260} \frac{1}{a_{ij}^5} &= \\ &= \left[\frac{\hbar^2}{2^3 \cdot 3} \mathcal{D}_2 - \frac{\hbar^4}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5} \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2 + \frac{\hbar^6}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} \left((\mathcal{D}_2)^3 - \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_4 + \frac{2}{3} (\mathcal{D}_3)^2 \right) \right] \times \\ &\times \left(-\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} a_{ij} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

так как $\mathcal{D}_\gamma(\ln(1/\Lambda)) = -1/N$.

Проверка естественным образом разбивается на три шага: для $\hbar^2$, $\hbar^4$ и $\hbar^6$ соответственно. Ниже для каждого из порядков по $\hbar$ сначала показывается, что структура обеих частей равенства (39) одинакова, а затем, что совпадает и коэффициент.

Для порядка $\hbar^2$

$$\mathcal{D}_2 \Pi^0 = - \sum_{j \neq i} \left(\sum_{k \neq i} \frac{2}{a_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{2}{a_{jk}} \right) = - \sum_{k \neq i} 2 \frac{(N-1)+1}{a_{ik}} \quad (40)$$

и

$$\frac{2}{2^3 \cdot 3} = \frac{1}{12}. \quad (41)$$

Для порядка $\hbar^4$

$$\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2 \Pi^0 = -4N \sum_{j \neq i} \frac{1}{a_{ij}^2} \left(\sum_{k \neq i} \frac{1}{a_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{1}{a_{jk}} \right) = - \sum_{j \neq i} \frac{8N}{a_{ij}^3}, \quad (42)$$

так как

$$\sum_{k \neq i} \frac{1}{a_{ik}} - \sum_{k \neq j} \frac{1}{a_{jk}} = \frac{2}{a_{ij}} + \sum_{k \neq i, j} \frac{a_{ji}}{a_{ik} a_{jk}}, \quad (43)$$

и

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{a_{ij} a_{jk} a_{ki}} = \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{-1}{a_{ji} a_{kj} a_{ik}} = \sum_{k \neq i} \sum_{j \neq i, k} \frac{-1}{a_{ji} a_{kj} a_{ik}} = 0. \quad (44)$$

Соответствующий коэффициент

$$-\frac{8}{2^6 3^2 5} = -\frac{1}{360}, \quad (45)$$

как и должно быть.

Для порядка $\hbar^6$ снова стратегия состоит в том, чтобы переписать правую часть как “вложенные суммы”, т. е. суммы, в которых все индексы суммирования попарно различны, а именно

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_2)^3 \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} a_{ij} &= -96 \sum_{j \neq i} \frac{1}{a_{ij}^5} + 48 \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{a_{ij}^3 a_{ik} a_{jk}}, \\ \frac{2}{3} (\mathcal{D}_3)^2 \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} a_{ij} &= -24 \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{a_{ij}^3 a_{ik}} \left(\frac{1}{a_{ik}} + \frac{1}{a_{jk}} \right) - \\ &\quad - 24 \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \sum_{l \neq i, j, k} \frac{1}{a_{ij}^2 a_{ik} a_{il}} \left(\frac{1}{a_{ij}} + \frac{1}{a_{ik}} \right) - \frac{1}{a_{ij}^2 a_{ik} a_{jl}} \left(\frac{1}{a_{ji}} + \frac{1}{a_{jk}} \right) - \\ &\quad - 12 \sum_{i \neq j} \sum_{k \neq i, j} \sum_{n \neq i, j, k} \sum_{l \neq i, j, k, n} \frac{1}{a_{ij}^2 a_{ik}} \left(\frac{1}{a_{in} a_{il}} - \frac{1}{a_{jn} a_{jl}} \right), \\ \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_4 \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} a_{ij} &= -16 \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \sum_{l \neq i, j, k} \sum_{p \neq i, j, k, l} \frac{1}{a_{ij}^2} \left(\frac{1}{a_{ik} a_{il} a_{ip}} - \frac{1}{a_{jk} a_{jl} a_{jp}} \right) - \\ &\quad - 48 \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \sum_{p \neq i, j, k} \frac{1}{a_{ij}^3} \left(\frac{1}{a_{ik} a_{ip}} + \frac{1}{a_{jk} a_{jp}} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Заметим, что

$$\frac{96}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{1260}, \quad (47)$$

так что коэффициент верен.

Чтобы завершить проверку, надо убедиться, что двойные, тройные и четверные суммы равны нулю. Здесь мы не выписываем их все, только некоторые их примеры, чтобы проиллюстрировать идею вычисления, так как единственный прием, который надо использовать, – это перестановка имен немых индексов в суммах. Более точно, надо переписать каждую данную сумму в виде суммы “циклических сумм” вида

$$\sum_{i_1 \neq i} \cdots \sum_{i_n \neq i, i_1, \dots, i_{n-1}} \frac{1}{a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_n i}}$$

и затем показать, что такие циклические суммы равны нулю, заметив, что они не меняются при перестановке индексов $i_1, \dots, i_n$, а затем усреднив по всем перестановкам.

5.2. Примеры. Для двойной суммы имеем

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{a_{ij}^3 a_{ik}} \left(\frac{1}{a_{ik}} - \frac{1}{a_{jk}} \right) = \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{a_{ij}^2 a_{ik}^2 a_{jk}} = 0 \quad (48)$$

из-за асимметрии суммируемого выражения при замене $j \leftrightarrow k$.

Для одной из четверных сумм имеем (мы опустили символы суммирования, чтобы упростить формулы)

$$\frac{1}{a_{ij}^2 a_{ik}} \left(\frac{1}{a_{in} a_{il}} - \frac{1}{a_{jn} a_{jl}} \right) \sim \frac{1}{a_{ij} a_{ik} a_{in} a_{jl} a_{jn}} + \frac{1}{a_{ij} a_{ik} a_{in} a_{jl} a_{il}}, \quad (49)$$

где знак $\sim$ означает, что иногда в формуле должен появиться множитель $1/2$, что несущественно, так как мы собираемся показать, что результат равен нулю. Вторая сумма равна нулю, так как она содержит цикл $a_{ij} a_{jl} a_{li}$. В первом члене мы можем заменить $l \leftrightarrow j$ и сложить с результатом замены $l \leftrightarrow n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{ij} a_{ik} a_{in} a_{jl} a_{jn}} &\sim \frac{1}{a_{ik} a_{ij} a_{jn} a_{ni}} \left(\frac{1}{a_{jl}} - \frac{1}{a_{nl}} \right) \sim \frac{1}{a_{ik} a_{ij} a_{jl} a_{ln} a_{ni}} \sim \\ &\sim \frac{1}{a_{ik} a_{ij} a_{jl} a_{ln} a_{ni}} + \frac{1}{a_{ik} a_{il} a_{lj} a_{jn} a_{ni}} + \frac{1}{a_{ik} a_{ij} a_{jn} a_{nl} a_{li}} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы сделали еще один шаг на пути к доказательству того, что квантованный дифференциал ЗВ равен функции Некрасова $\mathcal{F}_{\text{Nek}}$ с равным нулю ϵ_2 . Мы рассмотрели случай чистой калибровочной $SU(N)$ теории. Были представлены явные формулы для проверки с точностью $o(\hbar^6, \ln \Lambda)$ для произвольных N , а также были проработаны некоторые промежуточные шаги, необходимые для построения рассматриваемых объектов и, в особенности, для компьютеризации проверки. Квантовый оператор $\hat{\mathcal{O}}$, который играет центральную роль на стороне ЗВ дуальности, был вычислен с точностью $o(\hbar^6)$. Все эти рассмотрения позволили нам проверить на компьютере дуальность для ненулевых инстантонных чисел для нескольких малых значений N .

Однако наше понимание данной дуальности все еще далеко не полно. Остается много интересных вопросов, например, какова структура коэффициентов $\hat{\mathcal{O}}$, в каких терминах надо формулировать гипотезу, чтобы формулы были более компактными, и сохраняется ли дуальность, если включить в рассмотрение поля материи. Работа продолжается в этих направлениях.

Благодарности. Автор признателен А. Д. Миронову и А. Ю. Морозову за вдохновляющие обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 07-02-00878, совместный грант № 09-02-91005-АНФ), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3349.2012.2), Министерством образования и науки РФ и Фондом «Династия».

Список литературы

- [1] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–477, arXiv: hep-th/9505035.
- [2] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52; Erratum, **430**:2 (1994), 485–486, arXiv: hep-th/9407087.
- [3] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **431**:3 (1994), 484–550, arXiv: hep-th/9408099.
- [4] E. J. Martinec, N. P. Warner, *Nucl. Phys. B*, **459** (1996), 97–112, arXiv: hep-th/9509161.
- [5] A. Hanany, Y. Oz, *Nucl. Phys. B*, **452**:1–2 (1995), 283–312, arXiv: hep-th/9505075; P. C. Argyres, A. D. Shapere, *Nucl. Phys. B*, **461**:3 (1996), 437–459; arXiv: hep-th/9509175; J. Sonnenschein, S. Theisen, S. Yankielowicz, *Phys. Lett. B*, **367**:1–4 (1996), 145–150; arXiv: hep-th/9510129; J. Minahan, D. Nemeschansky, *Nucl. Phys. B*, **468**:1–2 (1996), 72–84, arXiv: hep-th/9601059; N. Dorey, V. Khoze, M. Mattis, *Phys. Rev. D*, **54**:12 (1996), 7832–7848, arXiv: hep-th/9607202; *Nucl. Phys. B*, **492**:3 (1997), 607–622, arXiv: hep-th/9611016.
- [6] R. Donagi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334, arXiv: hep-th/9510101; E. Martinec, *Phys. Lett. B*, **367**:1–4 (1996), 91–96, arXiv: hep-th/9510204; A. Gorsky, A. Marshakov, *Phys. Lett. B*, **374** (1996), 218–224; *Phys. Lett. B*, **375**:1–4 (1996), 127–134, arXiv: hep-th/9510224; H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **477**:3 (1996), 855–877, arXiv: hep-th/9511126; **491**:3 (1997), 529–573, arXiv: hep-th/9512161; “Integrability and Seiberg–Witten theory”, *Frontiers in Quantum Field Theory*, International Conference in Honor of Keiji Kikkawa’s 60th Birthday (Toyonaka, Japan, December 14–17, 1995), eds. H. Itoyama, H. Kunitomo, H. Shirokura, M. Kaku, M. Ninomiya, World Sci., Singapore, 1996, 301–324, arXiv: hep-th/9601168.
- [7] N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **531**:1–3 (1998), 323–344, arXiv: hep-th/9609219; H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **448**:3–4 (1999), 195–202, arXiv: hep-th/9812078; *Nucl. Phys. B*, **558**:1–2 (1999), 371–390, arXiv: hep-th/9902205; *Acta Appl. Math.*, **99**:3, 223–244, arXiv: hep-th/0606035.
- [8] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **380**:1–2 (1996), 75–80, arXiv: hep-th/9603140; *A Note on spectral curve for the periodic homogeneous XYZ-spin chain*, arXiv: hep-th/9604078; A. Gorsky, S. Gukov, A. Mironov, *Nucl. Phys. B*, **517**:1–3 (1998), 409–461, arXiv: hep-th/9707120; A. Gorsky, A. Mironov, *Integrable many-body systems and gauge theories*, arXiv: hep-th/0011197.
- [9] E. D’Hoker, I. Krichever, D. H. Phong, *Nucl. Phys. B*, **489**:1–2 (1997), 179–210, arXiv: hep-th/9609041; **494**:1–2 (1997), 89–104, arXiv: hep-th/9610156.
- [10] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **527**:3 (1998), 690–716, arXiv: hep-th/9802004; J. Edelstein, M. Gomez-Reino, M. Mariño, J. Mas, *Nucl. Phys. B*, **574**:1–2 (2000), 587–619, arXiv: hep-th/9911115; J. Edelstein, M. Gomez-Reino, J. Mas, *Nucl. Phys. B*, **561**:1–2 (1999), 273–292, arXiv: hep-th/9904087.
- [11] A. Marshakov, *Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems*, World Sci., Singapore, 1999.
- [12] A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534** (1998), 549–611, arXiv: hep-th/9711108; “Testing Seiberg–Witten solution”, *Strings, Branes and Dualities* (NATO Advanced Study Institute, Cargese, France, May 26–June 14, 1997), eds. L. Baulieu, P. Di Francesco, M. Douglas, V. Kazakov, M. Picco, P. Windey, Kluwer, Dordrecht, 1999, 359–372, arXiv: hep-th/9801061; *Commun. Math. Phys.*, **209** (2000), 97–121, arXiv: hep-th/9712241; 77–95, arXiv: hep-th/9803265.
- [13] N. Dorey, T. J. Hollowood, V. V. Khoze, M. P. Mattis, *Phys. Rept.*, **371**:4–5 (2002), 231–459, arXiv: hep-th/0206063.
- [14] N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **192–193** (2009), 91–112, arXiv: 0901.4744; *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **177** (2009), 105–119, arXiv: 0901.4748.
- [15] N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2004), 831–864, arXiv: hep-th/0206161.

- [16] R. Flume, R. Pogossian, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:14 (2003), 2541–2563, arXiv: hep-th/0208176; H. Nakajima, K. Yoshioka, *Invent. Math.*, **162**:2 (2005), 313–355, arXiv: math/0306198; “Lectures on instanton counting”, *Algebraic Structures and Moduli Spaces* (Montréal, Canada, July 14–20, 2003), CRM Proceedings & Lecture Notes, **38**, AMS, Providence, RI, 2004, 31–101, arXiv: math/0311058; S. Shadchin, *SIGMA*, **2** (2006), 008, 11 pp., arXiv: hep-th/0601167; *On certain aspects of string theory/gauge theory correspondence*, arXiv: hep-th/0502180.
- [17] D. Bellisai, F. Fucito, A. Tanzini, G. Travaglini, *Phys. Lett. B*, **480**:3–4 (2000), 365–372, arXiv: hep-th/0002110; U. Bruzzo, F. Fucito, A. Tanzini, G. Travaglini, *Nucl. Phys. B*, **611**:1–3 (2001), 205–226, arXiv: hep-th/0008225; U. Bruzzo, F. Fucito, J. Morales, A. Tanzini, *JHEP*, **05** (2003), 054, 24 pp., arXiv: hep-th/0211108; U. Bruzzo, F. Fucito, *Nucl. Phys. B*, **678**:3 (2004), 638–655, arXiv: math-ph/0310036.
- [18] N. Nekrasov, A. Okounkov, *Seiberg–Witten theory and random partitions*, arXiv: hep-th/0306238.
- [19] F. Fucito, J. F. Morales, R. Pogossian, *JHEP*, **10** (2004), 037, 22 pp., arXiv: hep-th/0408090.
- [20] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [21] А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, МЦМО, М., 2009.
- [22] V. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348.
- [23] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanetsky, S. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:13 (1990), 2495–2589.
- [24] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **328**:3 (1990), 664–676.
- [25] Ал. В. Замолодчиков, *Commun. Math. Phys.*, **96**:3 (1984), 419–422; *Nucl. Phys. B*, **285**:3 (1987), 481–503; Ал. В. Замолодчиков, *ЖЭТФ*, **90** (1985), 1808–1818; *ТМФ*, **73**:1 (1987), 103–110.
- [26] V. A. Fateev, A. V. Litvinov, A. Neveu, E. Onofri, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304011, 29 pp., arXiv: 0902.1331.
- [27] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.
- [28] N. Wyllard, *JHEP*, **11** (2009), 002, 23 pp., arXiv: 0907.2189; N. Drukker, D. Morrison, T. Okuda, *JHEP*, **09** (2009), 031, 37 pp., arXiv: 0907.2593.
- [29] А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **164**:1 (2010), 3–27, arXiv: 0907.3946.
- [30] А. Д. Миронов, С. А. Миронов, А. Ю. Морозов, А. А. Морозов, *ТМФ*, **165**:3 (2010), 503–542, arXiv: 0908.2064; A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **825**:1–2 (2009), 1–37, arXiv: 0908.2569; S. M. Iguri, C. A. Núñez, *JHEP*, **11** (2009), 090, 36 pp., arXiv: 0908.3460; D. Nanopoulos, D. Xie, *Phys. Rev. D*, **80**:10 (2009), 105015, 5 pp., arXiv: 0908.4409; *JHEP*, **03** (2010), 043, 43 pp., arXiv: 0911.1990; L. F. Alday, D. Gaiotto, S. Gukov, Y. Tachikawa, H. Verlinde, *JHEP*, **01** (2010), 113, 50 pp., arXiv: 0909.0945; N. Drukker, J. Gomis, T. Okuda, J. Teschner, *JHEP*, **02** (2010), 057, 62 pp., arXiv: 0909.1105; A. Gadde, E. Pomoni, L. Rastelli, S. Razamat, *JHEP*, **03** (2010), 032, 22 pp., arXiv: 0910.2225; G. Bonelli, A. Tanzini, *Hitchin systems, $\mathcal{N} = 2$ gauge theories and W-gravity*, arXiv: 0909.4031; L. Alday, F. Benini, Y. Tachikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:14 (2010), 141601, 4 pp., arXiv: 0909.4776; J.-F. Wu, Y. Zhou, *From Liouville to Chern–Simons, alternative realization of Wilson loop operators in AGT duality*, arXiv: 0911.1922.
- [31] A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **680**:2 (2009), 188–194, arXiv: 0908.2190.
- [32] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Toda theories, matrix models, topological strings, and $N = 2$ gauge systems*, arXiv: 0909.2453.
- [33] D. Gaiotto, *Asymptotically free $\mathcal{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks*, arXiv: 0908.0307; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **682**:1 (2009), 125–129, arXiv: 0909.2052; H. Awata, Y. Yamada, *JHEP*, **01** (2010), 125, 11 pp., arXiv: 0910.4431; V. Alba, A. A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **90**:11 (2009), 803–807, arXiv: 0911.0363.

- [34] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **11** (2009), 048, 16 pp., arXiv:0909.3338; R. Poghossian, *JHEP*, **12** (2009), 038, 13 pp., arXiv:0909.3412; L. Hadasz, Z. Jaskolski, P. Suchanek, *Recursive representation of the torus 1-point conformal block*, arXiv:0911.2353.
- [35] A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **682**:1 (2009), 118–124, arXiv:0909.3531.
- [36] H. Itoyama, K. Maruyoshi, T. Oota, *Prog. Theor. Phys.*, **123**:6 (2010), 957–987, arXiv:0911.4244.
- [37] T. Eguchi, K. Maruyoshi, *JHEP*, **02** (2010), 022, 21 pp., arXiv:0911.4797.
- [38] S. Kanno, Y. Matsuo, S. Shiba, Y. Tachikawa, *Phys. Rev. D*, **81** (2010), 046004, arXiv:0911.4787.
- [39] F. Cachazo, K. A. Intriligator, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **603**:1–2 (2001), 3–41, arXiv:hep-th/0103067; F. Cachazo, C. Vafa, *$N = 1$ and $N = 2$ Geometry from Fluxes*, arXiv:hep-th/0206017; R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644**:1–2 (2002), 3–20, arXiv:hep-th/0206255; 21–39, arXiv:hep-th/0207106; *A perturbative window into non-perturbative physics*, arXiv:hep-th/0208048; L. Chekhov, A. Mironov, *Phys. Lett. B*, **552**:3–4 (2003), 293–302, arXiv:hep-th/0209085; H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **657**:1–3 (2003), 53–78, arXiv:hep-th/0211245; *Phys. Lett. B*, **555**:3–4 (2003), 287–295, arXiv:hep-th/0211259; *Prog. Theor. Phys.*, **109**:3 (2003), 433–463, arXiv:hep-th/0212032; L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **562**:3–4 (2003), 323–338, arXiv:hep-th/0301071; Л. О. Чехов, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, Д. Васильев, *Тр. МИАН*, **251** (2005), 265–306, arXiv:hep-th/0506075.
- [40] H. Itoyama, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:2 (2003), 5889–5906, arXiv:hep-th/0301136.
- [41] A. Klemm, M. Mariño, S. Theisen, *JHEP*, **03** (2003), 051, 23 pp., arXiv:hep-th/0211216.
- [42] M. Matone, L. Mazzucato, *JHEP*, **07** (2003), 015, 19 pp., arXiv:hep-th/0305225; R. Argurio, G. Ferretti, R. Heise, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:13 (2004), 2015–2078, arXiv:hep-th/0311066; M. Gomez-Reino, *JHEP*, **06** (2004), 051, 17 pp., arXiv:hep-th/0405242; H. Itoyama, H. Kanno, *Nucl. Phys. B*, **686**:1–2 (2004), 155–164, arXiv:hep-th/0312306; H. Itoyama, K. Maruyoshi, M. Sakaguchi, *Nucl. Phys. B*, **794**:1–2 (2008), 216–230, arXiv:0709.3166.
- [43] N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories*, arXiv:0908.4052.
- [44] A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **04** (2010), 040, 15 pp., arXiv:0910.5670; *J. Phys. A*, **43**:19 (2010), 195401, 11 pp., arXiv:0911.2396.
- [45] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **02** (2010), 030, 26 pp., arXiv:0911.5721.
- [46] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618; A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **252**:1 (1990), 47–52; F. David, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:13 (1990), 1019–1029; J. Ambjorn, Yu. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:22 (1990), 1753–1763; H. Itoyama, Y. Matsuo, *Phys. Lett. B*, **255**:2 (1991), 202–208; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:15 (1992), 1345–1360, arXiv:hep-th/9201010.
- [47] Yu. Makeenko, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **356**:3 (1991), 574–628.
- [48] М. Л. Концевич, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 50–57; M. L. Kontsevich, *Commun. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **275**:3–4 (1992), 311–314, arXiv:hep-th/9111037; *Nucl. Phys. B*, **380**:1–2 (1992), 181–240, arXiv:hep-th/9201013; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **397**:1–2 (1993), 339–378, arXiv:hep-th/9203043; P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Commun. Math. Phys.*, **151**:1 (1993), 193–219, arXiv:hep-th/9206090.
- [49] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **265**:1–2 (1991), 99–107.

- [50] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, S. Pakuliak, *Nucl. Phys. B*, **404**:3 (1993), 717–750, arXiv: hep-th/9208044.
- [51] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051, arXiv: hep-th/9312210; A. Marshakov, N. A. Nekrasov, *JHEP*, **01** (2007), 104, 40 pp., arXiv: hep-th/0612019; A. B. Маршаков, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 424–450, arXiv: 0706.2857; *Non Abelian gauge theories, prepotentials and Abelian differentials*, arXiv: 0810.1536; B. Eynard, *J. Stat. Mech.*, **07** (2008), P07023, 35 pp., arXiv: 0804.0381.
- [52] I. K. Kostov, *Phys. Lett. B*, **297**:1–2 (1992), 74–81, arXiv: hep-th/9208053; *Nucl. Phys. B Proc. Suppl. A*, **45** (1996), 13–28, arXiv: hep-th/9509124.
- [53] A. Ю. Морозов, *УФН*, **162**:8 (1992), 83–175; **164**:1 (1994), 3–62, arXiv: hep-th/9303139; A. Yu. Morozov, *Matrix models as integrable systems*, arXiv: hep-th/9502091; *Challenges of matrix models*, arXiv: hep-th/0502010; A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:25 (1994), 4355–4405, arXiv: hep-th/9312212; А. Д. Миронов, *ЭЧАЯ*, **33**:5 (2002), 1051–1145, arXiv: hep-th/9409190; *ТМФ*, **114**:2 (1998), 163–232, arXiv: q-alg/9711006.
- [54] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163, arXiv: hep-th/0310113; A. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **142**:3 (2005), 419–488; A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 003, 34 pp., arXiv: 0906.0036.
- [55] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, P. Putrov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:27 (2009), 4939–4998, arXiv: 0811.2825.
- [56] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Fortschr. Phys.*, **53**:5–6 (2005), 512–521, arXiv: hep-th/0412205.
- [57] A. Givental, *Semisimple Frobenius structures at higher genus*, arXiv: math.AG/0008067; I. K. Kostov, *Conformal field theory techniques in random matrix models*, arXiv: hep-th/9907060; А. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192, arXiv: hep-th/0605171; A. S. Alexandrov, A. D. Mironov, A. Yu. Morozov, *Phys. D*, **235**:1–2 (2007), 126–167, arXiv: hep-th/0608228; *JHEP*, **12** (2009), 053, 51 pp., arXiv: 0906.3305; А. Д. Миронов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 77–89, arXiv: hep-th/0506158; N. Orantin, *Symplectic invariants, Virasoro constraints and Givental decomposition*, arXiv: 0808.0635.
- [58] A. Klemm, P. Sulkowski, *Nucl. Phys. B*, **819**:1 (2009), 400–430, arXiv: 0810.4944; P. Sulkowski, *Phys. Rev. D*, **80** (2009), 086006, 9 pp., arXiv: 0904.3064.
- [59] T. Masuda, H. Suzuki, *Internat. J. Modern Phys. A*, **13** (1998), 1495–1506, arXiv: hep-th/9609065.

Поступила в редакцию 20.06.2013