Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Синь Цзэн, Сянь-Цюо Гэн, О квазипериодических решениях дискретной иерархии Чена–Ли–Лю, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 3, 317–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:57:56

© 2014 г.

Синь Цзэн*, Сянь-Цюо Гэн*

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИСКРЕТНОЙ ИЕРАРХИИ ЧЕНА–ЛИ–ЛЮ

Проведено разложение дискретной иерархии Чена–Ли–Лю на решаемые обыкновенные дифференциальные уравнения с помощью матриц Лакса и эллиптических переменных. На основании теории алгебраических кривых непрерывные и дискретные потоки, связанные с дискретной иерархией Чена–Ли–Лю, выпрямляются в координатах Абеля–Якоби. Введены мероморфная функция ϕ , вектор Бейкера–Ахиезера ψ и гиперэллиптическая кривая $\mathcal{K}_N$, в согласии с асимптотическими свойствами и алгебро-геометрическими характеристиками которых построены квазипериодические решения дискретной иерархии Чена–Ли–Лю.

Ключевые слова: дискретные уравнения Чена–Ли–Лю, квазипериодические решения.

DOI: 10.4213/tmf8570

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, многие явления, интересные с физической точки зрения, можно моделировать с помощью дифференциально-разностных уравнений, например решеточного уравнения Тоды, решеточного уравнения Каца–Ван Мербеке, уравнения самодуальной сети, дискретного нелинейного уравнения Шредингера и т. д. [1]–[6]. В работах [3]–[5] для анализа некоторых интегрируемых дифференциально-разностных систем был использован метод обратной задачи рассеяния. Один из интегрируемых вариантов таких систем включал дискретизацию известной системы Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура–Захарова–Шабата. В работе [7] было предложено обобщение формулировки Абловица–Ладика для дискретных интегрируемых систем, в котором интересную роль играет дискретное уравнение Чена–Ли–Лю, континуальный предел которого дается в точности уравнением Чена–Ли–Лю [8].

Основная цель настоящей работы состоит в построении квазипериодических решений дискретной иерархии Чена–Ли–Лю в рамках теории алгебраических кривых. Сначала мы приведем краткий обзор литературы и методов, имеющих отношение к данному вопросу. В работах [9]–[20] было развито несколько систематических

---

*School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan, China.
E-mail: xggeng@zzu.edu.cn

подходов к получению квазипериодических решений дискретных солитонных уравнений, таких как алгебро-геометрический метод, метод обратной задачи рассеяния для периодической задачи, нелинеаризация пар Лакса и другие [21]–[30]. Эти методы оказали значительное влияние на развитие современной математики и теоретической физики [9]–[20], они сочетают в себе спектральную теорию разностных операторов с периодическими коэффициентами, алгебраическую геометрию компактных римановых поверхностей и их якобианы, тета-функции Римана и обратные задачи. В работах [9]–[20] эти методы были успешно применены к дискретным (2×2) -матричным спектральным задачам и были получены квазипериодические решения некоторых дискретных солитонных уравнений, таких как решеточное уравнение Тоды, решеточное уравнение Каца–Ван Мербеке, дискретные модифицированные уравнения Кортевега–де Фриза и Абловица–Ладика и т. д.

В настоящей работе наша задача состоит в том, чтобы выпрямить все непрерывные потоки, связанные с дискретной иерархией Чена–Ли–Лю, используя для этого координаты Абеля–Якоби, и получить квазипериодические решения дискретной иерархии Чена–Ли–Лю на основании подходов из работ [16], [17]. Статья построена следующим образом. В разделе 2 с использованием градиентных последовательностей Ленарда и уравнения нулевой кривизны построена дискретная иерархия Чена–Ли–Лю. В разделе 3 вводятся матрица Лакса, алгебраическая кривая K_N арифметического рода N и мероморфная функция ϕ на ней. Затем устанавливается прямое соотношение между потенциалами и эллиптическими переменными, а также обсуждаются асимптотические разложения спектрального параметра для различных величин и рекуррентные соотношения для соответствующих однородных коэффициентов в дискретной иерархии Чена–Ли–Лю. В разделе 4 дискретная иерархия Чена–Ли–Лю разлагается на решаемые обыкновенные дифференциальные уравнения. Кроме того, для выпрямления непрерывных потоков в случае дискретной иерархии Чена–Ли–Лю вводятся координаты Абеля–Якоби. В разделе 5 построены квазипериодические решения дискретной иерархии Чена–Ли–Лю в терминах тета-функций Римана согласно асимптотическим свойствам и алгебро-геометрическим характеристикам мероморфной функции ϕ и вектора Бейкера–Ахиезера $\bar{\psi}$ на гиперэллиптической кривой K_N .

2. ДИСКРЕТНАЯ ИЕРАХИЯ ЧЕНА–ЛИ–ЛЮ

В настоящей работе мы предполагаем, что выполнена следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА 1. Для функций u, v справедливы следующие утверждения:

$$u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(n, \cdot), v(n, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ u(n, t)v(n, t) \neq \{0, -1\}, \quad u(n-1, t)v(n, t) \neq \{-1\}, \quad (n, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R},$$

где $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ – множество всех комплекснозначных последовательностей, индексированных множеством $\mathbb{Z}$.

Для удобства введем обозначение $E^{\pm}$ для операторов сдвига, действующих на комплекснозначные последовательности $f = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ следующим образом:

$$(E^{\pm} f)(n) = f(n \pm 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, мы часто будем использовать обозначения $\Delta = E - 1$, $f^\pm = E^\pm f$, $f \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$.

В настоящем разделе мы получим иерархию дискретных уравнений Чена–Ли–Лю. Рассмотрим дискретную спектральную задачу

$$E\chi = U_n\chi, \quad U_n = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \lambda + uv & u \\ (1 - \lambda)v & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где u и v – потенциалы, λ – постоянный спектральный параметр, $\gamma = \sqrt{1 + uv}$. Сначала введем градиентные последовательности Ленарда $\hat{S}_{j,\pm} = (\hat{a}_{j,\pm}, \hat{b}_{j,\pm}, \hat{c}_{j,\pm}, \hat{d}_{j,\pm})^T$ с помощью рекуррентных уравнений

$$J_n \hat{S}_{0,+} = 0, \quad K_n \hat{S}_{j,+} = J_n \hat{S}_{j+1,+}, \quad j \geq 0, \quad (2.2)$$

$$K_n \hat{S}_{0,-} = 0, \quad J_n \hat{S}_{j,-} = K_n \hat{S}_{j+1,-}, \quad j \geq 0, \quad (2.3)$$

с условиями $\hat{S}_{j,\pm} |_{u,v=0} = 0$, $j \geq 1$, и начальными точками

$$\hat{S}_{0,+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \hat{S}_{0,-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \quad (2.4)$$

где два матричных оператора K_n и J_n даются выражениями

$$K_n = \begin{pmatrix} 2uE & E & -u^2E & 0 \\ -2v & v^2 & -1 & 0 \\ 0 & v & -uE & -2\Delta \\ 2\Delta & -vE & u & 2(2 + uv)\Delta \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2u \\ 0 & 0 & -E & 2vE \\ 0 & v & -uE & -2\Delta \\ 2\Delta & -vE & u & 2(2 + uv)\Delta \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \ker J_n &= \{\epsilon_1 \hat{S}_{0,+} + \epsilon_2 \check{S}_{0,+} \mid \forall \epsilon_1, \epsilon_2\}, & \check{S}_{0,+} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}uv^-, & u, & v^-, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \\ \ker K_n &= \{\epsilon_1 \hat{S}_{0,-} + \epsilon_2 \check{S}_{0,-} \mid \forall \epsilon_1, \epsilon_2\}, & \check{S}_{0,-} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, & \frac{u^-}{\pi}, & \frac{v}{\pi}, & \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда $\hat{S}_{j,+}$ и $\hat{S}_{j,-}$ определяются единственным образом. Например, если положить $\pi = 1 + u^-v$, то явно получаем

$$\hat{S}_{1,+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}uv^- \\ u \\ v^- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{2,+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u(v^{--} - v^-)(1 + u^-v^-) + \frac{1}{2}v^-(u^+ - u)(1 + uv) + \frac{1}{2}u^2(v^-)^2 \\ u^+(1 + uv) + u^2(v^- - v) \\ v^{--}(1 + u^-v^-) + (v^-)^2(u - u^-) \\ \frac{1}{2}uv^- \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_{1,-} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\pi} \\ \frac{u^-}{\pi} \\ v \\ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{2,-} = \begin{pmatrix} \frac{u^-(v^+ - v)}{\pi^2\pi^+} + \frac{v(u^{--} - u^-)}{\pi^2\pi^-} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2} \\ \frac{u^{--}(1 + u^-v^-)}{\pi^2\pi^-} + \frac{(u^-)^2(v - v^+)}{\pi^2\pi^+} \\ \frac{v^+(1 + uv)}{\pi^2\pi^+} + \frac{v^2(u^- - u^{--})}{\pi^2\pi^-} \\ \frac{1}{2\pi^2} - \frac{u^-(v^+ - v)}{2\pi^2\pi^+} - \frac{v(u^{--} - u^-)}{2\pi^2\pi^-} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, если использовать $\Delta^{-1}\Delta = \Delta\Delta^{-1} = 1$, то из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \hat{a}_{0,+} &= \frac{1}{2}, & \hat{a}_{j,+} &= \hat{d}_{j+1,+} - 2\hat{d}_{j,+}, & j &\geq 1, \\ \hat{d}_{0,-} &= -\frac{1}{2}, & \hat{d}_{j,-} &= \hat{a}_{j+1,-} + 2\hat{d}_{j+1,-}, & j &\geq 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Предположим, что временная эволюция собственной функции χ описывается дифференциальным уравнением

$$\chi_{t_{\underline{m}}} = V_n^{(\underline{m})}\chi, \quad V_n^{(\underline{m})} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{\underline{m}} & \tilde{F}_{\underline{m}} \\ (1-\lambda)\tilde{H}_{\underline{m}} & -\tilde{G}_{\underline{m}} \end{pmatrix}, \quad \underline{m} = (m_1, m_2). \quad (2.7)$$

Тогда условие совместности уравнений (2.1) и (2.7) приводит к дискретному уравнению нулевой кривизны

$$U_{n,t_{\underline{m}}} - (EV_n^{(\underline{m})})U_n + U_n V_n^{(\underline{m})} = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} (\lambda - 1 - \gamma^2)\gamma(\gamma^{-1})_{t_{\underline{m}}} &= \gamma^2\Delta\tilde{G}_{\underline{m}} + (\lambda - 1)(\Delta\tilde{G}_{\underline{m}} - v\tilde{F}_{\underline{m}}^+ + u\tilde{H}_{\underline{m}}), \\ u\gamma(\gamma^{-1})_{t_{\underline{m}}} + u_{t_{\underline{m}}} &= u(\tilde{G}_{\underline{m}}^+ + \tilde{G}_{\underline{m}}) + \tilde{F}_{\underline{m}}^+ - (\lambda + uv)\tilde{F}_{\underline{m}}, \\ v\gamma(\gamma^{-1})_{t_{\underline{m}}} + v_{t_{\underline{m}}} &= -v(\tilde{G}_{\underline{m}}^+ + \tilde{G}_{\underline{m}}) - \tilde{H}_{\underline{m}} + (\lambda + uv)\tilde{H}_{\underline{m}}^+, \\ \gamma(\gamma^{-1})_{t_{\underline{m}}} &= -\Delta\tilde{G}_{\underline{m}} + (\lambda - 1)(v\tilde{F}_{\underline{m}} - u\tilde{H}_{\underline{m}}^+). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть

$$\tilde{G}_{\underline{m}} = \tilde{A}_{\underline{m}} + \lambda\tilde{D}_{\underline{m}}, \quad \tilde{F}_{\underline{m}} = \tilde{B}_{\underline{m}}, \quad \tilde{H}_{\underline{m}} = \tilde{C}_{\underline{m}}, \quad v\tilde{B}_{\underline{m}} - u\tilde{C}_{\underline{m}}^+ - 2\Delta\tilde{D}_{\underline{m}} = 0. \quad (2.9)$$

Тогда первое и четвертое выражения в (2.8) можно записать как

$$\gamma(\gamma^{-1})_{t_{\underline{m}}} = \Delta(\lambda\tilde{D}_{\underline{m}} - \tilde{A}_{\underline{m}} - 2\tilde{D}_{\underline{m}}), \quad (2.10)$$

$$2\Delta\tilde{A}_{\underline{m}} - v\tilde{B}_{\underline{m}}^+ + u\tilde{C}_{\underline{m}} + 2(2 + uv)\Delta\tilde{D}_{\underline{m}} = 0. \quad (2.11)$$

Предположим, что $\tilde{A}_{\underline{m}}, \tilde{B}_{\underline{m}}, \tilde{C}_{\underline{m}}, \tilde{D}_{\underline{m}}$ – многочлены по спектральному параметру λ , имеющие вид

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\underline{m}} & \tilde{B}_{\underline{m}} & \tilde{C}_{\underline{m}} & \tilde{D}_{\underline{m}} \end{pmatrix}^T = \sum_{j=0}^{m_1} \tilde{S}_{j,+} \lambda^{m_1-j} + \sum_{j=0}^{m_2} \tilde{S}_{j,-} \lambda^{-m_2-1+j}, \quad (2.12)$$

где при $j \geq 0$

$$\tilde{S}_{j,\pm} = (\tilde{a}_{j,\pm}, \tilde{b}_{j,\pm}, \tilde{c}_{j,\pm}, \tilde{d}_{j,\pm})^T = \tilde{\alpha}_{0,\pm} \hat{S}_{j,\pm} + \tilde{\alpha}_{1,\pm} \hat{S}_{j-1,\pm} + \cdots + \tilde{\alpha}_{j,\pm} \hat{S}_{0,\pm}, \quad (2.13)$$

а $\tilde{\alpha}_{j,\pm}$ – произвольные постоянные. Подставляя (2.9) и (2.10) во второе и третье выражения в (2.8) и используя (2.2) и (2.3), получаем дискретную иерархию Чена–Ли–Лю:

$$(u_{t_{\underline{m}}}, v_{t_{\underline{m}}})^T = \mathcal{P}(K_n - \lambda J_n) \tilde{S} = \tilde{X}_{\underline{m}} = \tilde{X}_{m_1,+} - \tilde{X}_{m_2,-}, \quad m_1 \geq 0, \quad m_2 \geq 0, \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{X}_{m_1,+} = \mathcal{P}K_n \tilde{S}_{m_1,+} = \mathcal{P}J_n \tilde{S}_{m_1+1,+}, \quad \tilde{X}_{m_2,-} = \mathcal{P}J_n \tilde{S}_{m_2,-} = \mathcal{P}K_n \tilde{S}_{m_2+1,-},$$

$\mathcal{P}$ – отображение проекции $q = (q^1, q^2, q^3, q^4)^T \rightarrow (q^1, q^2)^T$. Два первых члена в (2.14) (для простоты полагаем $m_1 = m_2$) имеют вид

$$u_{t_{(0,0)}} = (\tilde{\alpha}_{0,+} - \tilde{\alpha}_{0,-})u, \quad v_{t_{(0,0)}} = (\tilde{\alpha}_{0,-} - \tilde{\alpha}_{0,+})v, \quad (2.15)$$

и

$$\begin{aligned} u_{t_{(1,1)}} &= \tilde{\alpha}_{0,+}(u^+ - u)(1 + uv) + \tilde{\alpha}_{0,-} \frac{u - u^-}{1 + u^- v} + u(\tilde{\alpha}_{0,+} + \tilde{\alpha}_{1,+} - \tilde{\alpha}_{0,-} - \tilde{\alpha}_{1,-}), \\ v_{t_{(1,1)}} &= \tilde{\alpha}_{0,+}(v - v^-)(1 + uv) + \tilde{\alpha}_{0,-} \frac{v^+ - v}{1 + uv^+} + v(\tilde{\alpha}_{0,-} + \tilde{\alpha}_{1,-} - \tilde{\alpha}_{0,+} - \tilde{\alpha}_{1,+}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

При $\tilde{\alpha}_{1,+} = -\tilde{\alpha}_{0,+}$ и $\tilde{\alpha}_{1,-} = -\tilde{\alpha}_{0,-}$ уравнения (2.16) сводятся к дискретному уравнению Чена–Ли–Лю [7].

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Определим матрицу Лакса W_n для трех функций G , F и H как

$$W_n = \begin{pmatrix} G & F \\ (1 - \lambda)H & -G \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

при этом W_n удовлетворяет уравнениям Лакса:

$$W_{n+1}U_n - U_nW_n = 0, \quad W_{n,t_{\underline{m}}} = [V_n^{(\underline{m})}, W_n]. \quad (3.2)$$

Поэтому $\det W_n$ является постоянной, не зависящей от n и $t_{\underline{m}}$. Уравнения (3.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma^2 \Delta G + (\lambda - 1)(\Delta G - vF^+ + uH) &= 0, \\ u(G^+ + G) + F^+ - (\lambda + uv)F &= 0, \\ v(G^+ + G) + H - (\lambda + uv)H^+ &= 0, \\ \Delta G + (1 - \lambda)(vF - uH^+) &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

и

$$\begin{aligned}
G_{t_m} &= (1 - \lambda)(\tilde{F}_m H - \tilde{H}_m F), \\
F_{t_m} &= 2\tilde{G}_m F - 2\tilde{F}_m G, \\
H_{t_m} &= 2\tilde{H}_m G - 2\tilde{G}_m H.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Предположим, что функции G, F, H являются многочленами конечного порядка по λ :

$$\begin{aligned}
G &= A + \lambda D, & F &= B, & H &= C, & vB - uC^+ - 2\Delta D &= 0, \\
(A, B, C, D)^T &= \sum_{j=0}^{N_1} S_{j,+} \lambda^{N_1-j} + \sum_{j=0}^{N_2} S_{j,-} \lambda^{-N_2-1+j}, \\
S_{j,\pm} &= (a_{j,\pm}, b_{j,\pm}, c_{j,\pm}, d_{j,\pm})^T.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Подстановка (3.5) в (3.3) дает

$$\begin{aligned}
J_n S_{0,+} &= 0, & K_n S_{j,+} &= J_n S_{j+1,+}, & 0 \leq j \leq N_1 - 1, \\
K_n S_{0,-} &= 0, & J_n S_{j,-} &= K_n S_{j+1,-}, & 0 \leq j \leq N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

и

$$K_n S_{N_1,+} - J_n S_{N_2,-} = 0. \tag{3.7}$$

С учетом (3.6) и используя (2.5), теперь рекуррентно определим последовательности $\{S_{l,\pm}\}_{l \in \mathbb{N}_0}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned}
S_{0,\pm} &= \alpha_{0,\pm} \hat{S}_{0,\pm} + \beta_{0,\pm} \check{S}_{0,\pm}, \\
K_n S_{l,+} &= J_n S_{l+1,+}, & J_n S_{l,-} &= K_n S_{l+1,-}, & l \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\alpha_{0,\pm}$ и $\beta_{0,\pm}$ – постоянные. Тогда $S_{j,\pm}$ можно выразить как

$$S_{l,\pm} = \sum_{k=0}^l \alpha_{k,\pm} \hat{S}_{l-k,\pm} + \sum_{k=0}^l \beta_{k,\pm} \check{S}_{l-k,\pm}, \quad l \in \mathbb{N}_0, \tag{3.9}$$

где $\alpha_{l,\pm}$ и $\beta_{l,\pm}$ – постоянные суммирования, не зависящие от $\tilde{\alpha}_{l,\pm}$. Пусть далее $\beta_{l,\pm} = 0$, $l \in \mathbb{N}_0$. Тогда, используя (2.6) и (3.9), получаем

$$\begin{aligned}
a_{j,+} &= d_{j+1,+} - 2d_{j,+} + \frac{1}{2}\alpha_{j,+}, \\
d_{j,-} &= a_{j+1,-} + 2d_{j+1,-} + \alpha_{j+1,-} - \frac{1}{2}\alpha_{j,-},
\end{aligned} \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.10}$$

Предположим, что

$$d_{N_1+1,+} - d_{N_2,-} = 0. \tag{3.11}$$

В действительности из (3.7) и (3.8) нам известно, что $S_{N_1+1,+} - S_{N_2,-} \in \text{Ker } J_n$, тогда $d_{N_1+1,+} - d_{N_2,-}$ является постоянной, и нетрудно видеть, что наше допущение

обоснованно. Положим $S_{-1,\pm} = 0$, тогда G , F , H принимают вид

$$\begin{aligned} G &= \sum_{j=0}^{N_1} g_{j,+} \lambda^{N_1-j} + \sum_{j=0}^{N_2-1} g_{j,-} \lambda^{-N_2+j}, \\ F &= \sum_{j=0}^{N_1} f_{j,+} \lambda^{N_1-j} + \sum_{j=0}^{N_2-1} f_{j,-} \lambda^{-N_2+j}, \\ H &= \sum_{j=0}^{N_1} h_{j,+} \lambda^{N_1-j} + \sum_{j=0}^{N_2-1} h_{j,-} \lambda^{-N_2+j}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} g_{j,+} &= a_{j,+} + d_{j+1,+}, & f_{j,+} &= b_{j,+}, & h_{j,+} &= c_{j,+}, \\ g_{j,-} &= a_{j+1,-} + d_{j,-}, & f_{j,-} &= b_{j+1,-}, & h_{j,-} &= c_{j+1,-}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Приведем несколько первых коэффициентов в явном виде:

$$\begin{aligned} g_{0,+} &= \frac{1}{2} \alpha_{0,+}, & g_{1,+} &= \alpha_{0,+} u v^- + \frac{1}{2} \alpha_{1,+}, \\ f_{0,+} &= 0, & f_{1,+} &= \alpha_{0,+} u, & f_{2,+} &= \alpha_{0,+} [u^+ \gamma^2 + u^2 (v^- - v)] + \alpha_{1,+} u, \\ h_{0,+} &= 0, & h_{1,+} &= \alpha_{0,+} v^-, & h_{2,+} &= \alpha_{0,+} [v^{--} (\gamma^-)^2 + (v^-)^2 (u - u^-)] + \alpha_{1,+} v^-, \\ g_{0,-} &= \alpha_{0,-} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right), \\ g_{1,-} &= \alpha_{0,-} \left(\frac{u^-(v^+ - v)}{\pi^2 \pi^+} + \frac{v(u^{--} - u^-)}{\pi^2 \pi^-} + \frac{u^- v}{\pi^2} \right) + \alpha_{1,-} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right), \\ f_{0,-} &= \alpha_{0,-} \frac{u^-}{\pi}, & f_{1,-} &= \alpha_{0,-} \left(\frac{u^{--} (\gamma^-)^2}{\pi^2 \pi^-} + \frac{(u^-)^2 (v - v^+)}{\pi^2 \pi^+} \right) + \alpha_{1,-} \frac{u^-}{\pi}, \\ h_{0,-} &= \alpha_{0,-} \frac{v}{\pi}, & h_{1,-} &= \alpha_{0,-} \left(\frac{v^+ \gamma^2}{\pi^2 \pi^+} + \frac{v^2 (u^- - u^{--})}{\pi^2 \pi^-} \right) + \alpha_{1,-} \frac{v}{\pi}, & \dots \end{aligned}$$

Далее будет полезно иметь дело с однородными коэффициентами $\hat{g}_{l,\pm}$, $\hat{f}_{l,\pm}$ и $\hat{h}_{l,\pm}$, которые можно получить, приравнявая нулю постоянные $\alpha_{k,\pm}$ при $k = 1, 2, \dots, l$ и выбирая $\alpha_{0,\pm} = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{0,+} &= \frac{1}{2}, & \hat{g}_{0,-} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, & \hat{f}_{0,+} &= 0, & \hat{f}_{0,-} &= \frac{u^-}{\pi}, \\ & & \hat{h}_{0,+} &= 0, & \hat{h}_{0,-} &= \frac{v}{\pi}, \\ \hat{g}_{l,\pm} &= g_{l,\pm} |_{\alpha_{k,\pm}=0, k=1,\dots,l}, & \hat{f}_{l,\pm} &= f_{l,\pm} |_{\alpha_{k,\pm}=0, k=1,\dots,l}, \\ \hat{h}_{l,\pm} &= h_{l,\pm} |_{\alpha_{k,\pm}=0, k=1,\dots,l}, & l &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} g_{l,\pm} &= \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k,\pm} \hat{g}_{k,\pm}, & f_{l,\pm} &= \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k,\pm} \hat{f}_{k,\pm}, \\ h_{l,\pm} &= \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k,\pm} \hat{h}_{k,\pm}, & l &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Поскольку $\det W_n$ зависит только от тех λ , для которых коэффициенты являются константами n -го потока, и $t_{\underline{m}}$ -потоков, имеем

$$-\det W_n = G^2 + (1 - \lambda)FH = \left(\frac{\alpha_{0,+}}{2\lambda^{N_2}} \right)^2 \prod_{j=1}^{2N+2} (\lambda - \lambda_j) = R(\lambda), \quad (3.16)$$

$$N = N_1 + N_2 - 1,$$

что естественным образом приводит к введению гиперэллиптической кривой $\mathcal{K}_N$ арифметического рода N , которая определяется следующим образом:

$$\mathcal{K}_N: \quad \mathcal{F}_N(\lambda, y) = y^2 - \left(\frac{2\lambda^{N_2}}{\alpha_{0,+}} \right)^2 R(\lambda) = y^2 - \prod_{j=1}^{2N+2} (\lambda - \lambda_j) = 0. \quad (3.17)$$

Кривую $\mathcal{K}_N$ можно компактифицировать, соединяя две точки на бесконечности $P_{\infty, \pm}$, где $P_{\infty, +} \neq P_{\infty, -}$. Для простоты обозначений компактификацию также обозначают как $\mathcal{K}_N$. Точки P на кривой $\mathcal{K}_N \setminus \{P_{\infty, +}, P_{\infty, -}\}$ представляются как пары $P = (\lambda, y)$, где $y(\cdot)$ – мероморфная функция на $\mathcal{K}_N$, удовлетворяющая условию $\mathcal{F}_N(\lambda, y) = 0$. Здесь мы предполагаем, что все нули λ_j функции $R(\lambda)$ в (3.16) различны, т.е. $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq 2N + 2$. Тогда гиперэллиптическая кривая $\mathcal{K}_N$ становится несингулярной.

Учитывая (3.12), обозначим через $\{\mu_j\}_{j=1, \dots, N}$ и $\{\nu_j\}_{j=1, \dots, N}$ нули функций $\lambda^{N_2} F$ и $\lambda^{N_2} H$ соответственно. Они называются эллиптическими переменными. Таким образом, можно записать

$$F = \alpha_{0,+} u \lambda^{-N_2} \prod_{j=1}^N (\lambda - \mu_j), \quad H = \alpha_{0,+} v^{-} \lambda^{-N_2} \prod_{j=1}^N (\lambda - \nu_j). \quad (3.18)$$

Согласно определению кривой $\mathcal{K}_N$ можно сдвинуть нули $\{\mu_j\}$ и $\{\nu_j\}$ на $\mathcal{K}_N$, введя

$$\hat{\mu}_j(n, t_{\underline{m}}) = \left(\mu_j(n, t_{\underline{m}}), \frac{2\mu_j^{N_2}(n, t_{\underline{m}})}{\alpha_{0,+}} G(\mu_j(n, t_{\underline{m}}), n, t_{\underline{m}}) \right), \quad (3.19)$$

$$\hat{\nu}_j(n, t_{\underline{m}}) = \left(\nu_j(n, t_{\underline{m}}), -\frac{2\nu_j^{N_2}(n, t_{\underline{m}})}{\alpha_{0,+}} G(\nu_j(n, t_{\underline{m}}), n, t_{\underline{m}}) \right), \quad (3.20)$$

где $j = 1, \dots, N$, $(n, t_{\underline{m}}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Введем также точки $P_1, P_{0, \pm} \in \mathcal{K}_N$ следующим образом:

$$P_1 = (1, y(P_1)) = \left(1, -\frac{2G|_{\lambda=1}}{\alpha_{0,+}} \right), \quad \left(\frac{2G|_{\lambda=1}}{\alpha_{0,+}} \right)^2 = \prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j), \quad (3.21)$$

$$P_{0, \pm} = (0, y(P_{0, \pm})) = \left(0, \pm \frac{\alpha_{0,-}}{\alpha_{0,+}} \right), \quad \frac{\alpha_{0,-}^2}{\alpha_{0,+}^2} = \prod_{j=1}^{2N+2} \lambda_j, \quad \alpha_{0, \pm} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.22)$$

Подчеркнем, что $P_{0, \pm}$ и $P_{\infty, \pm}$ не обязательно находятся на одном листе поверхности $\mathcal{K}_N$.

Теперь кратко напомним соглашения, которые мы использовали в связи с дивизорами на $\mathcal{K}_N$. Отображение $D: \mathcal{K}_N \rightarrow \mathbb{Z}$ называется дивизором на $\mathcal{K}_N$, если $D(P) \neq 0$ только для конечного числа $P \in \mathcal{K}_N$. Множество дивизоров на $\mathcal{K}_N$ обозначается как $\text{Div}(\mathcal{K}_N)$. Будем использовать обозначение

$$D_{Q_0 \underline{Q}} = D_{Q_0} + D_{\underline{Q}}, \quad D_{\underline{Q}} = D_{Q_1} + \cdots + D_{Q_N},$$

где $\underline{Q} = \{Q_1, \dots, Q_N\} \in \text{Sym}^N(\mathcal{K}_N)$, $Q_0 \in \mathcal{K}_N$, $N \in \mathbb{N}$, и для любого $Q \in \mathcal{K}_N$

$$D_Q: \mathcal{K}_N \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad P \mapsto D_Q(P) = \begin{cases} 1, & P = Q, \\ 0, & P \in \mathcal{K}_N \setminus \{Q\}, \end{cases}$$

а $\text{Sym}^N(\mathcal{K}_N)$ обозначает N -кратное симметрическое произведение поверхности $\mathcal{K}_N$.

В соответствии с (3.16) и (3.17) нам известно, что

$$\left(\frac{\alpha_{0,+}}{2\lambda^{N_2}} \right)^2 y^2 - G^2 = \left(\frac{\alpha_{0,+}}{2} \lambda^{-N_2} y - G \right) \left(\frac{\alpha_{0,+}}{2} \lambda^{-N_2} y + G \right) = (1 - \lambda)FH. \quad (3.23)$$

Тогда можно определить мероморфную функцию $\phi(\cdot, n, t_{\underline{m}})$ на $\mathcal{K}_N$ как

$$\phi(P, n, t_{\underline{m}}) = \frac{(\alpha_{0,+}/2)\lambda^{-N_2}y + G}{F} = \frac{(1 - \lambda)H}{(\alpha_{0,+}/2)\lambda^{-N_2}y - G}, \quad (3.24)$$

где $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_N$, $(n, t_{\underline{m}}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Прямое вычисление показывает, что ϕ удовлетворяет уравнению типа уравнения Риккати:

$$\phi(P)\phi^+(P)^{-1} - (1 - \lambda)v\phi^+(P)^{-1} + u\phi(P) = \lambda + uv, \quad (3.25)$$

$$\phi(P)_{t_{\underline{m}}} = \phi^2(P)\tilde{F}_{\underline{m}} - 2\phi(P)\tilde{G}_{\underline{m}} - (1 - \lambda)\tilde{H}_{\underline{m}}. \quad (3.26)$$

Рассмотрим фундаментальную систему решений $\Psi_{\pm}(\lambda) = (\psi_{1,\pm}(\lambda), \psi_{2,\pm}(\lambda))^T$ уравнений $U_n(\lambda)\Psi_{\pm}(\lambda) = \Psi_{\pm}^{\pm}(\lambda)$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ и U_n из (2.1), причем

$$\det(\Psi_-(\lambda), \Psi_+(\lambda)) \neq 0.$$

Введем $\phi_{\pm}(\lambda) = -\psi_{2,\pm}(\lambda)/\psi_{1,\pm}(\lambda)$. Тогда $\phi_{\pm}$ удовлетворяют уравнению типа уравнения Риккати:

$$\phi_{\pm}(\phi_{\pm}^+)^{-1} - (1 - \lambda)v(\phi_{\pm}^+)^{-1} + u\phi_{\pm} = \lambda + uv. \quad (3.27)$$

Кроме того, определим

$$\tilde{F} = \frac{2}{\phi_+ - \phi_-}, \quad (1 - \lambda)\tilde{H} = \frac{-2\phi_+\phi_-}{\phi_+ - \phi_-}, \quad \tilde{G} = \frac{\phi_+ + \phi_-}{\phi_+ - \phi_-}. \quad (3.28)$$

Используя уравнение типа уравнения Риккати (3.27), получаем тождества

$$\begin{aligned} \gamma^2 \Delta \tilde{G} - (1 - \lambda)(\Delta \tilde{G} - v\tilde{F}^+ + u\tilde{H}) &= 0, \\ u(\tilde{G}^+ + \tilde{G}) + \tilde{F}^+ - (\lambda + uv)\tilde{F} &= 0, \\ v(\tilde{G}^+ + \tilde{G}) + \tilde{H} - (\lambda + uv)\tilde{H}^+ &= 0, \\ \Delta \tilde{G} + (1 - \lambda)(v\tilde{F} - u\tilde{H}^+) &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

и

$$\check{G}^2 + (1 - \lambda)\check{F}\check{H} = 1. \quad (3.30)$$

Соотношения (3.29) и (3.30) позволяют получить нелинейные разностные уравнения для $\check{F}$ и $\check{H}$ по отдельности:

$$\begin{aligned} & [(u\pi + u^-\lambda)^2\check{F} - (1 + u^-v^-)u^2\check{F}^-\lambda]^2 + (1 + uv)^2(u^-)^4(\check{F}^+)^2\lambda^2 - 2(1 + uv)(u^-)^2 \times \\ & \times [(u\pi + u^-\lambda)^2\check{F} + (1 + u^-v^-)u^2\check{F}^-\lambda]\check{F}^+\lambda = 4(uu^-)^2(u\pi + u^-\lambda)^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & [(v^-\pi + v\lambda)^2\check{H} - (1 + u^-v^-)v^2\check{H}^-\lambda]^2 + (1 + uv)^2(v^-)^4(\check{H}^+)^2\lambda^2 - 2(1 + uv)(v^-)^2 \times \\ & \times [(v^-\pi + v\lambda)^2\check{H} + (1 + u^-v^-)v^2\check{H}^-\lambda]\check{H}^+\lambda = 4(vv^-)^2(v^-\pi + v\lambda)^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Прежде чем перейти к обсуждению теоремы 1 (см. ниже), приведем некоторые элементарные результаты.

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1,\dots,2N+2} \subset \mathbb{C}$ для некоторых $N \in \mathbb{N}_0$ и $\xi \in \mathbb{C}$, причем

$$|\xi| < \min\{|\lambda_1|^{-1}, \dots, |\lambda_{2N+2}|^{-1}\}.$$

Введем для краткости обозначения

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2N+2}), \quad \underline{\lambda}^{-1} = (\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{2N+2}^{-1}).$$

Тогда

$$\left(\prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j^{\pm 1} \xi) \right)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\underline{\lambda}^{\pm 1}) \xi^k, \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_0(\underline{\lambda}^{\pm 1}) &= 1, \quad \hat{\alpha}_1(\underline{\lambda}^{\pm 1}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N+2} \lambda_j^{\pm 1}, \quad \dots, \\ \hat{\alpha}_k(\underline{\lambda}^{\pm 1}) &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{2N+2}=0, \\ j_1 + \dots + j_{2N+2}=k}}^k \frac{(2j_1)! \cdots (2j_{2N+2})! \lambda_1^{\pm j_1} \cdots \lambda_{2N+2}^{\pm j_{2N+2}}}{2^{2k} (j_1!)^2 \cdots (j_{2N+2}!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\left(\prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j^{\pm 1} \xi) \right)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\underline{\lambda}^{\pm 1}) \xi^k, \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0(\underline{\lambda}^{\pm 1}) &= 1, \quad \alpha_1(\underline{\lambda}^{\pm 1}) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N+2} \lambda_j^{\pm 1}, \quad \dots, \\ \alpha_k(\underline{\lambda}^{\pm 1}) &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{2N+2}=0, \\ j_1 + \dots + j_{2N+2}=k}}^k \frac{(2j_1)! \cdots (2j_{2N+2})! \lambda_1^{\pm j_1} \cdots \lambda_{2N+2}^{\pm j_{2N+2}}}{2^{2k} (j_1!)^2 \cdots (j_{2N+2}!)^2 (2j_1 - 1) \cdots (2j_{2N+2} - 1)}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Перемножая (3.33) и (3.34) и сравнивая коэффициенты при ξ^k , находим

$$\sum_{l=0}^k \alpha_l(\underline{\lambda}^{\pm 1}) \hat{\alpha}_{k-l}(\underline{\lambda}^{\pm 1}) = \delta_{k,0}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.35)$$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что верна гипотеза 1 и выполняются уравнения (3.2). Кроме того, пусть $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_N \setminus \{P_{\infty,+}, P_{\infty,-}\}$. Тогда $\lambda^{N_2} F/y$, $\lambda^{N_2} H/y$, $\lambda^{N_2} G/y$ имеют следующие асимптотические разложения при $P \rightarrow P_{\infty,\pm}$:*

$$\frac{\lambda^{N_2} F}{\alpha_{0,+} y} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \mp \sum_{l=0}^{\infty} \hat{f}_{l,+} \zeta^l, \quad \frac{\lambda^{N_2} H}{\alpha_{0,+} y} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \mp \sum_{l=0}^{\infty} \hat{h}_{l,+} \zeta^l, \quad \frac{\lambda^{N_2} G}{\alpha_{0,+} y} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \mp \sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}_{l,+} \zeta^l, \quad (3.36)$$

и при $P \rightarrow P_{0,\pm}$:

$$\frac{\lambda^{N_2} F}{\alpha_{0,+} y} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \pm \sum_{l=0}^{\infty} \hat{f}_{l,-} \zeta^l, \quad \frac{\lambda^{N_2} H}{\alpha_{0,+} y} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \pm \sum_{l=0}^{\infty} \hat{h}_{l,-} \zeta^l, \quad \frac{\lambda^{N_2} G}{\alpha_{0,+} y} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \pm \sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}_{l,-} \zeta^l, \quad (3.37)$$

где $\zeta = \lambda^{-1}$ и $\zeta = \lambda$ – локальная координата вблизи $P_{\infty,\pm}$ и $P_{0,\pm}$ соответственно, $\hat{f}_{l,\pm}$, $\hat{h}_{l,\pm}$ и $\hat{g}_{l,\pm}$ – однородные коэффициенты, определенные в (3.14). В частности, $\hat{g}_{l,\pm}$, $\hat{f}_{l,\pm}$ и $\hat{h}_{l,\pm}$ можно вычислить из нелинейных рекуррентных соотношений:

$$\hat{g}_{0,+} = \frac{1}{2}, \quad \hat{g}_{1,+} = uv^-, \quad (3.38)$$

$$\hat{g}_{l,+} = \sum_{k=1}^l \hat{f}_{k,+} \hat{h}_{l+1-k,+} - \sum_{k=1}^{l-1} \hat{f}_{k,+} \hat{h}_{l-k,+} - \sum_{k=1}^{l-1} \hat{g}_{k,+} \hat{g}_{l-k,+}, \quad l \geq 2,$$

$$\hat{f}_{0,+} = 0, \quad \hat{f}_{1,+} = u, \quad \hat{f}_{2,+} = u^+ \gamma^2 + u^2 (v^- - v),$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{3,+} = & u^2 (\gamma^-)^2 (v^{--} - v^-) + u^3 (v^- - v)^2 + \\ & + \gamma^2 [u^{++} (\gamma^+)^2 + 2uu^+ (v^- - v) + (u^+)^2 (v - v^+)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{l,+} = & -\frac{1}{2u(u^-)^4} \left\{ 3uu^- \pi \sum_{k=1}^{l-2} [3uu^- \pi \hat{f}_{k,+} - 2(\gamma^-)^2 u^2 \hat{f}_{k,+}^- - \right. \\ & \left. - 2\gamma^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,+}^+] \hat{f}_{l-1-k,+} + (u^-)^4 \sum_{k=2}^{l-1} \hat{f}_{k,+} \hat{f}_{l+1-k,+} + \right. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$+ 2(u^-)^2 \sum_{k=1}^{l-1} [2uu^- \pi \hat{f}_{k,+} - (\gamma^-)^2 u^2 \hat{f}_{k,+}^- - \gamma^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,+}^+] \hat{f}_{l-k,+} +$$

$$+ 2u^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{l-3} [2uu^- \pi \hat{f}_{k,+} - (\gamma^-)^2 u^2 \hat{f}_{k,+}^- - \gamma^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,+}^+] \hat{f}_{l-2-k,+} +$$

$$+ u^4 \pi^4 \sum_{k=1}^{l-4} \hat{f}_{k,+} \hat{f}_{l-3-k,+} + \sum_{k=1}^{l-2} [(\gamma^-)^4 u^4 \hat{f}_{k,+}^- \hat{f}_{l-1-k,+}^- +$$

$$+ \gamma^4 (u^-)^4 \hat{f}_{k,+}^+ \hat{f}_{l-1-k,+}^+ - 2\gamma^2 (\gamma^-)^2 u^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,+}^- \hat{f}_{l-1-k,+}^+] \Big\}, \quad l \geq 4,$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{0,+} &= 0, \quad \hat{h}_{1,+} = v^-, \quad \hat{h}_{2,+} = v^{--}(\gamma^-)^2 + (v^-)^2(u - u^-), \\
\hat{h}_{3,+} &= (v^-)^2\gamma^2(u^+ - u) + (v^-)^3(u - u^-)^2 + (\gamma^-)^2[(v^{--})^2(u^- - u^{--}) + \\
&\quad + v^{---}(\gamma^{--})^2 + 2v^-v^{--}(u - u^-)], \\
\hat{h}_{l,+} &= -\frac{1}{2v^4v^-} \left\{ 2vv^- \pi \sum_{k=1}^{l-2} [3vv^- \pi \hat{h}_{k,+} - 2(\gamma^-)^2 v^2 \hat{h}_{k,+}^- - 2\gamma^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,+}^+] \hat{h}_{l-1-k,+} + \right. \\
&\quad + (v^-)^4 \pi^4 \sum_{k=1}^{l-4} \hat{h}_{k,+} \hat{h}_{l-3-k,+} + 2v^2 \sum_{k=1}^{l-1} [2vv^- \pi \hat{h}_{k,+} - (\gamma^-)^2 v^2 \hat{h}_{k,+}^- - \\
&\quad - \gamma^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,+}^+] \hat{h}_{l-k,+} + v^4 \sum_{k=2}^{l-1} \hat{h}_{k,+} \hat{h}_{l+1-k,+} + \\
&\quad + 2(v^-)^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{l-3} [2vv^- \pi \hat{h}_{k,+} - (\gamma^-)^2 v^2 \hat{h}_{k,+}^- - \gamma^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,+}^+] \hat{h}_{l-2-k,+} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{l-2} [(\gamma^-)^4 v^4 \hat{h}_{k,+}^- \hat{h}_{l-1-k,+} + \gamma^4 (v^-)^4 \hat{h}_{k,+}^+ \hat{h}_{l-1-k,+} - \\
&\quad \left. - 2\gamma^2 (\gamma^-)^2 v^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,+}^- \hat{h}_{l-1-k,+}^+] \right\}, \quad l \geq 4,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{0,-} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, \\
2\hat{g}_{0,-}\hat{g}_{l,-} &= \sum_{k=0}^{l-1} \hat{f}_{k,-} \hat{h}_{l-1-k,-} - \sum_{k=0}^l \hat{f}_{k,-} \hat{h}_{l-k,-} - \sum_{k=1}^{l-1} \hat{g}_{k,-} \hat{g}_{l-k,-}, \quad l \geq 1,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{0,-} &= \frac{u^-}{\pi}, \quad \hat{f}_{1,-} = \frac{u^{--}(\gamma^-)^2}{\pi^2 \pi^-} + \frac{(u^-)^2(v - v^+)}{\pi^2 \pi^+}, \\
\hat{f}_{2,-} &= \frac{\gamma^2 (u^-)^2 (v^+ - v^{++})}{\pi^2 (\pi^+)^2 \pi^{++}} + \frac{(u^-)^3 (v^+ - v)^2}{\pi^3 (\pi^+)^2} + \\
&\quad + \frac{(\gamma^-)^2}{\pi^-} \left[\frac{(\gamma^{--})^2 u^{---}}{\pi^2 \pi^- \pi^{--}} + \frac{(u^{--})^2 (v^- - v)}{\pi^3 \pi^-} + \frac{2u^- u^{--} (v - v^+)}{\pi^3 \pi^+} \right], \\
\hat{f}_{l,-} &= \frac{-1}{2u^- u^4 \pi^3} \left\{ 2uu^- \pi \sum_{k=0}^{l-2} [3uu^- \pi \hat{f}_{k,-} - 2(\gamma^-)^2 u^2 \hat{f}_{k,-}^- - \right. \\
&\quad - 2\gamma^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,-}^+] \hat{f}_{l-2-k,-} + u^4 \pi^4 \sum_{k=1}^{l-1} \hat{f}_{k,-} \hat{f}_{l-k,-} + \\
&\quad + 2u^2 \pi^2 \sum_{k=0}^{l-1} [2uu^- \pi \hat{f}_{k,-} - (\gamma^-)^2 u^2 \hat{f}_{k,-}^- - \gamma^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,-}^+] \hat{f}_{l-1-k,-} + \\
&\quad + 2(u^-)^2 \sum_{k=0}^{l-3} [2uu^- \pi \hat{f}_{k,-} - (\gamma^-)^2 u^2 \hat{f}_{k,-}^- - \gamma^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,-}^+] \hat{f}_{l-3-k,-} + \\
&\quad + (u^-)^4 \sum_{k=0}^{l-4} \hat{f}_{k,-} \hat{f}_{l-4-k,-} + \sum_{k=0}^{l-2} [(\gamma^-)^4 u^4 \hat{f}_{k,-}^- \hat{f}_{l-2-k,-}^- + \\
&\quad \left. + \gamma^4 (u^-)^4 \hat{f}_{k,-}^+ \hat{f}_{l-2-k,-}^+ - 2\gamma^2 (\gamma^-)^2 u^2 (u^-)^2 \hat{f}_{k,-}^- \hat{f}_{l-2-k,-}^+] \right\}, \quad l \geq 3,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{0,-} &= \frac{v}{\pi}, \quad \hat{h}_{1,-} = \frac{v^+ \gamma^2}{\pi^2 \pi^+} + \frac{v^2(u^- - u^{--})}{\pi^2 \pi^-}, \\
\hat{h}_{2,-} &= \frac{(\gamma^-)^2 v^2 (u^{--} - u^{---})}{\pi^2 (\pi^-)^2 \pi^{--}} + \frac{v^3 (u^{--} - u^-)^2}{\pi^3 (\pi^-)^2} + \frac{\gamma^2}{\pi^+} \left[\frac{(\gamma^+)^2 v^{++}}{\pi^2 \pi^+ \pi^{++}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v^+)^2 (u - u^-)}{\pi^3 \pi^+} + \frac{2vv^+ (u^- - u^{--})}{\pi^3 \pi^-} \right], \\
\hat{h}_{l,-} &= -\frac{1}{2v(v^-)^4 \pi^3} \left\{ 2vv^- \pi \sum_{k=0}^{l-2} [3vv^- \pi \hat{h}_{k,-} - 2(\gamma^-)^2 v^2 \hat{h}_{k,-}^- - \right. \\
&\quad \left. - 2\gamma^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,-}^+] \hat{h}_{l-2-k,-} + v^4 \sum_{k=0}^{l-4} \hat{h}_{k,-} \hat{h}_{l-4-k,-} + \right. \\
&\quad + 2(v^-)^2 \pi^2 \sum_{k=0}^{l-1} [2vv^- \pi \hat{h}_{k,-} - (\gamma^-)^2 v^2 \hat{h}_{k,-}^- - \gamma^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,-}^+] \hat{h}_{l-1-k,-} + \\
&\quad + 2v^2 \sum_{k=0}^{l-3} [2vv^- \pi \hat{h}_{k,-} - (\gamma^-)^2 v^2 \hat{h}_{k,-}^- - \gamma^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,-}^+] \hat{h}_{l-3-k,-} + \\
&\quad + (v^-)^4 \pi^4 \sum_{k=1}^{l-1} \hat{h}_{k,-} \hat{h}_{l-k,-} + \sum_{k=0}^{l-2} [(\gamma^-)^4 v^4 \hat{h}_{k,-}^- \hat{h}_{l-2-k,-} + \\
&\quad \left. + \gamma^4 (v^-)^4 \hat{h}_{k,-}^+ \hat{h}_{l-2-k,-} - 2\gamma^2 (\gamma^-)^2 v^2 (v^-)^2 \hat{h}_{k,-}^- \hat{h}_{l-2-k,-}^+] \right\}, \quad l \geq 3.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление с учетом (2.1)–(2.3), (3.3), (3.8) и (3.13)–(3.16) показывает, что $\hat{f}_{l,\pm}$, $\hat{h}_{l,\pm}$ и $\hat{g}_{l,\pm}$ удовлетворяют соотношениям (3.38)–(3.43). Вводя локальную координату $\zeta = \lambda^{-1}$ вблизи $P_{\infty,\pm}$ и локальную координату $\zeta = \lambda$ вблизи $P_{0,\pm}$, из (3.17) и (3.33) получаем

$$y^{-1} = \mp \zeta^{N+1} \prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j \zeta)^{-1/2} = \mp \zeta^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda) \zeta^k \quad \text{при } P \rightarrow P_{\infty,\pm}, \tag{3.44}$$

$$y^{-1} = \pm \left(\prod_{j=1}^{2N+2} \lambda_j \right)^{-1/2} \prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j^{-1} \zeta)^{-1/2} = \pm \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda^{-1}) \zeta^k \quad \text{при } P \rightarrow P_{0,\pm}. \tag{3.45}$$

Введем голоморфное отображение смены листов:

$$*: \mathcal{K}_N \rightarrow \mathcal{K}_N, \quad P = (\lambda, y) \rightarrow P^* = (\lambda, -y), \quad y(P^*) = -y(P), \quad P, P^* \in \mathcal{K}_N.$$

Отождествляя $\phi_+(\lambda)$ с $\phi(P)$ и $\phi_-(\lambda)$ с $\phi(P^*)$ и сравнивая (3.3), (3.16), (3.24), (3.25) и (3.27)–(3.30), а затем используя (3.12), при $P \rightarrow P_{\infty,\pm}$ получаем

$$\begin{aligned}
\check{F} &= 2 \frac{\lambda^{N_2}}{\alpha_{0,+}} \frac{F}{y} = \mp \frac{2}{\alpha_{0,+}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda) \zeta^{N_1+k} \right) \left(\sum_{j=0}^{N_1} f_{j,+} \zeta^{j-N_1} + \sum_{j=0}^{N_2-1} f_{j,-} \zeta^{N_2-j} \right) = \\
&= \mp 2 \sum_{l=0}^{\infty} \check{f}_{l,+} \zeta^l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{H} &= 2 \frac{\lambda^{N_2}}{\alpha_{0,+}} \frac{H}{y} = \mp \frac{2}{\alpha_{0,+}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda) \zeta^{N_1+k} \right) \left(\sum_{j=0}^{N_1} h_{j,+} \zeta^{j-N_1} + \sum_{j=0}^{N_2-1} h_{j,-} \zeta^{N_2-j} \right) = \\
&= \mp 2 \sum_{l=0}^{\infty} \check{h}_{l,+} \zeta^l, \\
\check{G} &= 2 \frac{\lambda^{N_2}}{\alpha_{0,+}} \frac{G}{y} = \mp \frac{2}{\alpha_{0,+}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda) \zeta^{N_1+k} \right) \left(\sum_{j=0}^{N_1} g_{j,+} \zeta^{j-N_1} + \sum_{j=0}^{N_2-1} g_{j,-} \zeta^{N_2-j} \right) = \\
&= \mp 2 \sum_{l=0}^{\infty} \check{g}_{l,+} \zeta^l,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

а при $P \rightarrow P_{0,\pm}$ получаем

$$\begin{aligned}
\check{F} &= 2 \frac{\lambda^{N_2}}{\alpha_{0,+}} \frac{F}{y} = \pm \frac{2}{\alpha_{0,-}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda^{-1}) \zeta^{k+N_2} \right) \left(\sum_{j=0}^{N_1} f_{j,+} \zeta^{N_1-j} + \sum_{j=0}^{N_2-1} f_{j,-} \zeta^{j-N_2} \right) = \\
&= \pm 2 \sum_{l=0}^{\infty} \check{f}_{l,-} \zeta^l, \\
\check{H} &= 2 \frac{\lambda^{N_2}}{\alpha_{0,+}} \frac{H}{y} = \pm \frac{2}{\alpha_{0,-}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda^{-1}) \zeta^{k+N_2} \right) \left(\sum_{j=0}^{N_1} h_{j,+} \zeta^{N_1-j} + \sum_{j=0}^{N_2-1} h_{j,-} \zeta^{j-N_2} \right) = \\
&= \pm 2 \sum_{l=0}^{\infty} \check{h}_{l,-} \zeta^l, \\
\check{G} &= 2 \frac{\lambda^{N_2}}{\alpha_{0,+}} \frac{G}{y} = \pm \frac{2}{\alpha_{0,-}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(\lambda^{-1}) \zeta^{k+N_2} \right) \left(\sum_{j=0}^{N_1} g_{j,+} \zeta^{N_1-j} + \sum_{j=0}^{N_2-1} g_{j,-} \zeta^{j-N_2} \right) = \\
&= \pm 2 \sum_{l=0}^{\infty} \check{g}_{l,-} \zeta^l,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

для некоторых коэффициентов $\check{f}_{l,\pm}$, $\check{h}_{l,\pm}$ и $\check{g}_{l,\pm}$, которые мы определим ниже. Для доказательства (3.36) и (3.37) требуется только установить, что $\check{f}_{l,\pm} = \hat{f}_{l,\pm}$, $\check{h}_{l,\pm} = \hat{h}_{l,\pm}$, $\check{g}_{l,\pm} = \hat{g}_{l,\pm}$, $l \in \mathbb{N}_0$.

Подставляя разложение (3.46) для $\check{F}$ в (3.31), разложение (3.46) для $\check{H}$ в (3.32), и разложение (3.46) в (3.30), приходим к нелинейным рекуррентным соотношениям (3.38)–(3.40), но с $\check{f}_{l,+}$, $\check{h}_{l,+}$, $\check{g}_{l,+}$ вместо $\hat{f}_{l,+}$, $\hat{h}_{l,+}$, $\hat{g}_{l,+}$. Знаки $\check{f}_{1,+}$, $\check{h}_{1,+}$, $\check{g}_{0,+}$ были выбраны так, что $\check{f}_{1,+} = u$, $\check{h}_{1,+} = v^-$, $\check{g}_{0,+} = 1/2$. Функции $\check{f}_{1,+}$, $\check{h}_{1,+}$, $\check{g}_{0,+}$ согласуются с (3.14) при $\alpha_{0,+} = 1$. Оказывается, что рекуррентные соотношения (3.38)–(3.43) являются чисто алгебраическими, без обращения разностных операторов, т. е. удовлетворяют выражениям (3.38)–(3.40) с заданными начальными значениями, и определяются единственным образом. Таким образом, по индукции можно показать, что

$$\check{f}_{l,+} = \hat{f}_{l,+}, \quad \check{h}_{l,+} = \hat{h}_{l,+}, \quad \check{g}_{l,+} = \hat{g}_{l,+}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\check{f}_{l,-} = \hat{f}_{l,-}, \quad \check{h}_{l,-} = \hat{h}_{l,-}, \quad \check{g}_{l,-} = \hat{g}_{l,-}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

ТЕОРЕМА 2. Для зависящих от λ_N постоянных суммирования $\alpha_{0,+}, \alpha_{1,+}, \dots, \dots, \alpha_{N_1,+}$ и $\alpha_{0,-}, \alpha_{1,-}, \dots, \alpha_{N_2-1,-}$ в G, F, H оказывается, что

$$\begin{aligned}\alpha_{k,+} &= \alpha_{0,+} \alpha_k(\underline{\lambda}), & k &= 0, \dots, N_1, \\ \alpha_{k,-} &= \alpha_{0,-} \alpha_k(\underline{\lambda}^{-1}), & k &= 0, \dots, N_2 - 1.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Кроме того, имеют место следующие соотношения между однородными и неоднородными коэффициентами рекурсии:

$$\begin{aligned}f_{l,+} &= \alpha_{0,+} \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\underline{\lambda}) \hat{f}_{k,+}, & l &= 0, \dots, N_1, \\ f_{l,-} &= \alpha_{0,-} \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\underline{\lambda}^{-1}) \hat{f}_{k,-}, & l &= 0, \dots, N_2 - 1, \\ h_{l,+} &= \alpha_{0,+} \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\underline{\lambda}) \hat{h}_{k,+}, & l &= 0, \dots, N_1, \\ h_{l,-} &= \alpha_{0,-} \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\underline{\lambda}^{-1}) \hat{h}_{k,-}, & l &= 0, \dots, N_2 - 1, \\ g_{l,+} &= \alpha_{0,+} \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\underline{\lambda}) \hat{g}_{k,+}, & l &= 0, \dots, N_1, \\ g_{l,-} &= \alpha_{0,-} \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\underline{\lambda}^{-1}) \hat{g}_{k,-}, & l &= 0, \dots, N_2 - 1.\end{aligned}\quad (3.49)$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}\alpha_{0,+} \hat{f}_{l,+} &= \sum_{k=0}^l \hat{\alpha}_{l-k}(\underline{\lambda}) f_{k,+}, & l &= 0, \dots, N_1, \\ \alpha_{0,-} \hat{f}_{l,-} &= \sum_{k=0}^l \hat{\alpha}_{l-k}(\underline{\lambda}^{-1}) f_{k,-}, & l &= 0, \dots, N_2 - 1, \\ \alpha_{0,+} \hat{h}_{l,+} &= \sum_{k=0}^l \hat{\alpha}_{l-k}(\underline{\lambda}) h_{k,+}, & l &= 0, \dots, N_1, \\ \alpha_{0,-} \hat{h}_{l,-} &= \sum_{k=0}^l \hat{\alpha}_{l-k}(\underline{\lambda}^{-1}) h_{k,-}, & l &= 0, \dots, N_2 - 1, \\ \alpha_{0,+} \hat{g}_{l,+} &= \sum_{k=0}^l \hat{\alpha}_{l-k}(\underline{\lambda}) g_{k,+}, & l &= 0, \dots, N_1, \\ \alpha_{0,-} \hat{g}_{l,-} &= \sum_{k=0}^l \hat{\alpha}_{l-k}(\underline{\lambda}^{-1}) g_{k,-}, & l &= 0, \dots, N_2 - 1.\end{aligned}\quad (3.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (3.50) следуют из сравнения степеней ζ во вторых и третьих членах выражений (3.46) и (3.47) соответственно.

Применяя (3.35), имеем

$$\alpha_{0,\pm} \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\lambda^{\pm 1}) \hat{f}_{k,\pm} = \sum_{k=0}^l \alpha_{l-k}(\lambda^{\pm 1}) \sum_{s=0}^k \hat{\alpha}_{k-s}(\lambda^{\pm 1}) f_{s,\pm} = f_{l,\pm}.$$

Таким образом, мы получаем (3.49) и, аналогично, (3.48). Соответствующее доказательство формулы (3.49) для $h_{l,\pm}$, $g_{l,\pm}$ аналогично доказательству для $f_{l,\pm}$, поэтому мы его опускаем.

4. ВЫПРЯМЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОТОКОВ

Чтобы выпрямить непрерывный поток, рассмотрим риманову поверхность $\mathcal{K}_N$ и оснастим ее каноническими базисными циклами $a_1, \dots, a_N; b_1, \dots, b_N$, которые являются независимыми и имеют следующие числа пересечения:

$$a_i \circ a_j = 0, \quad b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

Временно выберем базис в виде

$$\tilde{\omega}_l = \frac{\lambda^{l-1} d\lambda}{y(P)}, \quad 1 \leq l \leq N, \quad (4.1)$$

что представляет собой набор N линейно независимых голоморфных дифференциалов на $\mathcal{K}_N$. Используя циклы a_j и b_j , можно построить матрицы периодов A и B , такие что

$$A_{ij} = \int_{a_j} \tilde{\omega}_i, \quad B_{ij} = \int_{b_j} \tilde{\omega}_i.$$

Можно показать, что матрицы A и B являются обратимыми [31], [32]. Теперь определим матрицы C и τ : $C = A^{-1}$, $\tau = A^{-1}B$. Можно показать, что матрица τ симметрична ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) и имеет положительно определенную мнимую часть ($\text{Im } \tau > 0$). Если нормировать $\tilde{\omega}_l$ в новом базисе ω_j , то получим

$$\omega_j = \sum_{l=1}^N C_{jl} \tilde{\omega}_l, \quad \int_{a_i} \omega_j = \sum_{l=1}^N C_{jl} \int_{a_i} \tilde{\omega}_l = \delta_{ji}, \quad \int_{b_i} \omega_j = \tau_{ji}, \quad 1 \leq i, \quad j \leq N.$$

Пусть $\mathcal{T}$ – решетка, порожденная $2N$ векторами δ_j, τ_j , где $\delta_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-j})^T$ и $\tau_j = \tau \delta_j$. Комплексный тор $\mathcal{J} = \mathbb{C}^N / \mathcal{T}$ называется многообразием Якоби поверхности $\mathcal{K}_N$. Теперь введем отображение Абеля $\mathcal{A}(P): \text{Div}(\mathcal{K}_N) \rightarrow \mathcal{J}$:

$$\mathcal{A}(P) = \int_{Q_0}^P \underline{\omega}, \quad \mathcal{A}\left(\sum n_k P_k\right) = \sum n_k \mathcal{A}(P_k), \quad (4.2)$$

где $P, P_k \in \mathcal{K}_N$, $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N)$. Тета-функцию Римана можно записать как [31], [32]

$$\theta(\lambda(\underline{P}, \underline{Q})) = \theta(\underline{\Lambda} - \mathcal{A}(P) + \underline{\rho}^{(i)}(n, t_{\underline{m}})), \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

где $P \in \mathcal{K}_N$, $\underline{Q} = \{Q_1, \dots, Q_N\} \in \text{Sym}^N(\mathcal{K}_N)$, $\underline{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$ определяется как

$$\Lambda_j = \frac{1}{2}(1 + \tau_{jj}) - \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^N \int_{a_i} \omega_i \int_{Q_0}^P \omega_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

а координаты Абеля–Якоби $\underline{\rho}^{(i)}$ имеют вид

$$\underline{\rho}^{(i)} = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^N P_k^{(i)}\right) = \sum_{k=1}^N \mathcal{A}(P_k^{(i)}) = \sum_{k=1}^N \int_{Q_0}^{P_k^{(i)}} \underline{\omega}, \quad i = 1, 2, \quad (4.4)$$

где $P_k^{(1)} = \hat{\mu}_k(n, t_{\underline{m}})$ и $P_k^{(2)} = \hat{\nu}_k(n, t_{\underline{m}})$, с компонентами

$$\rho_j^{(1)}(n, t_{\underline{m}}) = \sum_{k=1}^N \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_k(n, t_{\underline{m}})} \omega_j = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N C_{jl} \int_{\lambda(Q_0)}^{\mu_k} \frac{\lambda^{l-1}}{y(P)} d\lambda, \quad (4.5)$$

$$\rho_j^{(2)}(n, t_{\underline{m}}) = \sum_{k=1}^N \int_{Q_0}^{\hat{\nu}_k(n, t_{\underline{m}})} \omega_j = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N C_{jl} \int_{\lambda(Q_0)}^{\nu_k} \frac{\lambda^{l-1}}{y(P)} d\lambda, \quad (4.6)$$

где $1 \leq j \leq N$. Без потери общности выберем точку ветвления $Q_0 = (\lambda_{j_0}, 0)$, $j_0 \in \{1, \dots, 2N+2\}$ как удобную базисную точку; тогда $\lambda(Q_0)$ есть ее локальная координата.

Теперь согласно (4.4) и определению тета-функции Римана (4.3) получим

$$\begin{aligned} \theta(\lambda(P, \hat{\mu}(n, t_{\underline{m}}))) &= \theta(\underline{\Lambda} - \mathcal{A}(P) + \underline{\rho}^{(1)}(n, t_{\underline{m}})), \\ \theta(\lambda(P, \hat{\nu}(n, t_{\underline{m}}))) &= \theta(\underline{\Lambda} - \mathcal{A}(P) + \underline{\rho}^{(2)}(n, t_{\underline{m}})). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (3.19) и (3.20) получаем

$$G(\mu_j) = \frac{1}{2} \frac{\alpha_{0,+}}{\mu_j^{N_2}} y(\hat{\mu}_j), \quad G(\nu_j) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_{0,+}}{\nu_j^{N_2}} y(\hat{\nu}_j), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4.8)$$

Используя (3.4) и (3.18), находим

$$\begin{aligned} F_{t_{\underline{m}}}(\mu_j) &= -\frac{\alpha_{0,+}}{\mu_j^{N_2}} \frac{u}{\mu_j} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^N (\mu_j - \mu_i) = -2G(\mu_j) \tilde{F}_{\underline{m}}(\mu_j) = -\frac{\alpha_{0,+}}{\mu_j^{N_2}} y(\hat{\mu}_j) \tilde{F}_{\underline{m}}(\mu_j), \\ H_{t_{\underline{m}}}(\nu_j) &= -\frac{\alpha_{0,+}}{\nu_j^{N_2}} \frac{v^-}{\nu_j} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^N (\nu_j - \nu_i) = 2G(\nu_j) \tilde{H}_{\underline{m}}(\nu_j) = -\frac{\alpha_{0,+}}{\nu_j^{N_2}} y(\hat{\nu}_j) \tilde{H}_{\underline{m}}(\nu_j), \end{aligned} \quad (4.9)$$

откуда мы получаем эволюцию $\{\mu_j\}$ и $\{\nu_j\}$ вдоль $t_{\underline{m}}$ -потока:

$$\mu_{j, t_{\underline{m}}} = \frac{y(\hat{\mu}_j) \tilde{F}_{\underline{m}}(\mu_j)}{u \prod_{i=1, i \neq j}^N (\mu_j - \mu_i)}, \quad \nu_{j, t_{\underline{m}}} = \frac{y(\hat{\nu}_j) \tilde{H}_{\underline{m}}(\nu_j)}{v^- \prod_{i=1, i \neq j}^N (\nu_j - \nu_i)}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4.10)$$

Предполагая $N \in \mathbb{N}$ фиксированным и вводя

$$\mathbf{S}_k = \{\underline{l} = (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq N\}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{I}_k^{(j)} = \{l = (l_1, \dots, l_k) \in \mathbf{S}_k \mid l_i \neq j, i = 1, \dots, k\}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, N,$$

определим симметрические функции

$$\begin{aligned} \Psi_0(\underline{\mu}) &= 1, & \Psi_k(\underline{\mu}) &= (-1)^k \sum_{l \in \mathbf{S}_k} \mu_{l_1} \dots \mu_{l_k}, & k &= 1, \dots, N, \\ \Phi_k^{(j)}(\underline{\mu}) &= (-1)^k \sum_{l \in \mathbf{I}_k^{(j)}} \mu_{l_1} \dots \mu_{l_k}, & k &= 1, \dots, N-1, & j &= 1, \dots, N, \\ \Phi_0^{(j)}(\underline{\mu}) &= 1, & \Phi_N^{(j)}(\underline{\mu}) &= 0, & j &= 1, \dots, N, & \underline{\mu} &= (\mu_1, \dots, \mu_N). \end{aligned}$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^N (\lambda - \mu_j) = \sum_{l=0}^N \Psi_l(\underline{\mu}) \lambda^{N-l}. \quad (4.11)$$

Согласно интерполяционной теореме Лагранжа имеются следующие важные факты (эти леммы были подробно доказаны в работе [16], леммы D.2, D.3).

ЛЕММА 1. *Предположим, что $\mu_j \neq \mu_{j'}$ при $j \neq j'$. Тогда*

$$\sum_{l=0}^k \Psi_{k-l}(\underline{\mu}) \mu_j^l = \Phi_k^{(j)}(\underline{\mu}), \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 0, \dots, N. \quad (4.12)$$

ЛЕММА 2. *Предположим, что $\mu_j \neq \mu_{j'}$ при $j \neq j'$, и введем $(N \times N)$ -матрицу $\mathbf{U}_N(\underline{\mu})$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1(\underline{\mu}) &= 1, & \mathbf{U}_N(\underline{\mu}) &= \left(\frac{\mu_k^{j-1}}{\prod_{i=1, i \neq k}^N (\mu_k - \mu_i)} \right)_{j,k=1}^N, \\ \mathbf{U}_N(\underline{\mu})^{-1} &= (\Phi_{N-k}^{(j)}(\underline{\mu}))_{j,k=1}^N. \end{aligned} \quad (4.13)$$

С учетом (3.14) соответствующие однородные многочлены определяются как ($l \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \hat{G}_{0,+} &= \frac{1}{2}, & \hat{G}_{l,+} &= \sum_{k=0}^l \hat{g}_{l-k,+} \lambda^k - \hat{d}_{l+1,+}, \\ \hat{G}_{0,-} &= -\frac{1}{2}, & \hat{G}_{l,-} &= \sum_{k=1}^l \hat{g}_{l-k,-} \lambda^{-k} + \hat{d}_{l,-}, \\ \hat{F}_{0,+} &= 0, & \hat{F}_{l,+} &= \sum_{k=0}^{l-1} \hat{f}_{l-k,+} \lambda^k, & \hat{F}_{0,-} &= 0, & \hat{F}_{l,-} &= \sum_{k=1}^l \hat{f}_{l-k,-} \lambda^{-k}, \\ \hat{H}_{0,+} &= 0, & \hat{H}_{l,+} &= \sum_{k=0}^{l-1} \hat{h}_{l-k,+} \lambda^k, & \hat{H}_{0,-} &= 0, & \hat{H}_{l,-} &= \sum_{k=1}^l \hat{h}_{l-k,-} \lambda^{-k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Немедленно находим, что

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\underline{m}} &= \sum_{k=0}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-k,+} \hat{G}_{k,+} + \sum_{k=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-k,-} \hat{G}_{k,-}, \\ \tilde{F}_{\underline{m}} &= \sum_{k=0}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-k,+} \hat{F}_{k,+} + \sum_{k=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-k,-} \hat{F}_{k,-}, \\ \tilde{H}_{\underline{m}} &= \sum_{k=0}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-k,+} \hat{H}_{k,+} + \sum_{k=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-k,-} \hat{H}_{k,-}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что $\mu_j \neq \mu_{j'}$ и $\nu_j \neq \nu_{j'}$ при $j \neq j'$, $j, j' = 1, \dots, N$. Тогда

$$\partial_{t_{\underline{m}}} \rho^{(1)}(n, t_{\underline{m}}) = \underline{\mathbf{Y}}^{(m_1)} - \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \underline{\mathbf{Y}}^{(m_2)} = \underline{\mathbf{Y}}^{(\underline{m})}, \quad (4.16)$$

$$\partial_{t_{\underline{m}}} \rho^{(2)}(n, t_{\underline{m}}) = \underline{\mathbf{Y}}^{(m_1)} - \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \underline{\mathbf{Y}}^{(m_2)} = \underline{\mathbf{Y}}^{(\underline{m})}, \quad (4.17)$$

где $\underline{\rho}^{(i)} = (\rho_1^{(i)}, \dots, \rho_N^{(i)})$, $i = 1, 2$, $\underline{C}_k = (C_{1k}, \dots, C_{Nk})$, $1 \leq k \leq N$,

$$\underline{\mathbf{Y}}^{(m_1)} = 0, \quad m_1 = 0, \quad \underline{\mathbf{Y}}^{(m_1)} = \sum_{s=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \sum_{q=0}^{s-1} \underline{C}_{N-q} \hat{\alpha}_{s-l-q}(\underline{\lambda}), \quad 1 \leq m_1 \leq N_1,$$

$$\underline{\mathbf{Y}}^{(m_2)} = 0, \quad m_2 = 0, \quad \underline{\mathbf{Y}}^{(m_2)} = \sum_{s=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \sum_{q=0}^{s-1} \underline{C}_{s-q} \hat{\alpha}_q(\underline{\lambda}^{-1}), \quad 1 \leq m_2 \leq N_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.12), (3.18) и (4.11) имеем

$$\begin{aligned}\lambda^{N_2} F(\lambda) &= \sum_{j=0}^{N_1} f_{j,+} \lambda^{N+1-j} + \sum_{j=0}^{N_2-1} f_{j,-} \lambda^j = \alpha_{0,+} u \prod_{j=1}^N (\lambda - \mu_j) = \\ &= \alpha_{0,+} u \sum_{l=0}^N \Psi_l(\underline{\mu}) \lambda^{N-l}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

С учетом равенств $f_{0,+} = \hat{f}_{0,+} = 0$ и используя (3.50), получаем

$$\begin{aligned}f_{l,+} &= \alpha_{0,+} u \Psi_{l-1}(\underline{\mu}), \quad \hat{f}_{l,+} = u \sum_{k=0}^{l-1} \hat{\alpha}_{l-1-k}(\underline{\lambda}) \Psi_k(\underline{\mu}), \quad 1 \leq l \leq N_1, \\ f_{l,-} &= \alpha_{0,+} u \Psi_{N-l}(\underline{\mu}), \quad \hat{f}_{l,-} = u \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{k=0}^l \hat{\alpha}_{l-k}(\underline{\lambda}^{-1}) \Psi_{N-k}(\underline{\mu}), \quad 0 \leq l \leq N_2 - 1.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Используя (4.14), получаем

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}_{l,+}(\lambda) &= u \sum_{k=1}^l \sum_{s=0}^{k-1} \hat{\alpha}_{k-1-s}(\underline{\lambda}) \Psi_s(\underline{\mu}) \lambda^{l-k} = \\
 &= u \sum_{k=0}^{l-1} \hat{\alpha}_{l-1-k}(\underline{\lambda}) \sum_{s=0}^k \Psi_s(\underline{\mu}) \lambda^{k-s}, \quad 1 \leq l \leq N_1, \\
 \widehat{F}_{l,-}(\lambda) &= u \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{s=0}^k \hat{\alpha}_{k-s}(\underline{\lambda}^{-1}) \Psi_{N-s}(\underline{\mu}) \lambda^{k-l} = \\
 &= u \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{k=0}^{l-1} \hat{\alpha}_k(\underline{\lambda}^{-1}) \sum_{s=N-l+k+1}^N \Psi_s(\underline{\mu}) \lambda^{N-l+k-s}, \quad 1 \leq l \leq N_2.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Из (4.12) и (4.18) находим

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}_{l,+}(\mu_j) &= u \sum_{k=0}^{l-1} \hat{\alpha}_{l-1-k}(\underline{\lambda}) \sum_{s=0}^k \Psi_s(\underline{\mu}) \mu_j^{k-s} = \\
 &= u \sum_{k=0}^{l-1} \hat{\alpha}_{l-1-k}(\underline{\lambda}) \Phi_k^{(j)}(\underline{\mu}), \quad 1 \leq l \leq N_1, \\
 \widehat{F}_{l,-}(\mu_j) &= -u \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{k=0}^{l-1} \hat{\alpha}_k(\underline{\lambda}^{-1}) \sum_{s=0}^{N-l+k} \Psi_s(\underline{\mu}) \mu_j^{N-l+k-s} = \\
 &= -u \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{k=0}^{l-1} \hat{\alpha}_k(\underline{\lambda}^{-1}) \Phi_{N-l+k}^{(j)}(\underline{\mu}), \quad 1 \leq l \leq N_2.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Таким образом, в случае $1 \leq m_1 \leq N_1$, $1 \leq m_2 \leq N_2$, используя (4.13), (4.15) и равенство $\widehat{F}_{0,\pm} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
 \widetilde{F}_{\underline{m}}(\mu_j) &= \sum_{s=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \widehat{F}_{s,+}(\mu_j) + \sum_{s=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \widehat{F}_{s,-}(\mu_j) = \\
 &= u \sum_{s=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \sum_{q=0}^{s-1} \hat{\alpha}_{s-1-q}(\underline{\lambda}) \Phi_q^{(j)}(\underline{\mu}) - \\
 &\quad - u \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{s=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \sum_{q=0}^{s-1} \hat{\alpha}_q(\underline{\lambda}^{-1}) \Phi_{N-s+q}^{(j)}(\underline{\mu}) = \\
 &= u \sum_{s=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \sum_{q=0}^{s-1} \hat{\alpha}_{s-1-q}(\underline{\lambda}) \mathbf{U}_N(\underline{\mu})_{j,N-q}^{-1} - \\
 &\quad - u \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{s=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \sum_{q=0}^{s-1} \hat{\alpha}_q(\underline{\lambda}^{-1}) \mathbf{U}_N(\underline{\mu})_{j,N-q}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Наконец, используя (4.5), (4.10) и (4.13), находим

$$\begin{aligned} \partial_{t_{\underline{m}}} \rho_k^{(1)}(n, t_{\underline{m}}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N C_{kl} \frac{\mu_j^{l-1} \mu_{j, t_{\underline{m}}}}{y(\hat{\mu}_j)} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{C_{kl} \mu_j^{l-1} \tilde{F}_{\underline{m}}(\mu_j)}{u \prod_{i=1, i \neq j}^N (\mu_j - \mu_i)} = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N C_{kl} \mathbf{U}_N(\underline{\mu})_{l,j} \frac{\tilde{F}_{\underline{m}}(\mu_j)}{u} = \sum_{s=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \sum_{q=0}^{s-1} C_{k, N-q} \hat{\alpha}_{s-1-q}(\underline{\lambda}) - \\ &\quad - \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \sum_{s=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \sum_{q=0}^{s-1} C_{k, s-q} \hat{\alpha}_q(\underline{\lambda}^{-1}) = \\ &= \mathbf{Y}_k^{(m_1)} - \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \mathbf{Y}_k^{(m_2)} = \mathbf{Y}_k^{(m)}, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Поскольку нетрудно проверить, что

$$\tilde{F}_{(m_1,0)}(\mu_j) = \sum_{s=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \hat{F}_{s,+}(\mu_j), \quad \tilde{F}_{(0,m_2)}(\mu_j) = \sum_{s=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \hat{F}_{s,-}(\mu_j), \quad (4.23)$$

мы доказали равенство (4.16). Аналогично можно доказать (4.17).

5. КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В настоящем разделе мы построим квазипериодические решения дискретной иерархии Чена–Ли–Лю. Основываясь на определении мероморфной функции $\phi(\cdot, n, t_{\underline{m}})$ на кривой $\mathcal{K}_N$ в (3.24), на дискретной спектральной задаче (2.1) и вспомогательной задаче (2.7), можно определить вектор Бейкера–Ахиезера $\bar{\psi}(\cdot, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}})$ на $\mathcal{K}_N$ как

$$\bar{\psi}(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) = \begin{pmatrix} \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) \\ \psi_2(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) &= \exp \left[\int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} (\tilde{G}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) - \tilde{F}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) \phi(P, n_0, s)) ds \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})} \begin{cases} \prod_{n'=n_0}^{n-1} (\lambda + u(n', t_{\underline{m}}) v(n', t_{\underline{m}}) - u(n', t_{\underline{m}}) \phi(P, n', t_{\underline{m}})), & n \geq n_0 + 1, \\ 1, & n = n_0, \\ \prod_{n'=n}^{n_0-1} (\lambda + u(n', t_{\underline{m}}) v(n', t_{\underline{m}}) - u(n', t_{\underline{m}}) \phi(P, n', t_{\underline{m}}))^{-1}, & n \leq n_0 - 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\psi_2(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) = -\phi(P, n_0, t_{\underline{m}}) \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}). \quad (5.3)$$

Заметим, что

$$\psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) = \psi_1(P, n_0, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{\underline{m}}), \quad (5.4)$$

где $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_N \setminus \{P_{\infty,+}, P_{\infty,-}, P_{0,+}, P_{0,-}\}$, $(n, t_{\underline{m}}), (n_0, t_{0,\underline{m}}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Введем следующие сокращения:

$$\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}}) = \begin{cases} \prod_{n'=n_0}^{n-1} \gamma(n', t_{\underline{m}}), & n \geq n_0 + 1, \\ 1, & n = n_0, \\ \prod_{n'=n}^{n_0-1} \gamma(n', t_{\underline{m}})^{-1}, & n \leq n_0 - 1, \end{cases}$$

$$\Pi(n, n_0, t_{\underline{m}}) = \begin{cases} \prod_{n'=n_0}^{n-1} \pi(n', t_{\underline{m}}), & n \geq n_0 + 1, \\ 1, & n = n_0, \\ \prod_{n'=n}^{n_0-1} \pi(n', t_{\underline{m}})^{-1}, & n \leq n_0 - 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. Предположим, что выполнена гипотеза 1 и что u, v удовлетворяют дискретной иерархии Чена–Ли–Лю (2.14). Кроме того, пусть $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_N \setminus \{P_{\infty,+}, P_{\infty,-}, P_{0,+}, P_{0,-}\}$, $(n, t_{\underline{m}}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Тогда функция ϕ имеет асимптотическое поведение

$$\phi(P, n, t_{\underline{m}}) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} v^- + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty,+}, \\ \frac{1}{u} \zeta^{-1} + v - \frac{u^+}{u^2} (1 + uv) + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty,-}, \end{cases} \quad \zeta = \lambda^{-1}, \quad (5.5)$$

$$\phi(P, n, t_{\underline{m}}) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} v + \frac{v^+ - v}{\pi^+} \zeta + O(\zeta^2) & \text{при } P \rightarrow P_{0,+}, \\ -\frac{1}{u^-} + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{0,-}, \end{cases} \quad \zeta = \lambda. \quad (5.6)$$

Дивизор $(\phi(\cdot, n, t_{\underline{m}}))$ функции $\phi(\cdot, n, t_{\underline{m}})$ имеет вид

$$(\phi(\cdot, n, t_{\underline{m}})) = D_{P_1 \underline{\nu}(n, t_{\underline{m}})} - D_{P_{\infty,-} \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}})}, \quad (5.7)$$

где мы ввели сокращения

$$\underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}}) = \{\hat{\mu}_1(n, t_{\underline{m}}), \dots, \hat{\mu}_N(n, t_{\underline{m}})\}, \quad \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}}) = \{\hat{\nu}_1(n, t_{\underline{m}}), \dots, \hat{\nu}_N(n, t_{\underline{m}})\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в (3.12) и (3.18), получаем

$$\frac{u^-}{u\pi} = (-1)^N \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \prod_{j=1}^N \mu_j, \quad \frac{v}{v^-\pi} = (-1)^N \frac{\alpha_{0,+}}{\alpha_{0,-}} \prod_{j=1}^N \nu_j \quad (5.8)$$

и

$$\frac{u^+}{u} \gamma^2 + u(v^- - v) + \frac{\alpha_{1,+}}{\alpha_{0,+}} = - \sum_{j=1}^N \mu_j, \quad (5.9)$$

$$\frac{v^{--}}{v^-} (\gamma^-)^2 + v^-(u - u^-) + \frac{\alpha_{1,+}}{\alpha_{0,+}} = - \sum_{j=1}^N \nu_j.$$

Вводя локальную координату $\zeta = \lambda^{-1}$ вблизи $P_{\infty, \pm}$ и локальную координату $\zeta = \lambda$ вблизи $P_{0, \pm}$, из (3.12), (3.17), (3.18), (3.34) и (5.8) получаем

$$G \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} \zeta^{-N_1}(g_{0,+} + g_{1,+}\zeta + O(\zeta^2)) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, \pm}, \\ \zeta^{-N_2}(g_{0,-} + O(\zeta)) & \text{при } P \rightarrow P_{0, \pm}, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \mp \zeta^{-N-1} \prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j \zeta)^{1/2} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \mp \zeta^{-N-1} (1 + \alpha_1(\underline{\lambda})\zeta + O(\zeta^2)) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, \pm}, \\ \pm \left(\prod_{j=1}^{2N+2} \lambda_j \right)^{1/2} \prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j^{-1} \zeta)^{1/2} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \pm \frac{\alpha_{0,-}}{\alpha_{0,+}} (1 + O(\zeta)) & \text{при } P \rightarrow P_{0, \pm}, \end{cases}$$

$$F^{-1} = \begin{cases} \frac{\zeta^{N_1-1}}{\alpha_{0,+} u} \prod_{j=1}^N (1 - \mu_j \zeta)^{-1} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \frac{\zeta^{N_1-1}}{\alpha_{0,+} u} \left(1 + \sum_{j=1}^N \mu_j \zeta + O(\zeta^2) \right) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, \pm}, \\ \frac{(-1)^N \zeta^{N_2}}{\alpha_{0,+} u \prod_{j=1}^N \mu_j} \prod_{j=1}^N (1 - \mu_j^{-1} \zeta)^{-1} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \frac{\pi \zeta^{N_2}}{\alpha_{0,-} u^-} (1 + O(\zeta)) & \text{при } P \rightarrow P_{0, \pm}. \end{cases}$$

Тогда согласно (5.9) и определению ϕ в (3.24) окончательно получаем

$$\phi(P, n, \underline{t}_m) = (\alpha_{0,+} (2\lambda^{N_2})^{-1} y + G) F^{-1} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} \left[\mp \frac{\alpha_{0,+}}{2} (1 + \alpha_1(\underline{\lambda})\zeta + O(\zeta^2)) + g_{0,+} + g_{1,+}\zeta + O(\zeta^2) \right] \times \\ \times \left(1 + \sum_{j=1}^N \mu_j \zeta + O(\zeta^2) \right) \frac{1}{\alpha_{0,+} u} \zeta^{-1} & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, \pm}, \\ \left[\pm \frac{\alpha_{0,-}}{2} (1 + O(\zeta)) + g_{0,-} + O(\zeta) \right] \frac{\pi}{\alpha_{0,-} u^-} (1 + O(\zeta)) & \text{при } P \rightarrow P_{0, \pm}, \end{cases} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} v^- + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, +}, \\ \frac{1}{u} \zeta^{-1} + v - \frac{u^+}{u^2} \gamma^2 + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, -}, \\ v + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{0, +}, \\ -\frac{1}{u^-} + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{0, -}, \end{cases} \quad (5.10)$$

что доказывает (5.5). Деляя подстановку $\phi(P) \underset{\lambda \rightarrow 0}{=} v + \phi_1 \lambda + O(\lambda^2)$ в (3.25), немедленно получаем (5.6), а затем и (5.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя (2.2), (2.3), (2.6), (2.8)–(2.14), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{m_1+1,+}(n, \underline{t}_m) &= \tilde{a}_{m_1,+}(n, \underline{t}_m) + 2\tilde{d}_{m_1,+}(n, \underline{t}_m) - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{m_1,+}, \\ \tilde{d}_{m_2,-}(n, \underline{t}_m) &= \tilde{a}_{m_2+1,-}(n, \underline{t}_m) + 2\tilde{d}_{m_2+1,-}(n, \underline{t}_m) + \tilde{\alpha}_{m_2+1,-} - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{m_2,-}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

и

$$\begin{aligned} \gamma(n, \underline{t}_m)_{\underline{t}_m} &= \left(\sqrt{1 + u(n, \underline{t}_m)v(n, \underline{t}_m)} \right)_{\underline{t}_m} = \gamma(n, \underline{t}_m) \triangle \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n, \underline{t}_m), \\ \pi(n, \underline{t}_m)_{\underline{t}_m} &= (1 + u^-(n, \underline{t}_m)v(n, \underline{t}_m))_{\underline{t}_m} = \pi(n, \underline{t}_m) \triangle \tilde{\delta}_{\underline{m}}^-(n, \underline{t}_m), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где мы ввели сокращения

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n, t_{\underline{m}}) &= \tilde{d}_{m_1+1,+}(n, t_{\underline{m}}) - \tilde{d}_{m_2,-}(n, t_{\underline{m}}), \\ \tilde{\delta}_{\underline{m}}(n, t_{\underline{m}}) &= v(n, t_{\underline{m}}) [\tilde{b}_{m_1,+}(n, t_{\underline{m}}) - \tilde{b}_{m_2+1,-}(n, t_{\underline{m}})] + \\ &\quad + \tilde{d}_{m_1+1,+}(n, t_{\underline{m}}) - \tilde{a}_{m_1,+}(n, t_{\underline{m}}) + \tilde{a}_{m_2+1,-}(n, t_{\underline{m}}) - \tilde{d}_{m_2,-}(n, t_{\underline{m}}).\end{aligned}\quad (5.13)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})_{t_{\underline{m}}} &= \sum_{j=n_0}^{n-1} \gamma(j, t_{\underline{m}})_{t_{\underline{m}}} \prod_{\substack{k=n_0, \\ k \neq j}}^{n-1} \gamma(k, t_{\underline{m}}) = \Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}}) [\tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n, t_{\underline{m}}) - \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, t_{\underline{m}})], \\ \Pi(n, n_0, t_{\underline{m}})_{t_{\underline{m}}} &= \sum_{j=n_0}^{n-1} \pi(j, t_{\underline{m}})_{t_{\underline{m}}} \prod_{\substack{k=n_0, \\ k \neq j}}^{n-1} \pi(k, t_{\underline{m}}) = \Pi(n, n_0, t_{\underline{m}}) [\tilde{\delta}_{\underline{m}}^-(n, t_{\underline{m}}) - \tilde{\delta}_{\underline{m}}^-(n_0, t_{\underline{m}})].\end{aligned}\quad (5.14)$$

Откуда следует, что

$$\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}}) = \Gamma(n, n_0, t_{0,\underline{m}}) \exp \left(\int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} [\tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n, s) - \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s)] ds \right), \quad (5.15)$$

$$\Pi(n, n_0, t_{\underline{m}}) = \Pi(n, n_0, t_{0,\underline{m}}) \exp \left(\int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} [\tilde{\delta}_{\underline{m}}^-(n, s) - \tilde{\delta}_{\underline{m}}^-(n_0, s)] ds \right). \quad (5.16)$$

ЛЕММА 4. *Предположим, что выполнена гипотеза 1 и что u, v удовлетворяют дискретной иерархии Чена-Ли-Лю (2.14). Кроме того, пусть $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_N \setminus \{P_{\infty,+}, P_{\infty,-}, P_{0,+}, P_{0,-}\}$, $(n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2$. Тогда компонента ψ_1 вектора Бейкера-Ахиезера ψ имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$\begin{aligned}\psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \exp \left(\pm \frac{1}{2} (t_{\underline{m}} - t_{0,\underline{m}}) \sum_{s=0}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \zeta^{-s} \right) (1 + O(\zeta)) \times \\ &\times \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})} \exp \left(- \int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s) ds \right) \zeta^{n_0-n} & \text{при } P \rightarrow P_{\infty,+}, \zeta = \lambda^{-1}, \\ \frac{u(n, t_{\underline{m}})}{u(n_0, t_{0,\underline{m}})} \Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}}) \exp \left(\int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s) ds \right) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty,-}, \zeta = \lambda^{-1}, \end{cases}\end{aligned}\quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}\psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \exp \left(\mp \frac{1}{2} (t_{\underline{m}} - t_{0,\underline{m}}) \sum_{s=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,+} \zeta^{-s} \right) (1 + O(\zeta)) \times \\ &\times \begin{cases} \exp \left(\int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} (\tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s) - \tilde{\delta}_{\underline{m}}(n_0, s)) ds \right) \frac{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})}{\Pi^+(n, n_0, t_{\underline{m}})} \zeta^{n-n_0} & \text{при } P \rightarrow P_{0,+}, \zeta = \lambda, \\ \exp \left(\int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} (\tilde{\delta}_{\underline{m}}^-(n_0, s) - \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s)) ds \right) \frac{u^-(n, t_{\underline{m}})}{u^-(n_0, t_{0,\underline{m}})} \frac{\Pi(n, n_0, t_{\underline{m}})}{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})} & \text{при } P \rightarrow P_{0,-}, \zeta = \lambda. \end{cases}\end{aligned}\quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем локальную координату $\zeta = \lambda^{-1}$ вблизи $P_{\infty, \pm}$ и локальную координату $\zeta = \lambda$ вблизи $P_{0, \pm}$. Учитывая (5.2) и (5.4), начнем с

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{\underline{m}}) = \\ = \frac{1}{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})} \begin{cases} \prod_{n'=n_0}^{n-1} (\lambda + u(n', t_{\underline{m}})v(n', t_{\underline{m}}) - u(n', t_{\underline{m}})\phi(P, n', t_{\underline{m}})), & n \geq n_0 + 1, \\ 1, & n = n_0, \\ \prod_{n'=n}^{n_0-1} (\lambda + u(n', t_{\underline{m}})v(n', t_{\underline{m}}) - u(n', t_{\underline{m}})\phi(P, n', t_{\underline{m}}))^{-1}, & n \leq n_0 - 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Используя (5.5) и (5.6), получаем

$$\lambda + uv - u\phi(P) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (1 + O(\zeta)) \begin{cases} \zeta^{-1} & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, +}, \\ \frac{u^+}{u} \gamma^2 & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, -}, \\ \frac{1}{\pi^+} \gamma^2 \zeta & \text{при } P \rightarrow P_{0, +}, \\ \frac{u}{u^-} \pi & \text{при } P \rightarrow P_{0, -}, \end{cases} \quad (5.20)$$

что доказывает (5.17) и (5.18) при $t_{0, \underline{m}} = t_{\underline{m}}$, т. е.

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{\underline{m}}) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\ \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (1 + O(\zeta)) \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})} \zeta^{n_0 - n} & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, +}, \\ \frac{u(n, t_{\underline{m}})}{u(n_0, t_{\underline{m}})} \Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}}) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty, -}, \end{cases} \quad \zeta = \lambda^{-1}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{\underline{m}}) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\ \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (1 + O(\zeta)) \begin{cases} \frac{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})}{\Pi^+(n, n_0, t_{\underline{m}})} \zeta^{n - n_0} & \text{при } P \rightarrow P_{0, +}, \\ \frac{u^-(n, t_{\underline{m}})}{u^-(n_0, t_{\underline{m}})} \frac{\Pi(n, n_0, t_{\underline{m}})}{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})} & \text{при } P \rightarrow P_{0, -}, \end{cases} \quad \zeta = \lambda. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Нам осталось исследовать

$$\psi_1(P, n_0, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0, \underline{m}}) = \exp \left[\int_{t_{0, \underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} (\tilde{G}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) - \tilde{F}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) \phi(P, n_0, s)) ds \right]. \quad (5.23)$$

Асимптотическое разложение подынтегрального выражения получим с помощью теоремы 1. Рассмотрим сначала однородные коэффициенты. При $P \rightarrow P_{\infty, \pm}$,

$\lambda = \zeta^{-1}$ имеем

$$\begin{aligned}\widehat{G}_{s,+} - \widehat{F}_{s,+}\phi &= \widehat{G}_{s,+} - \widehat{F}_{s,+} \frac{(\alpha_{0,+}/2)\lambda^{-N_2}y + G}{F} = \\ &= \widehat{G}_{s,+} - \widehat{F}_{s,+} \left(\frac{\lambda^{N_2}G}{\alpha_{0,+}y} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\lambda^{N_2}F}{\alpha_{0,+}y} \right)^{-1} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\ &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \pm \frac{1}{2}\zeta^{-s} - \widehat{d}_{s+1,+} + \frac{\widehat{g}_{0,+} \mp 1/2}{\widehat{f}_{1,+}} \widehat{f}_{s+1,+} + O(\zeta).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\widetilde{G}_{\underline{m}} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \sum_{s=0}^{m_1} \widetilde{\alpha}_{m_1-s,+} \widehat{G}_{s,+} + \widetilde{d}_{m_2,-} + O(\zeta), \quad \widetilde{F}_{\underline{m}} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \sum_{s=0}^{m_1} \widetilde{\alpha}_{m_1-s,+} \widehat{F}_{s,+} + O(\zeta),$$

из (5.5) и (5.13) получаем

$$\widetilde{G}_{\underline{m}} - \widetilde{F}_{\underline{m}}\phi \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_1} \widetilde{\alpha}_{m_1-s,+} \zeta^{-s} - \widetilde{\epsilon}_{\underline{m}} + O(\zeta), \quad P \rightarrow P_{\infty,+}. \quad (5.24)$$

Подстановка (5.24) в (5.23) доказывает (5.17) при $P \rightarrow P_{\infty,+}$.

При $P \rightarrow P_{\infty,-}$ нам потребуется еще один дополнительный член асимптотического разложения $\widetilde{F}_{\underline{m}}$, т. е. мы используем выражение

$$\widetilde{F}_{\underline{m}} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \sum_{s=0}^{m_1} \widetilde{\alpha}_{m_1-s,+} \widehat{F}_{s,+} + \widetilde{b}_{m_2,-} \zeta + O(\zeta^2).$$

Это дает

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{\underline{m}} - \widetilde{F}_{\underline{m}}\phi \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & -\frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_1} \widetilde{\alpha}_{m_1-s,+} \zeta^{-s} - \widetilde{\epsilon}_{\underline{m}} + \frac{1}{u} (\widetilde{b}_{m_1+1,+} - \widetilde{b}_{m_2,-}) + O(\zeta) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\ & \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_1} \widetilde{\alpha}_{m_1-s,+} \zeta^{-s} + \frac{u_{t_{\underline{m}}}}{u} + \widetilde{\epsilon}_{\underline{m}} + O(\zeta), \quad P \rightarrow P_{\infty,-},\end{aligned} \quad (5.25)$$

где мы использовали (2.14), (5.5) и (5.13). Подстановка (5.25) в (5.23) доказывает (5.17) при $P \rightarrow P_{\infty,-}$.

Снова применяя теорему 1, аналогично получаем при $P \rightarrow P_{0,\pm}$, $\lambda = \zeta$

$$\widehat{G}_{s,-} - \widehat{F}_{s,-}\phi \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \mp \frac{1}{2}\zeta^{-s} - \widehat{g}_{s,-} + \widehat{d}_{s,-} + \frac{\widehat{g}_{0,-} \pm 1/2}{\widehat{f}_{0,-}} \widehat{f}_{s,-} + O(\zeta).$$

Поскольку

$$\widetilde{G}_{\underline{m}} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \sum_{s=0}^{m_2} \widetilde{\alpha}_{m_2-s,-} \widehat{G}_{s,-} + \widetilde{a}_{m_1,+} + O(\zeta), \quad \widetilde{F}_{\underline{m}} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \sum_{s=0}^{m_2} \widetilde{\alpha}_{m_2-s,-} \widehat{F}_{s,-} + \widetilde{b}_{m_1,+} + O(\zeta),$$

из (3.13), (3.14) и (2.13) получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{\underline{m}} - \widetilde{F}_{\underline{m}}\phi \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & \mp \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_2} \widetilde{\alpha}_{m_2-s,-} \zeta^{-s} + \widetilde{a}_{m_1,+} - \widetilde{a}_{m_2+1,-} + \\ & + \frac{\widehat{g}_{0,-} \pm 1/2}{\widehat{f}_{0,-}} (\widetilde{b}_{m_2+1,-} - \widetilde{b}_{m_1,+}) + O(\zeta).\end{aligned}$$

Используя (5.6) и (5.11)–(5.13), при $P \rightarrow P_{0,+}$ получаем

$$\tilde{G}_{\underline{m}} - \tilde{F}_{\underline{m}}\phi \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \zeta^{-s} + \tilde{\epsilon}_{\underline{m}} - \tilde{\delta}_{\underline{m}} + O(\zeta), \quad (5.26)$$

а при $P \rightarrow P_{0,-}$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\underline{m}} - \tilde{F}_{\underline{m}}\phi \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \zeta^{-s} + \frac{u_{\underline{t}_{\underline{m}}}^-}{u^-} + \tilde{a}_{m_2+1,-} - \tilde{a}_{m_1,+} + 2\tilde{d}_{m_2+1,-} - 2\tilde{d}_{m_1,+} + \\ & + 2\tilde{d}_{m_1,+}^- - 2\tilde{d}_{m_2+1,-}^- + v^-(\tilde{b}_{m_1,+}^- - \tilde{b}_{m_2+1,-}^-) + O(\zeta) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\ \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \zeta^{-s} + \frac{u_{\underline{t}_{\underline{m}}}^-}{u^-} + \tilde{\delta}_{\underline{m}}^- - \tilde{\epsilon}_{\underline{m}} + O(\zeta). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Подстановка (5.26) и (5.27) в (5.23) доказывает (5.18) при $P \rightarrow P_{0,\pm}$. Лемма доказана.

Теперь получим представления для ϕ , ψ_1 , u и v в терминах тета-функции Римана. Пусть $\omega_{P_+,P_-}^{(3)}$ – нормальный дифференциал третьего типа, голоморфный на $\mathcal{K}_N \setminus \{P_+, P_-\}$, с простыми полюсами в $P_{\pm}$ и вычетами ± 1 соответственно; в частности, для $\omega_{P_1,P_{\infty,-}}^{(3)}$, $\omega_{P_{0,+},P_{\infty,+}}^{(3)}$ получаем

$$\begin{aligned} \omega_{P_1,P_{\infty,-}}^{(3)} &= \frac{y+y_1}{\lambda-1} \frac{d\lambda}{2y} + \frac{1}{2y} \prod_{j=1}^N (\lambda - \eta_j) d\lambda, & P_1 &= (1, y_1), \\ \omega_{P_{0,+},P_{\infty,+}}^{(3)} &= \frac{y+y_{0,+}}{\lambda} \frac{d\lambda}{2y} - \frac{1}{2y} \prod_{j=1}^N (\lambda - \beta_j) d\lambda, & P_{0,+} &= (0, y_{0,+}), \end{aligned} \quad (5.28)$$

где η_j , $\beta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, N$, – постоянные, определяемые выражениями

$$\int_{a_j} \omega_{P_1,P_{\infty,-}}^{(3)} = 0, \quad \int_{a_j} \omega_{P_{0,+},P_{\infty,+}}^{(3)} = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда из явного вида формул (5.28) следуют асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \int_{Q_0}^P \omega_{P_1,P_{\infty,-}}^{(3)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ln \zeta \end{Bmatrix} + \omega_1^{\infty,\pm} + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty,\pm}, \quad \zeta = \lambda^{-1}, \\ \int_{Q_0}^P \omega_{P_1,P_{\infty,-}}^{(3)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & \omega_1^{0,\pm} + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{0,\pm}, \quad \zeta = \lambda, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_0}^P \omega_{P_{0,+},P_{\infty,+}}^{(3)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & \begin{Bmatrix} -\ln \zeta \\ 0 \end{Bmatrix} + \omega_{0+}^{\infty,\pm} + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{\infty,\pm}, \quad \zeta = \lambda^{-1}, \\ \int_{Q_0}^P \omega_{P_{0,+},P_{\infty,+}}^{(3)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} & \begin{Bmatrix} \ln \zeta \\ 0 \end{Bmatrix} + \omega_{0+}^{0,\pm} + O(\zeta) & \text{при } P \rightarrow P_{0,\pm}, \quad \zeta = \lambda, \end{aligned} \quad (5.30)$$

для постоянных $\omega_1^{\infty,\pm}$, $\omega_1^{0,\pm}$, $\omega_{0+}^{\infty,\pm}$, $\omega_{0+}^{0,\pm} \in \mathbb{C}$.

Пусть $\omega_{P_{\infty,\pm},q}^{(2)}$ и $\omega_{P_{0,\pm},q}^{(2)}$ – нормированные дифференциалы второго рода, голоморфные, с единственными полюсами в $P_{\infty,\pm}$ и $P_{0,\pm}$ соответственно и главными частями

$$\omega_{P_{\infty,\pm},q}^{(2)} = (\zeta^{-2-q} + O(1)) d\zeta, \quad P \rightarrow P_{\infty,\pm}, \quad \zeta = \lambda^{-1}, \quad q \in N_0, \quad (5.31)$$

$$\omega_{P_{0,\pm},q}^{(2)} = (\zeta^{-2-q} + O(1)) d\zeta, \quad P \rightarrow P_{0,\pm}, \quad \zeta = \lambda, \quad q \in N_0, \quad (5.32)$$

с обращающимися в нуль а-периодами,

$$\int_{a_j} \omega_{P_{\infty,\pm},q}^{(2)} = \int_{a_j} \omega_{P_{0,\pm},q}^{(2)} = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Кроме того, определим

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m_1} s \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} (\omega_{P_{\infty,+},s-1}^{(2)} - \omega_{P_{\infty,-},s-1}^{(2)}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m_2} s \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} (\omega_{P_{0,+},s-1}^{(2)} - \omega_{P_{0,-},s-1}^{(2)}), \end{aligned} \quad (5.33)$$

где $\tilde{\alpha}_{s,\pm}$ – постоянные суммирования в $\tilde{F}_{\underline{m}}$, и введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty,\pm} = & \lim_{P \rightarrow P_{\infty,\pm}} \left(\int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{(2)} \pm \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_1} \tilde{\alpha}_{m_1-s,+} \zeta^{-s} \right), \\ \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{0,\pm} = & \lim_{P \rightarrow P_{0,\pm}} \left(\int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{(2)} \mp \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2-s,-} \zeta^{-s} \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что выполнена гипотеза 1 и что u, v удовлетворяют дискретной иерархии Чена–Ли–Лю (2.14). Кроме того, пусть $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_N \setminus \{P_{\infty,+}, P_{\infty,-}, P_{0,+}, P_{0,-}\}$, $(n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2$, и для каждого $(n, t_{\underline{m}}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ дивизоры $D_{\hat{\mu}(n, t_{\underline{m}})}$ и $D_{\hat{\nu}(n, t_{\underline{m}})}$ являются неспециальными [31]. Тогда*

$$\phi(P, n, t_{\underline{m}}) = N(n, t_{\underline{m}}) \frac{\theta(\lambda(P, \hat{\nu}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P, \hat{\mu}(n, t_{\underline{m}})))} \exp \left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_1, P_{\infty,-}}^{(3)} \right), \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) = & \frac{N(n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}})}{\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}})} \frac{\theta(\lambda(P, \hat{\mu}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P, \hat{\nu}(n_0, t_{0,\underline{m}})))} \times \\ & \times \exp \left((n - n_0) \int_{Q_0}^P \omega_{P_{0,+}, P_{\infty,+}}^{(3)} - (t_{\underline{m}} - t_{0,\underline{m}}) \int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (5.36)$$

где

$$\begin{aligned} N(n, t_{\underline{m}}) = & \frac{\Gamma^2(n, n_0, t_{\underline{m}})}{u(n_0, t_{0,\underline{m}})} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty,+}, \hat{\mu}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty,+}, \hat{\nu}(n_0, t_{0,\underline{m}})))} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty,-}, \hat{\mu}(n_0, t_{0,\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty,-}, \hat{\nu}(n, t_{\underline{m}})))} \times \\ & \times \exp \left((n - n_0) (\omega_{0+}^{\infty,+} - \omega_{0+}^{\infty,-}) - \omega_1^{\infty,-} + \right. \\ & \left. + (t_{\underline{m}} - t_{0,\underline{m}}) (\tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty,-} - \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty,+}) + 2 \int_{t_{0,\underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s) ds \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$N(n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0, \underline{m}}) = \frac{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{0, \underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} \times \\ \times \exp\left(-(n - n_0)\omega_{0+}^{\infty, +} + (t_{\underline{m}} - t_{0, \underline{m}})\tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty, +} - \int_{t_{0, \underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s) ds\right), \quad (5.38)$$

$$\Gamma(n, n_0, t_{\underline{m}}) = \left[\frac{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty, -}, \hat{\underline{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty, -}, \hat{\underline{\nu}}(n_0, t_{\underline{m}})))}\right]^{1/2} \times \\ \times \exp \frac{(n - n_0)(\omega_1^{0, +} - \omega_1^{\infty, +} + \omega_{0, +}^{\infty, -} - \omega_{0, +}^{\infty, +})}{2}. \quad (5.39)$$

Отображение Абеля линейризует вспомогательные дивизоры $D_{\hat{\underline{\mu}}(n, t_{\underline{m}})}$ и $D_{\hat{\underline{\nu}}(n, t_{\underline{m}})}$ в том смысле, что

$$\underline{\rho}^{(1)}(n, t_{\underline{m}}) = \underline{\rho}^{(1)}(n_0, t_{0, \underline{m}}) + (n - n_0)(\mathcal{A}(P_{\infty, +}) - \mathcal{A}(P_{0, +})) + \underline{\mathbf{Y}}^{(m)}(t_{\underline{m}} - t_{0, \underline{m}}), \\ \underline{\rho}^{(2)}(n, t_{\underline{m}}) = \underline{\rho}^{(2)}(n_0, t_{0, \underline{m}}) + (n - n_0)(\mathcal{A}(P_{\infty, +}) - \mathcal{A}(P_{0, +})) + \underline{\mathbf{Y}}^{(m)}(t_{\underline{m}} - t_{0, \underline{m}}), \quad (5.40)$$

где $0 \leq m_1 \leq N_1$, $0 \leq m_2 \leq N_2$. Потенциалы $u(n, t_{\underline{m}})$, $v(n, t_{\underline{m}})$ имеют вид

$$u(n, t_{\underline{m}}) = \frac{u(n_0, t_{0, \underline{m}})}{\Gamma^2(n, n_0, t_{\underline{m}})} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{0, \underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty, -}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty, -}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{0, \underline{m}})))} \times \\ \times \exp\left((n - n_0)(\omega_{0+}^{\infty, -} - \omega_{0+}^{\infty, +}) + (t_{\underline{m}} - t_{0, \underline{m}})(\tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty, +} - \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty, -}) - \right. \\ \left. - 2 \int_{t_{0, \underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s) ds\right), \quad (5.41)$$

$$v(n, t_{\underline{m}}) = \exp(\omega_1^{0, +} - \omega_1^{\infty, -} + (n - n_0)(\omega_{0+}^{\infty, +} - \omega_{0+}^{\infty, -})) \times \\ \times \exp\left((t_{\underline{m}} - t_{0, \underline{m}})(\tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty, -} - \tilde{\Omega}_{\underline{m}}^{\infty, +}) + 2 \int_{t_{0, \underline{m}}}^{t_{\underline{m}}} \tilde{\epsilon}_{\underline{m}}(n_0, s) ds\right) \times \\ \times \frac{\Gamma^2(n, n_0, t_{\underline{m}})}{u(n_0, t_{0, \underline{m}})} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty, +}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{0, \underline{m}})))} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty, -}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{0, \underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{\infty, -}, \hat{\underline{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))} \times \\ \times \frac{\theta(\lambda(P_{0, +}, \hat{\underline{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\lambda(P_{0, +}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))}. \quad (5.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Римана об обращении в нуль [31], [32], определению и асимптотическим свойствам мероморфной функции ϕ она имеет вид (5.35), где $N(n, t_{\underline{m}})$ не зависит от $P \in \mathcal{K}_N$.

Для доказательства (5.36) обозначим ее правую часть как $\tilde{\psi}_1$. Сначала вычислим дивизор ψ_1 . Начнем с (5.19). Используя (3.24), (3.3), (3.16) и (4.8), получаем

$$\lambda + uv - u\phi(P) = \lambda + uv - u \frac{(\alpha_{0, +}/2)\lambda^{-N_2}y + G}{F} = \\ = \frac{F^+ - u((\alpha_{0, +}/2)\lambda^{-N_2}y - G^+)}{F} = \frac{F^+}{F} - u \frac{(\alpha_{0, +}/2)^2\lambda^{-2N_2}y^2 - (G^+)^2}{F[(\alpha_{0, +}/2)\lambda^{-N_2}y + G^+]} = \\ = \frac{F^+}{F} \left(1 - \frac{u(1 - \lambda)H^+}{(\alpha_{0, +}/2)\lambda^{-N_2}y + G^+}\right) \underset{P \rightarrow \hat{\mu}_j}{=} \frac{F^+(P)}{F(P)} O(1) \quad (5.43)$$

при $O(1) \neq 0$. Тогда получаем

$$(\psi_1(\cdot, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{\underline{m}})) = D_{\hat{\mu}(n, t_{\underline{m}})} - D_{\hat{\mu}(n_0, t_{\underline{m}})} + (n - n_0)(D_{P_{0,+}} - D_{P_{\infty,+}}). \quad (5.44)$$

Для вычисления дивизора функции $\psi_1(P, n_0, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}})$ нам нужно разложить подынтегральное выражение из (5.23) вблизи его особенностей (нули $\mu_j(n_0, s)$ функции $F(\lambda, n_0, s)$). Получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) - \tilde{F}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) \phi(P, n_0, s) &= \\ &= \tilde{G}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) - \tilde{F}_{\underline{m}}(\lambda, n_0, s) \frac{(\alpha_{0,+}/2)\lambda^{-N_2}y + G(\lambda, n_0, s)}{F(\lambda, n_0, s)} \Big|_{P \rightarrow \hat{\mu}_j(n_0, s)} = \\ &= \frac{-\tilde{F}_{\underline{m}}(\mu_j(n_0, s), n_0, s)y(\hat{\mu}_j(n_0, s))}{u(n_0, s)(\lambda - \mu_j(n_0, s)) \prod_{i \neq j}^N (\mu_j(n_0, s) - \mu_i(n_0, s))} + O(1) \Big|_{P \rightarrow \hat{\mu}_j(n_0, s)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \ln(\mu_j(n_0, s) - \lambda) + O(1), \end{aligned} \quad (5.45)$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n_0, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}) &= \\ &= \begin{cases} (\mu_j(n_0, t_{\underline{m}}) - \lambda)O(1) & \text{при } P \rightarrow \hat{\mu}_j(n_0, t_{\underline{m}}) \neq \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,\underline{m}}), \\ O(1) & \text{при } P \rightarrow \hat{\mu}_j(n_0, t_{\underline{m}}) = \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,\underline{m}}), \\ (\mu_j(n_0, t_{0,\underline{m}}) - \lambda)^{-1}O(1) & \text{при } P \rightarrow \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,\underline{m}}) \neq \hat{\mu}_j(n_0, t_{\underline{m}}), \end{cases} \end{aligned}$$

при $O(1) \neq 0$. Отсюда получаем

$$(\psi_1(\cdot, n_0, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}})) = D_{\hat{\mu}(n_0, t_{\underline{m}})} - D_{\hat{\mu}(n_0, t_{0,\underline{m}})}. \quad (5.46)$$

Из (5.4), (5.44) и (5.46) получаем, что дивизор (ψ_1) функции ψ_1 имеет вид

$$(\psi_1(\cdot, n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}})) = D_{\hat{\mu}(n, t_{\underline{m}})} - D_{\hat{\mu}(n_0, t_{0,\underline{m}})} + (n - n_0)(D_{P_{0,+}} - D_{P_{\infty,+}}). \quad (5.47)$$

Таким образом, можно заключить, что ψ_1 имеет следующие свойства:

- 1) N простых нулей при $\hat{\mu}_k(n, t_{\underline{m}})$, $k = 1, \dots, N$, и нуль $(n - n_0)$ -го порядка в $P_{0,+}$;
- 2) N простых полюсов при $\hat{\mu}_k(n_0, t_{0,\underline{m}})$, $k = 1, \dots, N$, и полюс $(n - n_0)$ -го порядка в $P_{\infty,+}$.

Кроме того, из выражений (5.30)–(5.34) и выражения для $\tilde{\psi}_1$ мы знаем, что $\tilde{\psi}_1$ и ψ_1 локально демонстрируют одинаковое поведение и имеют одинаковые существенные особенности при $P_{\infty,\pm}$ и $P_{0,\pm}$. Тогда согласно теореме единственности Римана–Роха ψ_1 и $\tilde{\psi}_1$ совпадают с точностью до мультипликативной постоянной (которая может зависеть от $n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}}$), т. е. функция ψ_1 должна иметь вид (5.36).

Применяя теорему Абеля к (5.44), получаем

$$\underline{\rho}^{(1)}(n, t_{\underline{m}}) = \underline{\rho}^{(1)}(n_0, t_{\underline{m}}) + (n - n_0)(\mathcal{A}(P_{\infty,+}) - \mathcal{A}(P_{0,+})). \quad (5.48)$$

С другой стороны, согласно теореме 3 получаем

$$\underline{\rho}^{(1)}(n_0, t_{\underline{m}}) = \underline{\rho}^{(1)}(n_0, t_{0,\underline{m}}) + \mathbf{Y}^{(m)}(t_{\underline{m}} - t_{0,\underline{m}}), \quad (5.49)$$

тогда выполнено первое из выражений (5.40). Аналогично можно доказать второе из выражений (5.40). Точнее,

$$\underline{\rho}^{(i)}(n+1, t_{\underline{m}}) = \underline{\rho}^{(i)}(n, t_{\underline{m}}) + \mathcal{A}(P_{\infty,+}) - \mathcal{A}(P_{0,+}), \quad i = 1, 2. \quad (5.50)$$

Поскольку $\mathcal{A}(P_{0,-}) = -\mathcal{A}(P_{0,+})$, $\mathcal{A}(P_{\infty,-}) = -\mathcal{A}(P_{\infty,+})$, имеем

$$\begin{aligned} \theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,+}, \underline{\hat{\mu}}^+(n, t_{\underline{m}}))) &= \theta(\underline{\lambda} - \mathcal{A}(P_{\infty,+}) + \underline{\rho}^{(1)}(n+1, t_{\underline{m}})) = \\ &= \theta(\underline{\lambda} - \mathcal{A}(P_{\infty,+}) + \underline{\rho}^{(1)}(n, t_{\underline{m}}) + \mathcal{A}(P_{\infty,+}) - \mathcal{A}(P_{0,+})) = \theta(\underline{\lambda}(P_{0,+}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}}))), \\ \theta(\underline{\lambda}(P_{0,-}, \underline{\hat{\mu}}^+(n, t_{\underline{m}}))) &= \theta(\underline{\lambda} - \mathcal{A}(P_{0,-}) + \underline{\rho}^{(1)}(n+1, t_{\underline{m}})) = \\ &= \theta(\underline{\lambda} - \mathcal{A}(P_{0,-}) + \underline{\rho}^{(1)}(n, t_{\underline{m}}) - \mathcal{A}(P_{\infty,-}) + \mathcal{A}(P_{0,-})) = \theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}}))). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,+}, \underline{\hat{\nu}}^+(n, t_{\underline{m}}))) &= \theta(\underline{\lambda}(P_{0,+}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}}))), \\ \theta(\underline{\lambda}(P_{0,-}, \underline{\hat{\nu}}^+(n, t_{\underline{m}}))) &= \theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}}))). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Подставляя (5.29) в (5.35) и сравнивая с (5.5) и (5.6), получаем

$$v^-(n, t_{\underline{m}}) = N(n, t_{\underline{m}}) \frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,+}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,+}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} e^{\omega_1^{\infty,+}}, \quad (5.53)$$

$$\frac{1}{u(n, t_{\underline{m}})} = N(n, t_{\underline{m}}) \frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} e^{\omega_1^{\infty,-}}, \quad (5.54)$$

$$v(n, t_{\underline{m}}) = N(n, t_{\underline{m}}) \frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{0,+}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{0,+}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} e^{\omega_1^{0,+}}, \quad (5.55)$$

$$-\frac{1}{u^-(n, t_{\underline{m}})} = N(n, t_{\underline{m}}) \frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{0,-}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{0,-}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} e^{\omega_1^{0,-}}. \quad (5.56)$$

Из уравнений (5.53)–(5.56) следует, что

$$\frac{N^+(n, t_{\underline{m}})}{N(n, t_{\underline{m}})} = -e^{\omega_1^{\infty,-} - \omega_1^{0,-}} = e^{\omega_1^{0,+} - \omega_1^{\infty,+}}, \quad (5.57)$$

$$\frac{u^+(n, t_{\underline{m}})}{u(n, t_{\underline{m}})} = -\frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\mu}}^+(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\nu}}^+(n, t_{\underline{m}})))} \frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))} e^{\omega_1^{0,-} - \omega_1^{\infty,-}}, \quad (5.58)$$

поэтому

$$\frac{u(n, t_{\underline{m}})}{u(n_0, t_{\underline{m}})} = \frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\mu}}(n, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\mu}}(n_0, t_{\underline{m}})))} \frac{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\nu}}(n_0, t_{\underline{m}})))}{\theta(\underline{\lambda}(P_{\infty,-}, \underline{\hat{\nu}}(n, t_{\underline{m}})))} e^{(n-n_0)(\omega_1^{\infty,+} - \omega_1^{0,+})}. \quad (5.59)$$

Чтобы найти постоянную $N(n, n_0, t_{\underline{m}}, t_{0,\underline{m}})$, сравним асимптотические разложения ψ_1 при $P \rightarrow P_{\infty,+}$ в (5.17) и (5.36), откуда получим (5.38).

Сравнивая асимптотические разложения ψ_1 при $P \rightarrow P_{\infty,-}$ из (5.17) и (5.36) и подставляя результат (5.38) для $N(n, n_0, t_m, t_{0,m})$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{u(n, t_m)}{u(n_0, t_{0,m})} \Gamma^2(n, n_0, t_m) &= \frac{\theta(\lambda(P_{\infty,+}, \hat{\mu}(n_0, t_{0,m})))}{\theta(\lambda(P_{\infty,+}, \hat{\mu}(n, t_m)))} \frac{\theta(\lambda(P_{\infty,-}, \hat{\mu}(n, t_m)))}{\theta(\lambda(P_{\infty,-}, \hat{\mu}(n_0, t_{0,m})))} \times \\ &\times \exp \left((n - n_0)(\omega_{0+}^{\infty,-} - \omega_{0+}^{\infty,+}) + (t_m - t_{0,m})(\tilde{\Omega}_m^{\infty,+} - \tilde{\Omega}_m^{\infty,-}) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{t_{0,m}}^{t_m} \tilde{\epsilon}_m(n_0, s) ds \right), \end{aligned} \quad (5.60)$$

откуда следует (5.41). Подставляя (5.41) для $u(n, t_m)$ в (5.54), получаем $N(n, t_m)$, а затем, используя (5.55), получаем $v(n, t_m)$.

Наконец, при $t_{0,m} = t_m$ из (5.60) и (5.59) получаем (5.39) для $\Gamma(n, n_0, t_m)$. Теорема доказана.

Из формул (5.8) и (5.9) понятно, по какой причине в нашей работе мы предполагаем выполненным условие $u(n-1, t_m)v(n, t_m) \neq \{0, -1\}$ для всех $(n, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Более того, из представлений тета-функции (5.41), (5.42) для u, v и из представления для Γ (5.39) следует также, что $\gamma(n, t_m) \neq \{0, 1\}$ для всех $(n, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, и поэтому гипотеза 1 выполнена для алгебро-геометрических дискретных решений Чена–Ли–Лю, которые обсуждаются в настоящей работе, при условии, что соответствующие дивизоры $D_{\hat{\mu}(n, t_m)}$ и $D_{\hat{\nu}(n, t_m)}$ не содержат исключительных точек $P_{\infty, \pm}$, $P_{0, \pm}$ при всех $(n, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке National Natural Science Foundation of China (проекты № 11331008, 11171312, 11001250).

Список литературы

- [1] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **35**:1 (1973), 289–294.
- [2] H. Flaschka, *Prog. Theoret. Phys.*, **51**:3 (1974), 703–716.
- [3] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, *J. Math. Phys.*, **16**:3 (1975), 598–603.
- [4] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, *J. Math. Phys.*, **17**:6 (1975), 1011–1018.
- [5] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, *Stud. Appl. Math.*, **55**:3 (1976), 213–229.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [7] T. Tsuchida, *J. Phys. A*, **35**:36 (2002), 7827–7847, arXiv: nlin/0105053.
- [8] H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu, *Phys. Scripta*, **20**:3–4 (1979), 490–492.
- [9] E. Date, S. Tanaka, *Prog. Theoret. Phys.*, **55**:2 (1976), 457–465.
- [10] Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко, *ТМФ*, **50**:1 (1982), 118–126.
- [11] Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, *Докл. АН СССР*, **262**:5 (1982), 1103–1108.
- [12] S. Ahmad, A. R. Chowdhury, *J. Math. Phys.*, **28**:1 (1987), 134–137.
- [13] S. J. Alber, *Lett. Math. Phys.*, **17**:2 (1989), 149–155.
- [14] P. D. Miller, N. M. Ercolani, I. M. Krichever, C. D. Levermore, *Commun. Pure Appl. Math.*, **48**:12 (1995), 1369–1440.
- [15] V. E. Vekslerchik, *J. Phys. A*, **32**:26 (1999), 4983–4994.
- [16] W. Bulla, F. Gesztesy, H. Holden, G. Teschl, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **135**:641 (1998), 1–79.

- [17] X. G. Geng, H. H. Dai, C. W. Cao, *J. Math. Phys.*, **44**:10 (2003), 4573–4588.
- [18] J. S. Geronimo, F. Gesztesy, H. Holden, *Commun. Math. Phys.*, **258**:1 (2005), 149–177.
- [19] C. W. Cao, X. G. Geng, H. Y. Wang, *J. Math. Phys.*, **43**:1 (2002), 621–643.
- [20] X. G. Geng, H. H. Dai, J. Y. Zhu, *Stud. Appl. Math.*, **118**:3 (2007), 281–312.
- [21] И. М. Кричевер, *Докл. АН СССР*, **227**:2 (1976), 291–294.
- [22] Б. А. Дубровин, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 41–51.
- [23] Б. А. Дубровин, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 11–80.
- [24] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer, Berlin, 1994.
- [25] E. Date, S. Tanaka, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **59** (1976), 107–125.
- [26] Y. C. Ma, J. M. Ablowitz, *Stud. Appl. Math.*, **65**:2 (1981), 113–158.
- [27] F. Gesztesy, R. Ratneseelan, *Rev. Math. Phys.*, **10**:3 (1998), 345–391.
- [28] M. S. Alber, Y. N. Fedorov, *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 1017–1042.
- [29] C. W. Cao, Y. T. Wu, X. G. Geng, *J. Math. Phys.*, **40**:8 (1999), 3948–3970.
- [30] X. G. Geng, C. W. Cao, *Nonlinearity*, **14**:6 (2001), 1433–1452.
- [31] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1994.
- [32] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, v. II: *Jacobian Theta Functions and Differential Equations*, Progress in Mathematics, **43**, Birkhäuser, Boston, 1984.

Поступила в редакцию 2.07.2013,
после доработки 20.12.2013