Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Яремчук, О преобразовании Клебша уравнений гидродинамики, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 1, 77–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:23:31

© 1998 г.

А. И. Яремчук*

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ КЛЕБША УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Установлены геометрический смысл преобразования Клебша уравнений гидродинамики идеальной жидкости и его связь с приведением дифференциальных 1-форм к нормальной форме Дарбу. Дано описание кинематических законов сохранения. В качестве частного примера рассмотрен известный закон сохранения числа квазичастиц.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Клебш предложил преобразование уравнений гидродинамики идеальной жидкости, приводящее их к канонической гамильтоновой форме (см. также [2]). Для этой цели были введены скалярные поля, известные теперь как переменные Клебша, которые подчиняются каноническим коммутационным соотношениям и полностью определяют эйлерово поле скорости жидкости. В современных работах (см., например, [3, 4]) переменные Клебша интенсивно использовались для исследования гидродинамической турбулентности. Сама возможность записать уравнения гидродинамики в канонической гамильтоновой форме позволила установить аналогию с теорией слабой волновой турбулентности и, в частности, выделить законы сохранения, аналогичные законам сохранения полного числа волн и импульса волн. Однако физический смысл этих законов оставался неясен, и не было понятно, как интерпретировать сохраняющиеся величины в терминах физически наблюдаемых полей [4]. Также оставался неясным вопрос о возможности обобщить утверждения о характере движения жидкости, полученные с помощью преобразования Клебша, на те классы течений, которые не могут быть описаны переменными Клебша.

В данной работе на основе аналогии [5] между уравнением Эйлера движения твердого тела и уравнением идеальной жидкости мы укажем геометрический смысл переменных Клебша и опишем кинематические инварианты, которые порождают сохраняющиеся величины при любой зависимости энергии жидкости от плотности массы и импульса.

В разделе 2 приводятся известные сведения о правоинвариантных механических системах на группах Ли. В разделе 3 модель гидродинамики идеальной баротропной жидкости описана как правоинвариантная механическая система на некотором расширении группы диффеоморфизмов физического пространства и рассмотрены кинематические

* Акустический институт им. Н. Н. Андреева, Москва, Россия

инварианты. В разделе 4 рассматривается принцип наименьшего действия, вводятся переменные Клебша и делаются некоторые обобщения.

2. ПРАВОИНВАРИАНТНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ГРУППАХ ЛИ

Нас будут интересовать гамильтоновы механические системы, фазовым пространством которых является кокасательное расслоение $T^*\mathbb{G}$ к группе Ли $\mathbb{G}$, а гамильтониан инвариантен относительно правых сдвигов на элементы группы $\mathbb{G}$. Расслоение $T^*\mathbb{G}$ параллелизуемо и может быть отождествлено с прямым произведением $\mathcal{G}^* \times \mathbb{G}$, где $\mathcal{G}^*$ обозначает пространство, дуальное к алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы $\mathbb{G}$. Указанное отождествление может быть сделано различными способами, простейшие из которых – это использовать правые и левые сдвиги. Полученные таким образом координаты на $T^*\mathbb{G}$ мы будем различать с помощью индексов R и L , считая, что $(\tau_R, G) \in \mathcal{G}^* \times \mathbb{G}$ и $(\tau_L, G) \in \mathcal{G}^* \times \mathbb{G}$ соответствуют одной и той же точке фазового пространства, лежащей над точкой G , и связаны соотношением

$$\tau_L = \text{Ad}^*(G) \tau_R, \quad (1)$$

где Ad^* обозначает коприсоединенное представление группы $\mathbb{G}$ в $\mathcal{G}^*$. В координатах (τ_R, G) действие $\mathbb{G}$ на $T^*\mathbb{G}$ правыми и левыми сдвигами задается соответственно формулами

$$\mathbb{G} \ni H: (\tau_R, G) \mapsto (\tau_R, GH), \quad (2)$$

$$\mathbb{G} \ni H: (\tau_R, G) \mapsto (\text{Ad}^*(H^{-1}) \tau_R, HG). \quad (3)$$

Траектории правоинвариантной механической системы являются экстремальными функционала действия

$$\mathcal{S} = \int dt \left\{ \langle \tau_R | \dot{G} G^{-1} \rangle - \mathcal{H}[\tau_R] \right\}, \quad (4)$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ может зависеть в соответствии с (2) только от импульса τ_R , но не от G . Угловые скобки обозначают спаривание между $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$, и закон умножения в $\mathbb{G}$ записан мультипликативно.

Экстремальные траектории удовлетворяют вариационным уравнениям Эйлера

$$\dot{G} G^{-1} = \mathcal{H}'[\tau_R], \quad (5)$$

$$\dot{\tau}_R + \text{ad}^*(\mathcal{H}'[\tau_R]) \tau_R = 0. \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{H}'$ обозначает дифференциал гамильтониана, а ad^* – коприсоединенное действие алгебры Ли $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^*$. Уравнения гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости в эйлеровых переменных имеют [5] в точности форму (6), а уравнения (5) связывают скорость изменения лагранжевых координат частиц жидкости с эйлеровым полем скорости.

В переменных (τ_L, G) действие (4) имеет вид

$$\mathcal{S} = \int dt \left\{ \langle \tau_L, G^{-1} \dot{G} \rangle - \mathcal{H}[\text{Ad}^*(G^{-1}) \tau_L] \right\}, \quad (7)$$

а уравнения движения выглядят так:

$$\dot{G}G^{-1} = \mathcal{H}'[\text{Ad}^*(G^{-1})\tau_L], \quad (8)$$

$$\dot{\tau}_L = 0. \quad (9)$$

В данном случае импульс сохраняется, и нетривиально только уравнение (8) в конфигурационном пространстве системы, т.е. на группе $\mathbb{G}$.

С точки зрения гамильтоновой механики правоинвариантные системы описываются в терминах орбит коприсоединенного действия и скобки Березина–Кириллова [5].

3. ГИДРОДИНАМИКА БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Для простоты мы рассмотрим изэнтропические [6] течения идеальной жидкости (такие жидкости также называют [7] баротропными, т.к. их внутренняя энергия зависит только от плотности) на замкнутом (компактном, без границ) n -мерном римановом многообразии X в отсутствие сил Кориолиса. Обозначим через $d\mu$, $\mathbf{v}$ и ϱ соответственно меру объема, эйлерову скорость и плотность жидкости. Кроме векторного поля $\mathbf{v}$, удобно использовать двойственное ковекторное поле $\mathbf{u}$. В локальных координатах x^i мы полагаем $u_i = g_{ik}v^k$, где $\mathbf{v} = v^i\partial/\partial x^i$, $\mathbf{u} = u_i dx^i$, а $g_{ik} dx^i \otimes dx^k$ обозначает метрический тензор.

Уравнения движения в эйлеровых переменных суть [2, 6]

$$\dot{\varrho} d\mu + L_{\mathbf{v}}(\varrho d\mu) = 0, \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{u}} + L_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + d(w - |\mathbf{u}|^2/2) = 0, \quad (11)$$

где $L_{\mathbf{v}}$ обозначает производную Ли, соответствующую векторному полю $\mathbf{v}$, а $w(\varrho)$ есть энтальпия единицы массы жидкости, связанная с плотностью ϱ и внутренней энергией соотношением

$$w = \frac{d}{d\varrho} \varrho \varepsilon(\varrho).$$

Подобно течениям идеальной однородной несжимаемой жидкости (см. [5]) наши течения также могут быть описаны как движения правоинвариантной механической системы на некоторой бесконечномерной группе $\mathbb{G}$, а уравнения (10), (11) будут соответствовать уравнениям (6). В данном случае группа $\mathbb{G}$ является расширением группы $\text{Diff}(X)$ диффеоморфизмов многообразия X с помощью абелевой группы калибровочных преобразований детерминантного расслоения $\Lambda^n T^*X$, сечениями которого являются внешние дифференциальные формы степени n (напомним, что n – размерность пространства X). Детерминантное расслоение в случае риманова многообразия тривиально, поэтому мы можем отождествить группу калибровочных преобразований с мультипликативной группой строго положительных скалярных функций. Такие функции удобно представить в виде $\exp[a(x)]$, а групповой закон записывать аддитивно.

Всюду ниже мы будем обозначать через g произвольный диффеоморфизм пространства X , а через h – обратное отображение:

$$g(h(x)) = x, \quad h(g(x)) = x.$$

Алгебра Ли группы $\text{Diff}(X)$ может быть реализована векторными полями на X , при этом операция коммутирования векторных полей [8] будет (с точностью до знака) совпадать с операцией коммутирования в алгебре Ли [5].

Определив билинейную операцию спаривания векторного $\mathbf{v}$ и ковекторного τ полей соотношением

$$\langle \tau | \mathbf{v} \rangle = \int_X d\mu \langle \tau, \mathbf{v} \rangle,$$

мы можем отождествить пространство ковекторных полей с пространством, двойственным алгебре Ли группы $\text{Diff}(X)$. Легко видеть, что присоединенное (коприсоединенное) действие группы $\text{Diff}(X)$ на пространстве векторных (ковекторных) полей совпадает с законом преобразования тензоров:

$$\text{Ad}(g): \mathbf{v} \longmapsto g_* \mathbf{v}, \quad \text{Ad}^*(g): \tau \longmapsto g^* \tau.$$

Теперь мы можем описать конфигурационное пространство $\mathbb{G}$. Оно образовано всевозможными парами (a, g) , где a — скалярная функция, а g — диффеоморфизм. Закон умножения определяется соотношением

$$(a, g) \cdot (a', g') = (a + h^* a', g \circ g'),$$

так что $\mathbb{G}$ есть просто полупрямое произведение группы $\text{Diff}(X)$ и аддитивной абелевой группы скалярных функций. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ группы $\mathbb{G}$ состоит из пар $|\alpha, \mathbf{v}\rangle$, образованных скалярными функциями α и векторными полями $\mathbf{v}$, и снабжена следующим коммутатором:

$$[|\alpha, \mathbf{v}\rangle, |\alpha', \mathbf{v}'\rangle] = |L_{\mathbf{v}'} \alpha - L_{\mathbf{v}} \alpha', -L_{\mathbf{v}} \mathbf{v}'\rangle.$$

На связь этой алгебры с гидродинамикой было указано в [9].

Сопряженное пространство $\mathcal{G}^*$ может быть реализовано как совокупность пар $\langle \varrho, \tau |$, если мы определим двойственность соотношением

$$\langle \varrho, \tau | \alpha, \mathbf{v} \rangle = \int_X d\mu \{ \varrho \alpha + \langle \tau, \mathbf{v} \rangle \}, \quad (12)$$

здесь ϱ и τ обозначают соответственно скаляр и ковектор.

Нетрудно видеть, что действие алгебры Ли в коприсоединенном представлении описывается формулой

$$\text{ad}^*(\alpha, \mathbf{v}): \langle \varrho, \tau | \longmapsto \left\langle \frac{L_{\mathbf{v}} d\mu}{d\mu} \varrho + L_{\mathbf{v}} \varrho, \frac{L_{\mathbf{v}} d\mu}{d\mu} \tau + L_{\mathbf{v}} \tau + \varrho d\alpha \right|$$

и что имеет место соотношение

$$\left(\frac{d}{dt}(a, g) \right) \cdot (a, g)^{-1} = |\dot{a} + L_{\mathbf{v}} a, \mathbf{v}\rangle,$$

где $\mathbf{v}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{g}(h(x))$. С помощью этих формул легко проверить, что уравнения Эйлера (6) примут вид (10), (11), если использовать гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int_X d\mu \left\{ \frac{|\tau|^2}{2\varrho} + \varrho \varepsilon(\varrho) \right\}, \quad (13)$$

положить $\tau_R = \langle \varrho, \boldsymbol{\tau} |$ и учесть вытекающую из уравнений (5) связь $\boldsymbol{\tau} = \varrho \mathbf{u}$ между плотностью импульса и скоростью жидкости. Гамильтониан (13) совпадает с полной энергией жидкости [6, 7]. Таким образом, эйлеровы плотности массы и импульса суть координаты τ_R на фазовом пространстве $T^*\mathbb{G}$, получающиеся с помощью правого сдвига. Согласно формуле (9) координаты τ_L , получающиеся с помощью левого сдвига, являются интегралами движения и имеют смысл начальных значений переменных τ_R .

Если за некоторое время течение жидкости осуществило диффеоморфизм g пространства X и калибровочное преобразование $\exp[a]$ детерминантного расслоения, т.е. если система перешла согласно уравнениям (8) из единицы группы $\mathbb{G}$ в точку $G = (a, g)$, то обобщенный импульс $\tau_R = \langle \varrho, \boldsymbol{\tau} |$ будет связан со своим начальным значением $\tau_L = \langle \varrho_0, \boldsymbol{\tau}_0 |$ уравнением (1):

$$\varrho = \left(\frac{h^* d\mu}{d\mu} \right) (h^* \varrho_0), \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{h^* d\mu}{d\mu} \right) (h^* \boldsymbol{\tau}_0 - (h^* \varrho_0) da). \quad (15)$$

Вследствие соотношений $\boldsymbol{\tau} = \varrho \mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\tau}_0 = \varrho_0 \mathbf{u}_0$ мы получаем закон эволюции скорости

$$\mathbf{u} = h^* \mathbf{u}_0 - da, \quad (16)$$

известный как преобразование Вебера [2]. Отметим, что (14), (15) будут иметь место и при любой иной, отличной от (13), зависимости гамильтониана от ϱ и $\boldsymbol{\tau}$.

Рассмотрим теперь совокупность $\{g_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ преобразований пространства X , осуществляемых течением жидкости, считая, что моменту времени $t = 0$ соответствует тождественное преобразование. По аналогии с понятием интегрального инварианта [5] мы будем называть относительным кинематическим инвариантом потока $\{g_t\}$ дифференциальную форму ω , если она является алгебраической функцией локальных физических полей и ее эволюция во времени определяется законом

$$\omega = (h_t)^* \omega_0, \quad (17)$$

где равенство следует понимать по модулю точных форм, а ω_0 — как начальное значение инварианта ω . Если в (17) имеет место точное равенство, то говорят, что инвариант ω абсолютный, или “вморожен” в жидкость.

На основе формул (14)–(16) мы заключаем, что плотность $\varrho d\mu$ и завихренность $d\mathbf{u}$ являются абсолютными кинематическими инвариантами для уравнений гидродинамики баротропной жидкости. Утверждение о вмороженности завихренности в жидкость известно как теорема Томсона. В трехмерном случае имеется дополнительный относительный кинематический инвариант — гиротропия $\mathbf{u} \wedge d\mathbf{u}$, но в отличие от завихренности она не вморожена в жидкость.

С каждым замкнутым кинематическим инвариантом связан набор интегралов движения, которые могут быть перенумерованы всеми гомологически различными циклами. Действительно, если γ — некоторый цикл на X , то по соображениям непрерывности поток $\{g_t\}$ не может изменить его класса гомологий, и поэтому

$$I_\gamma = \int_\gamma \omega = \int_\gamma h^* \omega_0 = \int_{h^* \gamma} \omega_0 = \int_\gamma \omega_0$$

есть интеграл движения.

С точки зрения гидродинамики в первую очередь интересны только кинематические инварианты степени n , т.к. в общем случае гарантированно нетривиален только фундаментальный цикл, порожденный самим пространством X (циклы нулевой размерности неинтересны, т.к. кинематические инварианты степени нуль являются просто постоянными функциями).

Другим важным аспектом любых инвариантов является свойство локальности. Из вышеизложенного мы видим, что если выбрать поле h в качестве одной из динамических переменных, то кинематический инвариант, определенный по произвольной дифференциальной форме ω_0 с помощью формулы (17), будет локальной комбинацией поля h и его производных. В частности, таковым будет при произвольной функции $C(x)$ кинематический инвариант $d\nu = h^*(C d\mu)$, имеющий смысл плотности распределения некоторой пассивной примеси, начальная концентрация которой равнялась $C(x)$.

4. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ КЛЕБША

Если для определения траекторий механической системы использовать вариационный принцип, то в качестве основных динамических переменных мы можем выбрать любой набор координат на фазовом пространстве. В случае гидромеханики баротропной жидкости наиболее естественными координатами, имеющими очевидный физический смысл, являются эйлеровы поля ϱ и $\mathbf{u}$ и лагранжевы поля g и h . Значение $g(x)$ поля g в точке x имеет смысл положения в текущий момент времени частицы жидкости, которая находилась в точке x в начальный момент, а значение $h(x)$ поля h в точке x имеет смысл положения в начальный момент времени той частицы жидкости, которая в текущий момент времени находится в точке x . Калибровочное поле a связано с выбором единиц измерения плотности жидкости.

В переменных (ϱ, τ, a, g) действие (4), определяющее динамику жидкости, существенно нелокально. Если перейти к переменным $(\varrho_0, \tau_0, a, g)$, то нелокальность сохранится, даже если мы будем рассматривать начальные условия $\tau_L = \langle \varrho_0, \tau_0 |$ как постоянные параметры и нелокальность по отношению к ним не будем принимать во внимание. Однако если в качестве основных динамических переменных мы выберем $\varrho, \mathbf{u}_0, a$ и h и будем рассматривать $\mathbf{u}_0$ как совокупность постоянных параметров (в силу уравнений (9) это совместимо с динамикой), то действие (4) окажется локальным функционалом. Действительно, используя обозначения $G = (a, g)$ и $\tau_L = \langle \varrho_0, \tau_0 |$, нетрудно показать, что

$$G^{-1} \dot{G} = |g^* \dot{a}, h_* \mathbf{v}\rangle,$$

где $\mathbf{v}(x) = \dot{g}(h(x))$, и с помощью формул (12) и (14) получить соотношение

$$\langle \tau_L | G^{-1} \dot{G} \rangle = \int_X d\mu(x) \varrho(x) \{ \dot{a}(x) - \langle \mathbf{u}_0(h(x)), \dot{h}(x) \rangle \}. \quad (18)$$

Это выражение локально по полям ϱ, a и h , а т.к. эйлерова скорость $\mathbf{u}$ связана формулой (16) с h локальным образом, то и гамильтониан (13) оказывается локальным. Отметим еще раз, что полным набором координат на фазовом пространстве является совокупность $(\varrho, a, \mathbf{u}_0, h)$ и только благодаря уравнению (9) $\mathbf{u}_0$ оказывается интегралом

движения и может рассматриваться как параметр, характеризующий систему. Если же учесть силы трения, то координата τ_L будет эволюционировать и поле $\tau_L = \langle \varrho_0, \tau_0 |$ нельзя будет интерпретировать как начальное значение поля $\tau_R = \langle \varrho, \tau |$.

Чтобы продемонстрировать локальность функционала действия, запишем формулы (18) и (16) в каких-либо локальных координатах x^i . Начальное поле $\mathbf{u}_0$ скорости может быть представлено в виде $\mathbf{u}_0 = U_i dx^i$, где U_i – некоторые скалярные функции. Если мы введем скалярные поля $h^i = h^* x^i$, то получим представления

$$\mathbf{u}(x) = U_i(h(x)) dh^i(x) - da(x), \quad (19)$$

$$\langle \mathbf{u}_0(h(x)), \dot{h}(x) \rangle = U_i(h(x)) \dot{h}^i(x). \quad (20)$$

Таким образом, коэффициенты U_i разложения начального поля скорости по базису dx^i играют роль “потенциалов” на области значений поля h .

Теперь можно ввести переменные Клебша, для чего просто следует выбрать координаты x^i специальным образом. В общем случае искомые координаты в окрестности произвольно взятой точки существуют только локально и при условии, что в начальный момент времени гиротропия $\mathbf{u}_0 \wedge d\mathbf{u}_0$ отлична в этой точке от нуля. В таком случае 1-форма $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет условию невырожденности Фробениуса и определяет контактную структуру (мы предполагаем, что $n = 3$ или нечетно), поэтому согласно теореме Дарбу существуют координаты x, y, z такие, что $\mathbf{u}_0 = x dy + dz$ [5, 10]. Если ввести обозначения

$$\xi = h^* x, \quad \eta = h^* y, \quad \zeta = h^* z,$$

то формулы (19), (20) и (18) примут вид

$$\mathbf{u} = \xi d\eta + d\zeta - da, \quad (21)$$

$$\langle \mathbf{u}_0(h(x)), \dot{h}(x) \rangle = \xi \dot{\eta} + \dot{\zeta}, \quad (22)$$

$$\langle \tau_L, G^{-1} \dot{G} \rangle = \int_X d\mu \varrho \{ \dot{a} - \xi \dot{\eta} - \dot{\zeta} \}, \quad (23)$$

поэтому поля $(\varrho, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varrho, \zeta - a)$ и $(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} (\varrho \xi, \eta)$ могут быть интерпретированы как канонические переменные Клебша.

Таким образом, введение переменных Клебша связано с приведением начального поля скорости к нормальной форме Дарбу и может быть осуществлено в случае общего положения. Нарушение условия невырожденности делает [10] локальную классификацию 1-форм необозримой, и поэтому невозможно указать конечное число инвариантов, которые являются препятствиями для перехода к каноническим переменным.

Вместе с тем мы получили, что переменные Клебша ξ и η являются просто двумя из трех начальных координат частиц жидкости. Поэтому мы можем дать в инвариантных терминах интерпретацию любого закона сохранения, полученного с помощью преобразования Клебша уравнений гидродинамики и перехода к каноническим переменным. Для иллюстрации можно рассмотреть закон сохранения полного числа квазичастиц в несжимаемой жидкости, который обсуждался в литературе (см. [4, 11]). Нетрудно видеть, что этот закон имеет смысл закона сохранения полного количества пассивной примеси и порождается кинематическим инвариантом $h^*(Cd\mu)$, который рассматривался

в предыдущем разделе, при условии, что в качестве начального распределения концентрации мы выберем формально функцию $C = x^2 + y^2$ локальных координат Дарбу.

До сих пор мы рассматривали только изэнтропическое движение идеальной жидкости, но совершенно аналогично можно рассмотреть движение жидкости в присутствии сил Кориолиса и при произвольной зависимости внутренней энергии от плотности и энтропии. Преобразование Клебша по-прежнему будет связано с приведением начального поля скорости к нормальному виду Дарбу, а закон сохранения числа квазичастиц по-прежнему будет иметь смысл закона сохранения полного количества фиктивной пассивной примеси.

В заключение автор выражает благодарность В. Грянику за интерес к работе и полезные обсуждения.

Эта работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 96-01-00841.

Список литературы

- [1] *A. Clebsch.* Crelle's J. (J. für die reine und angewandte Mathematik). 1857. В. LIV. 1859. В. LVI.
- [2] *H. Lamb.* Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1924.
- [3] *E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov.* Physica D. 1981. V. 2. P. 224–243.
- [4] *G. Falkovich, V. S. L'vov.* Chaos, Solitons and Fractals. 1995. V. 5. P. 1855–1865.
- [5] *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
- [6] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [7] *В. Е. Захаров.* Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. С. 431–453.
- [8] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко.* Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1. М.: Наука, 1979.
- [9] *S. P. Novikov.* Sov. Sci. Rev. 1986. V. 91. P. 1.
- [10] *В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь.* Симплектическая геометрия. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 8–140.
- [11] *В. Е. Захаров, В. С. Львов.* Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. С. 1470.

Поступила в редакцию 23.X.1997 г.