Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Анохина, А. А. Морозов, Процедура каблирования
для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ, *ТМФ*, 2014,
том 178, номер 1, 3–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:14:52

© 2014 г.

А. С. Анохина^{*†}, А. А. Морозов^{*‡}

ПРОЦЕДУРА КАБЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСКРАШЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ХОМФЛИ

Обсуждается применение процедуры каблирования для вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ. Описано, как можно ее использовать и как найти проекторы и $\mathcal{R}$ -матрицы, которые необходимы для этой процедуры. Построенные матричные выражения для проекторов и $\mathcal{R}$ -матриц в фундаментальном представлении позволяют вычислить полином ХОМФЛИ для произвольного узла и для произвольного представления. Используемый алгоритм вычислений дает возможность провести их для узлов и зацеплений с $|Q|m \leq 12$, где m – число нитей в представлении узла в виде косы, а $|Q|$ – число клеток в диаграмме Юнга представления. Также обсуждается обоснование процедуры каблирования с точки зрения теории групп. При этом выводятся выражения для $\mathcal{R}$ -матриц в фундаментальном представлении и поясняются некоторые предположения, сформулированные в предыдущих работах.

Ключевые слова: теория Черна–Саймонса, теория узлов, теория представлений.

DOI: 10.4231/tmf8588

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, некоторые квантовые эффекты являются непертурбативными явлениями. Иногда они возникают уже в квантовой механике, например эффект Ааронова–Бома [1], [2], но гораздо чаще – в теории калибровочных полей [3], [4]. Непертурбативные эффекты в настоящий момент привлекают все больше внимания. Одна из основных причин этого состоит в том, что при рассмотрении таких явлений возникает огромное количество точно решаемых моделей, где, в отличие от реалистичной квантовой теории поля, сам ответ хорошо определен и потому доступен для строгого анализа. С другой стороны, есть надежда, что таким образом удастся объяснить некоторые исключительно важные наблюдаемые явление, среди которых конфайнмент в квантовой хромодинамике [5]. Изучение непертурбативных эффектов дало начало нескольким новым типам теорий, таким как теория Зайберга–Виттена [6], [7]

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: anokhina@itep.ru, Andrey.Morozov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

и конформная теория поля [8], в которых именно непертурбативные явления играют ключевую роль.

Важный класс таких непертурбативных теорий составляют так называемые топологические теории поля [9]. Они представляют собой специальный класс квантовых теорий поля, в которых наблюдаемые, скажем амплитуды, нечувствительны к малым возмущениям, например, константы связи, и в этом смысле топологически инвариантны. Исследование теорий такого рода привело к изучению различных топологических объектов, как ранее известных, так и впервые открытых. Самый прямолинейный способ применить квантовую теорию поля для изучения топологических объектов – это рассмотреть действие, которое в некотором смысле есть полная производная, так что соответствующая статистическая сумма

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{M}} [D\mathcal{A}] e^{-S[\mathcal{A}]} \quad (1.1)$$

не меняется при гладких преобразованиях многообразия $\mathcal{M}$ [10], [11]. Такая статистическая сумма может быть устроена весьма сложным образом, если рассматриваемое многообразие обладает нетривиальными топологическими свойствами (см., например, работу [12]). Альтернативный путь состоит в том, чтобы рассмотреть очень простое многообразие (например, сферу), но ввести в интеграл (1.1) дополнительную структуру, т.е. попытаться изучить средние от некоторых наблюдаемых. В калибровочных теориях часто рассматривается вильсоновское среднее [13]

$$\langle W^{\mathcal{K}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{M}} [D\mathcal{A}] \operatorname{Tr} \operatorname{Pexp} \left(\oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A} dx \right) e^{(i/\hbar)S[\mathcal{A}]}.$$

Вильсоновское среднее есть среднее от вильсоновской петли – следа экспоненты интеграла связности $\mathcal{A}$ по замкнутому контуру $\mathcal{K}$. Тогда даже для топологически тривиального многообразия можно рассматривать нетривиальные вложения контура $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$. Эти вложения можно описывать с помощью соответствующих вильсоновских средних. Простейшей теорией, в которой возникают наблюдаемые такого вида, является трехмерная калибровочная теория – теория Черна–Саймонса [14]. В ней вильсоновские средние отвечают узлам, т.е. вложениям $S_1 \subset S_3$. Эта теория имеет кубический лагранжиан:

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} - \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right) d^3x.$$

Тогда вильсоновское среднее $\langle W_Q^{\mathcal{K}} \rangle_{\text{CS}(N,k)}$ определено для узла $\mathcal{K}$ в теории Черна–Саймонса с константой связи k в представлении Q калибровочной группы $SU(N)$. В случае зацепления, т.е. нескольких переплетенных узлов, можно на каждую компоненту связности поместить свое представление Q_i .

В 1989 г. Виттен предположил [15], что вильсоновские средние в теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(2)$ равны полиномам Джонса, известным из математической теории узлов. Этот факт можно обобщить на калибровочную группу $SU(N)$ произвольного ранга, тогда полином Джонса нужно заменить на полином ХОМФЛИ [16]. Полиномы ХОМФЛИ $H^{\mathcal{K}}(A, q)$ (в случае фундаментального представления группы $SU(N)$) в математической теории узлов были введены при

$$A \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \mathcal{K} \end{array} - A^{-1} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \mathcal{K}' \end{array} = (q - q^{-1}) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \mathcal{K}'' \end{array}$$

Рис. 1. Скейн-соотношения в топологическом оснащении (см. раздел 5).

помощи скейн-соотношений [17], [18]. Скейн-соотношения представляют собой систему уравнений на полиномы ХОМФЛИ данного ориентированного узла $\mathcal{K}$ и узлов (строго говоря, зацеплений) $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$, полученных соответственно обращением и разрешением одного из пересечений (см. рис. 1).

Полином ХОМФЛИ произвольного узла однозначно определяется скейн-соотношениями и полиномом ХОМФЛИ тривиального узла. А именно, всякий узел можно свести к тривиальному с помощью скейн-соотношений, и полученный полином не зависит от порядка, в котором распутывались пересечения¹⁾. Доказательство топологической инвариантности полинома ХОМФЛИ, т.е. того факта, что ответ не меняется при гладких деформациях узла, приведено, например, в работе [17]. Также известно, что для узла полином ХОМФЛИ является полиномом Лорана от A и q с точностью до множителя $(q - q^{-1})$ [17], [18], а для n -компонентного зацепления расходится при $q \rightarrow 1$ как $(q - q^{-1})^{-n}$ [20]. Таким образом, скейн-соотношения дают конструктивное, хотя и весьма сложное, определение полинома ХОМФЛИ. Так или иначе, этим способом были получены инварианты огромного количества узлов [21].

Согласно идее Виттена [15] полином ХОМФЛИ равен вильсоновскому среднему в теории Черна–Саймонса:

$$\langle W^{\mathcal{K}} \rangle_{\text{CS}(N,k)} = H^{\mathcal{K}}(A, q) \Big|_{A=q^N, q=e^{2\pi i/(k+N)}}.$$

В последнее время широко изучались связь теории Черна–Саймонса с теорией узлов [22]–[39], а также сами по себе теория Черна–Саймонса [40]–[43] и теория узлов [44]–[47], [48]–[81].

Подход, связывающий инварианты узлов с теорией Черна–Саймонса [15], [22]–[39], как и более математические подходы, основанные на алгебрах Гекке [44]–[47], [78]–[81], используют конструкцию, в которой с каждой компонентой зацепления связано векторное пространство V . Точнее, V есть пространство представления некоторой алгебры Ли. Инварианты узла, определенные таким образом, зависят (для данного узла и для данной группы) от дискретной переменной, задающей выбор представления. Эта переменная называется цветом инварианта узла [26]. Таким образом можно ввести так называемые раскрашенные полиномы ХОМФЛИ, которые являются обобщением полиномов ХОМФЛИ, определенных ранее через скейн-соотношения, представленные на рис. 1. Последние фактически задают полиномы ХОМФЛИ в фундаментальном представлении. Метод Решетихина–Тураева [82]–[84], который используется, например, в серии работ [85]–[93], ведет к одному из возможных способов определить раскрашенные полиномы ХОМФЛИ на основе только что упомянутой конструкции.

¹⁾Скейн-соотношения существуют и для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ, т.е. в случае старших представлений (см. далее). Эти соотношения, однако, гораздо сложнее и, вообще говоря, не позволяют свести произвольный узел к тривиальному [19].

В настоящей работе мы используем метод вычисления полиномов ХОМФЛИ, основанный на формализме Решетихина–Тураева. В рамках этого формализма полиномы ХОМФЛИ могут быть описаны как специальным образом взвешенный след произведения $\mathcal{R}$ -матриц:

$$H_{T_1 \otimes T_2 \dots}^{\mathcal{K}} = \text{Tr}_{T_1 \otimes T_2 \dots} \prod_{\alpha} \tilde{\mathcal{R}}_{\alpha},$$

где α пробегает все пересечения в косе. Вообще говоря, формализм Решетихина–Тураева не требует представления узла в виде косы, но мы для простоты будем пользоваться именно таким представлением. Всякой косе соответствует узел, который является ее замыканием. При этом один и тот же узел можно представить в виде замыкания различных кос, которые могут даже отличаться числом нитей. Ниже изображено представление узла-трилистника в виде косы:

Одна из основных идей описанного подхода состоит в том, что все векторы любого неприводимого представления являются собственными векторами $\mathcal{R}$ -матрицы, причем все они отвечают одному и тому же собственному значению:

$$\tilde{\mathcal{R}} = \sum_Q \lambda_Q I_{d_Q} \otimes \mathcal{R},$$

где d_Q – размерность представления Q . Поскольку $\mathcal{R}$ -матрица действует на всяком неприводимом представлении как константа, можно сказать, что $\mathcal{R}$ -матрица действует в пространстве сплетающих операторов. Это можно понимать так, что $\mathcal{R}$ -матрица действует на старших векторах ξ_i каждого из представлений Q так, что $\mathcal{R}_{ij} = [\mathcal{R}\xi_i]_{\xi_j}$. В этом смысле можно сказать, что $\mathcal{R}$ -матрица действует в пространстве неприводимых представлений.

Взвешенный след [17], [46] определен так, что след по всем векторам неприводимого представления Q равен характеру этого представления $S_Q^*(A, q)$ (полиному Шура [94]): $\text{Tr}_Q I_{d_Q} = S_Q^*(A, q)$. Описанные свойства $\mathcal{R}$ -матриц и взвешенного следа приводят к формуле разложения по характерам для полиномов ХОМФЛИ [86]:

$$H_{T_1 \otimes T_2 \dots}^{\mathcal{K}}(A, q) = \sum_{Q \vdash T_1 \otimes T_2 \dots} h_{T_1 \otimes T_2 \dots}^{\mathcal{K}, Q}(q) S_Q^*(A, q). \quad (1.2)$$

Коэффициенты $h_{T_1 \otimes T_2 \dots}^{\mathcal{K}, Q}$ являются полиномами Лорана от единственной переменной²⁾ q и, таким образом, не зависят от N . Зависимость полинома ХОМФЛИ от N полностью описывается полиномами Шура. Поскольку есть формула разложения по характерам, можно по отдельности изучать коэффициенты, соответствующие различным неприводимым представлениям. Подробное описание и анализ этого метода можно найти, например, в работах [86], [90].

²⁾Коэффициенты $h_{T_1 \otimes T_2 \dots}^{\mathcal{K}, Q}$ могут зависеть и от A при некотором выборе оснащения (см. раздел 5). Эта зависимость весьма простая, и ее можно вывести из условия, что в вертикальном оснащении эти коэффициенты зависят только от q .

Отметим, что мы несколько переформулируем подход, представленный в работе [86]. А именно, если рассматривать фундаментальное представление, то существует базис (см. формулу (3.2) ниже), в котором легко определить вид всех $\mathcal{R}$ -матриц, действующих в косе. Мы найдем эти матрицы в явном виде в разделе 3 и затем вычислим полиномы ХОМФЛИ в фундаментальном представлении непосредственно с помощью найденных $\mathcal{R}$ -матриц. Таким образом, в случае фундаментального представления нет необходимости рассматривать U -матрицы (см. работу [86]). Это наблюдение, кроме прочего, заметно упрощает компьютерное вычисление полиномов ХОМФЛИ.

Разложение по характерам (1.2) также позволяет построить так называемый расширенный полином ХОМФЛИ. Для этого нужно вместо полиномов Шура, зависящих от A и q , подставить полиномы Шура, зависящие от времен t_k , а коэффициенты $h_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}, Q}$ оставить без изменений. Полученные при этом расширенные полиномы ХОМФЛИ [85] тесно связаны с интегрируемыми системами [95], [96].

Полиномы ХОМФЛИ в фундаментальном представлении, а также раскрашенные полиномы ХОМФЛИ вычислены непосредственно с помощью формализма Решетихина–Тураева для ряда важных примеров в работах [87], [89]. В настоящей работе мы обсудим несколько иной сюжет. Существует подход, который позволяет изучать раскрашенные инварианты узлов с помощью результатов, полученных для фундаментального представления. Это так называемая процедура каблирования [97]. Мы опишем, как использовать эту процедуру в рамках формализма Решетихина–Тураева, а также обсудим ее теоретико-групповую интерпретацию.

Результаты, полученные с помощью данного метода, и вспомогательные формулы к статье приведены в ее расширенной электронной версии [98].

Работа построена следующим образом. В разделах 2–5 мы объясняем, что такое процедура каблирования, какие величины необходимы, чтобы ее использовать, и как их вычислить. В разделах 6–8 приведены некоторые результаты, полученные с помощью процедуры каблирования. Теоретико-групповые свойства процедуры каблирования обсуждаются в разделе 9. Наконец, в разделах 10–12 мы формулируем и объясняем на языке процедуры каблирования некоторые из предположений, выдвинутых в работах [61], [89].

Приведем список обозначений, использованных в работе. Соответствующие понятия вводятся и разъясняются ниже.

Неприводимые представления алгебры sl_n описываются диаграммами Юнга – наборами целых чисел $Q = [q_1, \dots, q_k]$ такими, что $q_1 \geq \dots \geq q_k$ [94]. Мы, как правило, будем обозначать диаграмму Юнга строкой $[q_1 \dots q_k]$, опуская квадратные скобки, если будет ясно, что имеется в виду. Диаграмму Q также можно изображать графически в виде k строчек, состоящих из $q_1 \geq \dots \geq q_k$ клеток. Полное число клеток $|Q| = \sum_{i=1}^k q_i$ в диаграмме Q называется размером диаграммы, или уровнем соответствующего представления.

Запись $Q \vdash T_1 \otimes \dots \otimes T_m$ означает, что неприводимое представление Q возникает в разложении тензорного произведения $T_1 \otimes \dots \otimes T_m$.

Обозначение $T_1, \dots, T_m | Q$ используется для компоненты, соответствующей представлению Q из произведения представлений $T_1, \dots, T_m$.

Всюду считается, что $\mathcal{R}$ -матрицы действуют в пространстве сплетающих операторов.

Рис. 2. Длина крюка $h_{i,j}$ для клетки (i, j) диаграммы Юнга определяется формулой $h_{i,j} = k + l + 1$, где k – расстояние до конца строки, l – расстояние до конца столбца.

При описании косы i -й нитью будем называть нить, расположенную на i -м месте в некотором сечении косы. Если сказано, что i -я нить пересекается с $(i + 1)$ -й, то рассматривается сечение, в котором расположено данное пересечение; в противном случае будет уточняться, что имеется в виду.

Раскрашенная $\mathcal{R}$ -матрица соответствующая пересечению i -й и $(i + 1)$ -й нитей в косе, обозначается как $\mathcal{R}_{Q_1 \otimes \dots (Q_i \otimes Q_{i+1}) \dots \otimes Q_k}$. Здесь $Q_1, \dots, Q_i, Q_{i+1}, \dots, Q_k$ – представления, связанные со всеми нитями, в порядке их расположения в сечении косы, в котором находится данное пересечение. Знак $\otimes$ может опускаться, если это не вызывает путаницы.

Если со всеми нитями косы связаны фундаментальные представления, то $\mathcal{R}$ -матрица, соответствующая пересечению i -й и $(i + 1)$ -й нитей, обозначается как R_i .

Проектор представления T на представление Q обозначается через P_Q^T . Через P_Q обозначен проектор представления $1^{|Q|}$ на представление Q . Представление Q , вообще говоря, может быть приводимым, например $Q = Q_1 \otimes Q_2$.

Матрица Рака [86], [99], описывающая переход между базисами $Q_1 \otimes (Q_2 \otimes Q_3)$ и $(Q_1 \otimes Q_2) \otimes Q_3$, обозначается как $\mathcal{U}_{Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3}$.

Полиномы Шура S_Q обычно определяются как функции бесконечного числа переменных $\{t_k\}$ [94]. Однако для вычисления полиномов ХОМФЛИ нам потребуются функции переменных A и q , определенные следующим образом:

$$S_Q^*(A, q) = S_Q\{t\} \text{ при } t_k = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}}.$$

Подпространство таких переменных $\{t_k\}$ называется топологическим подпространством. Переход от обыкновенных полиномов ХОМФЛИ к расширенным соответствует выходу из топологического подпространства. Для полиномов $S_Q^*(A, q)$ справедлива также явная формула крюков, с помощью которой легко их вычислять (см. рис. 2):

$$S_Q^*(A, q) = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{Aq^{i-j} - A^{-1}q^{j-i}}{q^{h_{i,j}} - q^{-h_{i,j}}}.$$

Квантовое число для числа n обозначается как

$$[n]_q \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

2. ПРОЦЕДУРА КАБЛИРОВАНИЯ

Вычислять раскрашенные полиномы ХОМФЛИ можно разными способами. При этом в настоящее время неясно, как напрямую вычислить раскрашенные полиномы ХОМФЛИ для представлений, которые не являются ни полностью симметрическими, ни полностью антисимметрическими. В таких случаях зачастую используется подход (см., например, работу [78]), основанный на так называемой процедуре каблирования [97]. На этот поход в основном наводит следующая идея. Как уже упоминалось, полином ХОМФЛИ можно представить в виде разложения по характеристам (1.2). При этом размер диаграмм Юнга Q , по которым ведется суммирование в правой части, равен сумме размеров диаграмм Юнга T_1, T_2 , стоящих в левой части. Таким образом, было бы естественно свести вычисление инварианта исходного узла или зацепления в представлениях $T_1, T_2, \dots$ к вычислению того же инварианта в фундаментальном представлении для узла, представленного косой из $|T_1| + |T_2| + \dots$ нитей.

Именно так устроена процедура каблирования. Вместо исходного узла рассматривается узел-спутник, т.е. некоторая коса, расположенная вдоль исходного узла. Если эта коса состоит из $|T_1|$ параллельных нитей, то полином ХОМФЛИ полученного узла-спутника в представлении T_2 будет равен полиному ХОМФЛИ исходного узла в представлении $T_2^{|T_1|}$:

$$H_{T_2^{|T_1|}}^{\mathcal{K}} = H_{T_2}^{\mathcal{K}^{|T_1|}}.$$

На этом соотношении и основан метод каблирования. Чтобы получить полином ХОМФЛИ в каком-либо другом представлении Q размера $|T_2|^{|T_1|}$, нужно вычислить определенную линейную комбинацию полиномов нескольких разных узлов-спутников. Взятие этой линейной комбинации соответствует проекции представления $T_2^{|T_1|}$ на представление Q . Иными словами, вместо того чтобы вычислять линейную комбинацию, можно домножить произведение $\mathcal{R}$ -матриц на некоторый линейный оператор – на проектор. В формализме Решетихина–Тураева каждое пересечение в проекции узла на плоскость соответствует $\mathcal{R}$ -матрице, поэтому линейная комбинация полиномов узлов-спутников (отличающихся друг от друга набором из нескольких пересечений) соответствует некоторой линейной комбинации $\mathcal{R}$ -матриц. Таким образом, проектор можно представить в виде полинома от $\mathcal{R}$ -матриц (подробности см. в разделе 4).

Итак, для того чтобы выразить раскрашенные полиномы ХОМФЛИ через полиномы ХОМФЛИ в фундаментальном представлении, нужно проделать следующую процедуру (процедуру каблирования):

- нить, на которую помещено представление T_i , заменить на $|T_i|$ параллельных нитей; ниже изображен результат этого шага при вычислении узла-трилистника в представлении размера $|T_i| = 2$:

Рис. 3. Прямое и обратное пересечения.

- вычислить проекторы представления $1^{|T_i|}$ на представление T_i ;
- вычислить полином полученных узлов и зацеплений в фундаментальном представлении, но с добавлением в выражение вычисленного проектора.

3. $\mathcal{R}$ -МАТРИЦЫ

В конструкции, которую мы рассматриваем, в качестве “строительных блоков” используются $\mathcal{R}$ -матрицы [82] (подробности см. в разделе 1 настоящей статьи). В каждое пересечение проекции узла на плоскость помещается такая $\mathcal{R}$ -матрица. Вообще говоря, $\mathcal{R}$ -матрица – это некоторый оператор с четырьмя индексами, соответствующий пересечению нитей на плоской проекции ориентированного узла или зацепления. Чтобы получить матрицу этого оператора, удобно рассмотреть проекцию узла особого вида, которая называется представлением узла в виде косы. При этом вводится аналог обыкновенной $\mathcal{R}$ -матрицы, действующий не только на пару пересекающихся нитей, но и на все нити в данном сечении косы (на все нити, кроме пересекающихся в данном сечении, оператор действует как единичный). Ниже мы опишем матричную форму этого оператора. $\mathcal{R}$ -матрица, действующая в сечении косы, по-прежнему строится с помощью оператора с четырьмя индексами. Поэтому пересечениям, расположенным в разных местах сечения косы, соответствуют разные матрицы. Также можно показать, что обратному пересечению соответствует обратная $\mathcal{R}$ -матрица [82] (см. рис. 3) .

3.1. Диагональные $\mathcal{R}$ -матрицы. В рамках конструкции, в которой $\mathcal{R}$ -матрицы действуют на косу, вид этих матриц зависит не только от представлений, помещенных на пересекающиеся нити, но и от расположения этих нитей относительно остальных нитей косы. Каждая из таких $\mathcal{R}$ -матриц (но не все одновременно) может быть приведена к диагональному виду. В настоящей работе используется базис, в котором диагональна первая $\mathcal{R}$ -матрица (т. е. матрица, соответствующая пересечению нитей на первой и второй позиции в сечении косы), если не указано иное.

Простейший случай представляет собой $\mathcal{R}$ -матрица, действующая в косе из двух нитей, на которые помещены представления T_1 и T_2 . Тогда $\mathcal{R}$ -матрица диагональна в базисе неприводимых представлений $Q_i \vdash T_1 \otimes T_2$, и ее собственные значения равны [23], [86]

$$\lambda_i = \pm q^{\varkappa_{Q_i} - \varkappa_{T_1} - \varkappa_{T_2}}, \quad \text{где} \quad \varkappa_Q = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in Q} (j - i), \quad (3.1)$$

при суммировании i и j пробегают все клетки диаграммы Юнга Q . Собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы определены с точностью до общего множителя, который не изменяет уравнение Янга–Бакстера [23]. Этот множитель выбирают по-разному

Рис. 4. Дерево для представления $[321]$, возникающего при умножении шести фундаментальных представлений.

в зависимости от изучаемых величин. Собственные значения в (3.1) соответствуют так называемому вертикальному оснащению узла (см. раздел 5).

Если в косе больше двух нитей, то ситуация несколько сложнее. Пусть на нити помещены представления $T_1, \dots, T_m$. Тогда $\mathcal{R}$ -матрица, соответствующая пересечению нитей на позициях i и $i+1$, диагональна в базисе неприводимых представлений, которые возникают в разложении

$$T_1 \otimes \dots \otimes (T_i \otimes T_{i+1}) \otimes \dots \otimes T_m = T_1 \otimes \dots \otimes \left(\sum_j Q_j \right) \otimes \dots \otimes T_m = \sum_j \bar{Q}_j,$$

причем собственное значение для каждого $\bar{Q}_j$ то же, что и для представления Q_i , из которого оно получено. Обратному пересечению (см. рис. 3) соответствует обратная $\mathcal{R}$ -матрица, собственные значения которой равны $\lambda_i^{-1} = \pm q^{-\kappa_{Q_i} + \kappa_{T_1} + \kappa_{T_2}}$.

3.2. $\mathcal{R}$ -матрицы общего вида. Определить элементы $\mathcal{R}$ -матрицы общего вида (не диагональной) гораздо труднее. В общем случае (для произвольного числа нитей и набора представлений) ответ неизвестен. Вид недиагональных $\mathcal{R}$ -матриц удастся определить только в некоторых конкретных случаях, например в случае фундаментального представления (R -матрицы).

Наиболее простой вид R -матрицы имеют в базисе неприводимых представлений, которые возникают при последовательном раскрытии тензорного произведения в следующем порядке (обозначен скобками):

$$((((1 \otimes 1) \otimes 1) \otimes \dots) \otimes 1) \otimes 1. \quad (3.2)$$

Этот базис будем называть стандартным. Векторы этого базиса удобно описать в терминах путей на определенном графе [92]. Для каждого неприводимого представления можно нарисовать дерево, изображающее все способы получить это представление в разложении некоторого тензорного произведения. На рис. 4 приведен пример такого дерева для представления $[321]$, возникающего в разложении тензорного произведения шести фундаментальных представлений. Каждая стрелка

Рис. 5. Чтобы выбрать правильный блок b_j , нужно нарисовать диаграмму, описывающую переход между путями дублета на уровне k . Если длина крюка, соединяющего центры добавленных клеток (изображены кругами) равна j , то на соответствующей позиции в матрице R_k стоит блок b_j .

на этом дереве соответствует умножению на одно фундаментальное представление. Введем также блок b_j размера 2×2 :

$$b_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^j [j]_q} & \frac{\sqrt{[j+1]_q [j-1]_q}}{[j]_q} \\ \frac{\sqrt{[j+1]_q [j-1]_q}}{[j]_q} & \frac{q^j}{[j]_q} \end{pmatrix}.$$

Опишем теперь явный вид R -матриц в базисе (3.2). Мы утверждаем, что матрица R_{k-1} , соответствующая пересечению $(k-1)$ -й и k -й нитей в некотором сечении косы, состоит только из блоков b_k размера 2×2 и блоков q или $-q^{-1}$ размера 1×1 . Осталось описать положение этих блоков. Для этого воспользуемся примером на рис. 4. Каждая строка и каждый столбец R -матрицы соответствуют одному из листов на дереве, т. е. одной из точек, в которых пути начинаются с фундаментального представления. Каждый путь на данном уровне k входит либо в дублет (другими словами, является одним из пары путей, которые совпадают всюду, кроме уровня k), либо в синглет (в противном случае). Если дерево строится из фундаментальных представлений, то этим исчерпываются все возможные случаи, т. е. триплеты, квадруплеты и т. д. появиться не могут. Если пара путей входит в дублет, то на пересечении соответствующих строк и столбцов стоит блок b_j , где j — длина крюка, соединяющего центры клеток, добавленных к диаграмме Юнга неприводимого представления на уровнях k и $k+1$ (см. рис. 5). Иногда $j = k$, но, вообще говоря, это не так. Строго говоря, b_j входят в матрицу R_{k-1} не как блоки, но каждый из них (однако не все одновременно) может быть преобразован в блок перестановкой строк и столбцов.

Путь является синглетом, если переход с уровня $k-1$ на уровень $k+1$ соответствует добавлению двух клеток либо в одну строку, либо в один столбец диаграммы Юнга (рис. 6 отвечает $k = 4$). В первом случае соответствующий этому пути диагональный элемент матрицы R_k равен q , а во втором равен $-q^{-1}$.

По этим правилам можно построить любую R -матрицу в случае фундаментальных представлений на всех нитях косы. Например, блок $R_{4|321}$ матрицы R_4 для

 $3 \rightarrow 311$
элемент $-q^{-1}$ в R -матрице
 $21 \rightarrow 311$
блок b_4 в R -матрице
 $111 \rightarrow 311$
элемент q в R -матрице

Рис. 6. Описание R -матрицы в терминах добавления клеток к диаграмме Юнга для уровня 4 и конечного представления 311. Круги обозначают клетки, добавленные к исходной диаграмме.

представления $[321]$ (соответствующей уровню 4 на рис. 4) выглядит следующим образом: его диагональные элементы суть

$$q, -\frac{1}{[2]_q q^2}, -\frac{1}{[2]_q q^2}, \frac{q}{[2]_q^2}, \frac{q}{[2]_q^2}, -\frac{1}{q}, -\frac{1}{[4]_q q^4}, -\frac{1}{[4]_q q^4},$$

$$\frac{q^4}{[4]_q}, \frac{q^4}{[4]_q}, q, -\frac{1}{[2]_q q^2}, -\frac{1}{[2]_q q^2}, \frac{q^2}{[2]_q}, \frac{q^2}{[2]_q}, -\frac{1}{q};$$

элементы второй верхней побочной диагонали суть

$$0, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q}, \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, 0, 0;$$

элементы второй нижней побочной диагонали суть

$$0, 0, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q}, \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q}, 0;$$

остальные элементы блока равны нулю.

Аналогичным образом можно построить матрицы, обратные к только что описанным. Для этого достаточно каждый раз заменять q на q^{-1} .

Объясним, почему R -матрицы имеют вид, описанный выше. Сначала выясним, какие пути могут принадлежать одному блоку матриц R_k . Всякая точка на уровне $i \leq k-1$ соответствует представлению Q в разложении тензорного произведения $T_1 \otimes \cdots \otimes T_{i-1}$ представлений, на которые матрица R_k действует как единичный оператор. Следовательно, любые два пути, которые смешивает матрица R_k , совпадают вплоть до уровня $k-1$. Далее, действие матрицы R_k на произведение $T_1 \otimes \cdots \otimes T_{k+1} \otimes T_m$ получается из ее действия на произведении $T_1 \otimes \cdots \otimes T_{k+1}$, где она не смешивает неприводимые представления, которые соответствуют различным диаграммам Юнга. Поэтому любые два пути, которые смешивает матрица R_k , должны проходить через одну и ту же диаграмму Q на уровне $k+1$. Наконец, на представлениях $T_{k+1}, \dots, T_m$ R -матрица снова действует как единичный оператор,

поэтому соответствующие части путей, смешиваемых матрицей R_k , также совпадают. Таким образом, все пути, принадлежащие к одному блоку в матрице R_k , совпадают (т. е. проходят одну и ту же последовательность диаграмм Юнга) везде, кроме уровня k .

Размер блоков зависит от представлений, которые входят в рассматриваемое произведение. В случае фундаментальных представлений ($T_i = \square$) каждая стрелка на дереве соответствует добавлению одной клетки к диаграмме Юнга. Пути, совпадающие всюду, кроме уровня k , проходят через одну и ту же диаграмму Юнга как на уровне $k - 1$, так и на уровне $k + 1$. При этом диаграмма уровня $k + 1$ отличается от диаграммы уровня $k - 1$ добавлением двух клеток на определенную пару позиций. Следовательно, есть либо два таких пути (соответствующих заполнению этих позиций в одном или в другом порядке), либо только один (если позиции расположены в одной строке или в одном столбце, так что порядок их заполнения фиксирован). В первом случае возникает блок размера 2×2 , во втором – блок размера 1×1 . Других вариантов в случае фундаментальных представлений нет.

Блоки размера 1×1 суть просто собственные значения фундаментальной R -матрицы. Поскольку добавление двух клеток в одну строку соответствует симметризации по соответствующей паре перемножаемых представлений, а добавление в один столбец – антисимметризации, первый случай отвечает собственному значению q , а второй – собственному значению $-q^{-1}$. Осталось определить вид блоков размера 2×2 . Это сделано в разделе 10 настоящей работы.

3.3. Свойства R -матриц и кольцо многочленов. Укажем несколько свойств R -матрицы, важных для дальнейших вычислений. Известно, что R -матрицы удовлетворяют тем же соотношениям, что и генераторы группы кос [100]. Из этого следуют первые два свойства R -матриц:

$$R_i R_j - R_j R_i = 0, \quad |i - j| \neq 1, \quad (3.3)$$

$$R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}, \quad (3.4)$$

где матрица R_i соответствует пересечению нитей i и $i + 1$. Эти соотношения выполняются для $\mathcal{R}$ -матриц в произвольном представлении. Соотношение (3.3) становится очевидным, если рассмотреть косу: если два пересечения следуют подряд и не имеют общей нити, их порядок можно изменить. Это означает, что соответствующие $\mathcal{R}$ -матрицы должны коммутировать. Соотношение (3.4) фактически является определением $\mathcal{R}$ -матриц. Это знаменитое уравнение Янга–Бакстера.

Вид третьего из важных для дальнейшего рассмотрения свойств $\mathcal{R}$ -матрицы существенно зависит от выбора представления. В этом отличие последнего свойства от первых двух. Это свойство по сути представляет собой уравнение на собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы. В случае фундаментального представления оно имеет вид

$$(R_i - q)(R_i + q^{-1}) = 0. \quad (3.5)$$

Это свойство эквивалентно скейн-соотношениям математической теории узлов; его обычно записывают графически, как на рис. 7. Поскольку у R -матрицы в фундаментальном представлении есть только два различных собственных значения, характеристическое уравнение имеет весьма простой вид, и его можно использовать, чтобы выразить полином некоторого узла через полиномы более простых узлов,

$$R \quad R^{-1} = (q - q^{-1}) \quad \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \downarrow \downarrow \\ 1 \end{array}$$

Рис. 7. Графическое описание скейн-соотношений в вертикальном оснащении (см. раздел 5).

что часто делается в математике. Можно также рассматривать характеристическое уравнение для $\mathcal{R}$ -матрицы в старших представлениях как раскрашенные скейн-соотношения [17]. Эти соотношения, однако, не так полезны, как обычные скейн-соотношения: в случае старших представлений $\mathcal{R}$ -матрица удовлетворяет уравнению большей степени, так что неизвестен способ “развязать узел” непосредственно с помощью раскрашенных скейн-соотношений. Например, для представления [2] раскрашенные скейн-соотношения имеют вид

$$(\mathcal{R}_{22} - q^4)(\mathcal{R}_{22} + 1)(\mathcal{R}_{22} - q^{-2}) = 0.$$

Таким образом, скейн-соотношения теперь содержат три члена; при этом не гарантировано, что все эти члены соответствуют более простым узлам, чем исходный. Неизвестно, возможно ли использовать раскрашенные скейн-соотношения такого рода для вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ.

Далее, R -матрицы в фундаментальном представлении удовлетворяют соотношениям (3.3)–(3.5) и порождают алгебру Гекке. Это означает, что кольцо многочленов, порожденное конечным числом R -матриц (например, описывающих пересечения в косе из m нитей), конечномерно. Такие кольца многочленов будут весьма важны в дальнейших вычислениях. Всякая коса из m нитей может быть представлена как элемент кольца многочленов, порожденного R -матрицами $R_1, \dots, R_{m-1}$. Отметим, что конечномерность этого кольца вовсе не означает конечности числа простых узлов: из того, что полином некоторого узла равен сумме полиномов других узлов, не следует, что сам узел является их комбинацией. Полином составного узла, в свою очередь, равен произведению полиномов своих составных частей.

Из свойств алгебры Гекке известно [46], что размерность описанного кольца многочленов равна $m!$. Базисные элементы можно построить, например, из элементарных блоков

$$\sigma_{l,0} = 1, \quad \sigma_{l,k} = \prod_{i=k}^l R_{k+l-i}, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad l = k, \dots, m-1,$$

следующим образом:

$$\Xi_{k_1 \dots k_{m-1}} = \prod_{l=1}^{m-1} \sigma_{l,k_l}, \quad k_l = 0, \dots, l.$$

В пределе $q = 1$ каждый из операторов $\sigma_{l,k}$ соответствует циклической перестановке элементов с номерами от k до l . В свою очередь каждый оператор $\Xi_{k_1 \dots k_{m-1}}$ соответствует одной из $m!$ перестановок. Простейшие элементарные блоки и простейшие

базисные элементы кольца многочленов для косы из m нитей выглядят как

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,0} &= \mathbb{1}, & \sigma_{1,1} &= R_1, \\
 \sigma_{2,0} &= \mathbb{1}, & \sigma_{2,1} &= R_2 R_1, & \sigma_{2,2} &= R_2, \\
 \sigma_{3,0} &= \mathbb{1}, & \sigma_{3,1} &= R_3 R_2 R_1, & \sigma_{3,2} &= R_3 R_2, & \sigma_{3,3} &= R_3, \\
 & \dots\dots\dots, \\
 \sigma_{m-1,0} &= \mathbb{1}, & \sigma_{m-1,1} &= R_{m-1} \dots R_1, \\
 & \sigma_{m-1,2} &= R_{m-1} \dots R_2, & \dots, & \sigma_{m-1,m-1} &= R_{m-1}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

и

$$\begin{aligned}
 \Xi_{00\dots 0} &= \sigma_{1,0} \sigma_{2,0} \dots \sigma_{m-1,0} = 1, & \Xi_{10\dots 0} &= \sigma_{1,1} \sigma_{2,0} \dots \sigma_{m-1,0} = R_1, \\
 \Xi_{01\dots 0} &= \sigma_{1,0} \sigma_{2,1} \dots \sigma_{m-1,0} = R_2 R_1, & \Xi_{11\dots 0} &= \sigma_{1,1} \sigma_{2,1} \dots \sigma_{m-1,0} = R_1 R_2 R_1, \\
 \Xi_{02\dots 0} &= \sigma_{1,0} \sigma_{2,2} \dots \sigma_{m-1,0} = R_2, & \Xi_{12\dots 0} &= \sigma_{1,1} \sigma_{2,2} \dots \sigma_{m-1,0} = R_1 R_2.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

4. ПРОЕКТОРЫ

Если каждую нить в косе, представляющей узел, заменить на кабель, состоящий, например, из двух нитей, и вычислить полином ХОМФЛИ в фундаментальном представлении, то результат окажется полиномом ХОМФЛИ в представлении $[1] \otimes [1]$. Чтобы получить полином в неприводимом представлении (в данном случае в представлении $[2]$ или $[11]$), нужно каким-то образом построить оператор, который “проецирует” ответ для приводимого представления на ответ для неприводимого. Такие операторы называются проекторами.

Вообще говоря, всякую $\mathcal{R}$ -матрицу нужно окружить четырьмя проекторами, по одному на каждую нить, которая входит или выходит из соответствующего пересечения. С точки зрения вычислений ключевое место рассматриваемого метода состоит в том, что достаточно одного проектора на весь узел или по одному проектору на каждую компоненту зацепления. Это следует из того, что $\mathcal{R}$ -матрица не смешивает разные неприводимые представления [82]. Это означает, что если поместить проектор на некоторое неприводимое представление по одну сторону $\mathcal{R}$ -матрицы, то такое же представление должно возникнуть по другую сторону от нее и, следовательно, на всей связной компоненте.

Существует несколько способов вычисления проекторов.

4.1. Описание проекторов в терминах путей. Проще всего описать операторы $\mathcal{P}_Q$, которые проецируют первые n нитей косы на некоторое неприводимое представление Q уровня n . В стандартном базисе (3.2), который используется в настоящей работе, такие проекторы по определению диагональны и допускают описание, аналогичное вышеприведенному для R -матриц. Рассмотрим, к примеру, то же дерево, что на рис. 4. С его помощью можно построить проекторы на представление уровня 2 для косы из трех нитей или проекторы на представление уровня 3 для косы из двух нитей. Например, чтобы описать представления с диаграммой [321], возникающие из разложения $[2] \otimes [1]^4$, нужно на рис. 4 оставить только те пути, которые на уровне 2 проходят через представление $[2]$. По определению каждый из путей на рис. 4 соответствует представлению, являющемуся собственным вектором проектора $\mathcal{P}_{[2] \otimes [1]^4}$; при этом оставленным путям (проходившим через $[2]$)

соответствует собственное значение 1, а отброшенным (проходившим через [11]) – собственное значение 0. Таким образом, в базисе (3.2) все внедиагональные элементы проектора $\mathcal{P}_{[2] \otimes [1]^4}$ равны нулю, а каждый диагональный элемент равен собственному значению (1 или 0) для соответствующего пути. Таким образом, матрица проектора выглядит следующим образом:

$$P_{2 \otimes 1^4 | 321} = \text{diag}(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0).$$

Описанная конструкция позволяет построить только проекторы на первую нить исходной раскрашенной косы. Тем не менее этого достаточно, чтобы вычислить раскрашенный полином произвольного узла: как уже обсуждалось, для этого используется один проектор, который можно поместить в первую нить. Более того, всякую косу можно с помощью движений Рейдемейстера деформировать так, что каждая нить, относящаяся к одной из связных компонент, окажется первой в некотором сечении косы. Проектор для этой нити можно поместить в соответствующее сечение. Для упрощения вычислений можно поместить в первую нить несколько проекторов, по одному между каждыми двумя пересечениями исходной косы. Действительно, если каждое произведение R -матриц, которое соответствует одному из пересечений каблированного узла, с двух сторон умножить на диагональный проектор, то некоторые строки и столбцы станут нулевыми. После этого можно будет получить полином узла, перемножая матрицы меньшего размера (ненулевые блоки), чем изначальные R -матрицы.

4.2. Проекторы как полиномы от R -матриц. Описание проекторов в терминах путей позволяет вычислять произвольные раскрашенные ХОМФЛИ с помощью процедуры каблирования. Тем не менее остается открытым вопрос, как написать выражения для проекторов через R -матрицы. Сама формулировка процедуры каблирования подразумевает, что такие выражения должны существовать. В этой процедуре используется несколько зацеплений-спутников, отличающихся друг от друга набором пересечений в плоской проекции, а в описанной конструкции каждому пересечению соответствует R -матрица. Таким образом, всякую линейную комбинацию полиномов таких зацеплений можно описать как элемент кольца многочленов, порожденного R -матрицами.

Описание проекторов в терминах R -матриц позволяет изучить связь между раскрашенными полиномами ХОМФЛИ и полиномами ХОМФЛИ в фундаментальном представлении, а также проверить, что процедура каблирования (определенная, как в разделе 2) согласуется с описанием проекторов в терминах путей. Кроме того, проекторы на одно и то же представление, действующие на разные нити косы и даже на косы с разным числом нитей, имеют аналогичные выражения через R -матрицы. Это означает, что достаточно найти выражение через R -матрицы, например, для проектора, помещенного в первый кабель, для которого известно выражение в терминах путей.

4.2.1. Метод тривиальных узлов. Наиболее прямолинейный (и представленный в работе [87]) способ вычислять проекторы основан на идее, что форма проектора должна зависеть не от узла, но только от рассматриваемого представления. Поэтому вид этих проекторов можно получить, рассматривая простейший, а именно тривиальный, узел. Его полином ХОМФЛИ в представлении Q может быть представлен

двумя способами. С одной стороны, он равен $S_Q^*(A, q)$. С другой стороны, он может быть представлен в виде линейной комбинации нескольких узлов и зацеплений, полученных при замыкании кос из $|Q|$ нитей, в фундаментальном представлении. Сравнение этих выражений дает уравнение для проектора на представление Q . При этом нужно использовать тот факт, что коэффициенты в выражении для проекторов могут зависеть от q , но не от A .

Рассмотрим случай $Q = 2$. Это простейший из случаев, в которых применима процедура каблирования. Если $|Q| = 2$, для описания тривиальных узлов в представлении Q нужно рассматривать двухнитевые узлы и зацепления. Среди полиномов ХОМФЛИИ двухнитевых зацеплений имеется не более двух линейно независимых, так как в этом случае разложение (1.2) содержит только два характера. В качестве соответствующих кос можно выбрать косу из двух нитей без пересечений (полином ХОМФЛИИ $H_0 = S_2^* + S_{1,1}^*$) и косу из двух нитей с одним пересечением (полином ХОМФЛИИ $H_1 = S_2^*q - S_{1,1}^*q^{-1}$) – последняя также является представлением тривиального узла. Полиномы ХОМФЛИИ всех остальных двухнитевых узлов представимы в виде линейных комбинаций двух выписанных полиномов с коэффициентами, зависящими от q . Соответствующие раскрашенные тривиальные узлы можно представить в виде косы из одной нити либо в представлении [2], либо в представлении [11]. Таким образом, чтобы построить проекторы, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$S_2^*(A, q) = p_2^0 H_0(A, q) + p_2^1 H_1(A, q), \quad S_{11}^*(A, q) = p_{11}^0 H_0(A, q) + p_{11}^1 H_1(A, q). \quad (4.1)$$

Эту систему можно решать двумя способами. При первом способе решения нужно использовать явную зависимость полиномов Шура от A и q . Если коэффициенты p не зависят от A , то система имеет единственное решение. Другой подход основан на идее, что процедура каблирования применима к расширенным полиномам ХОМФЛИИ [85]. Это означает, что уравнения (4.1) должны выполняться для коэффициентов перед каждым из полиномов Шура. Оба подхода приводят к одному и тому же решению

$$p_2^0 = \frac{1}{q(q + q^{-1})}, \quad p_2^1 = \frac{1}{q + q^{-1}}, \quad p_{11}^0 = \frac{q}{q + q^{-1}}, \quad p_{11}^1 = -\frac{1}{q + q^{-1}}.$$

Возвращаясь к определению полиномов H_0 и H_1 , можно написать выражение для проекторов через R -матрицы:

$$P_2 = \frac{1}{q(q + q^{-1})} + \frac{1}{q + q^{-1}} R_1, \quad P_{11} = \frac{q}{q + q^{-1}} - \frac{1}{q + q^{-1}} R_1. \quad (4.2)$$

Легко проверить, что построенные таким образом проекторы ортогональны:

$$\begin{aligned} P_2 P_{11} &= \frac{1}{(q + q^{-1})^2} (1 + R_1(q^{-1} - q) - R_1^2) = \\ &= \frac{1}{(q + q^{-1})^2} ((1 + R_1(q - q^{-1})) - (R_1(q - q^{-1}) + 1)) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно проверить, что выполняются свойства $P_2^2 = P_2$ и $P_{11}^2 = P_{11}$.

К сожалению, этот метод не позволяет получить ответ для проекторов на представления следующих уровней. Причина довольно проста. Например, представления уровня 3 должны получаться с помощью кабеля из трех нитей. Можно показать, что пространство полиномов ХОМФЛИ для кос из трех нитей является трехмерным относительно линейных комбинаций с коэффициентами, зависящими только от q . В то же время кольцо многочленов, порожденных R -матрицами, шестимерно, как обсуждалось в п. 3.3. В результате соотношений на полиномы тривиальных узлов недостаточно, чтобы восстановить все коэффициенты в проекторах. То же происходит и для старших представлений. Таким образом, неясно, как применять метод тривиальных узлов в случае старших представлений.

4.2.2. *От описания в терминах путей к описанию R -матриц.* Альтернативный подход состоит в том, чтобы получить искомые выражения для проекторов, используя уже известные формулы из п. 4.1. Можно попытаться найти комбинацию R -матриц (элемент кольца многочленов), матрица которой в базисе (3.2) совпадет с матрицей проектора, полученной из описания через пути. Такую комбинацию можно искать в виде разложения по базису на кольцо многочленов:

$$P_Q = \sum_I \alpha_I \Xi_I, \quad (4.3)$$

где Ξ_I – базисные элементы, α_I – коэффициенты, которые предстоит определить, а I – мультииндекс, определенный, как в (3.7) и пробегающий $|Q|!$ различных значений. В левой части равенства (4.3) стоит проектор в виде матрицы. Это может быть проектор на любое из изоморфных представлений Q , возникающих в разложении $[1]^{|Q|}$, либо на сумму нескольких таких представлений. Поскольку все элементы кольца многочленов распадаются на блоки, соответствующие неприводимым представлениям Q в разложении $[1]^{|Q|} = \sum_i N_{Q_i} Q_i$, число элементов в матрице Ξ_i , не равных нулю тождественно, равно сумме квадратов кратностей $\sum_i N_{Q_i}^2$. Это число совпадает с числом уравнений в (4.3), и можно показать, что оно в точности равно $|Q|!$, т.е. размерности кольца многочленов (согласно п. 3.3) и тем самым числу переменных α_I . Действительно, как хорошо известно из теории представлений, кратности вырождений можно получить из разложения степени $|Q|$ характера фундаментального представления $S_1^{|Q|} = t_1^{|Q|}$ по характеристам неприводимых представлений: $Q_i \vdash 1^{|Q|}$. Эти характеры удовлетворяют соотношениям

$$t_1^{|Q|} = \sum_{Q_i \vdash |Q|} N_{1^{|Q|}}^{Q_i} S_{Q_i}(t_k), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{|Q|} = \sum_{Q_i \vdash 1^{|Q|}} N_{1^{|Q|}}^{Q_i} S_{Q_i} \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right). \quad (4.4)$$

Кроме того, на характерах можно определить скалярное произведение [101]:

$$S_T \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right) S_Q(t_k) = \delta_{T,Q}.$$

Если применить это соотношение к равенствам (4.4), то получится тождество

$$|Q|! = \sum (N_{1^{|Q|}}^{Q_i})^2,$$

которое показывает, что число уравнений в (4.3) действительно равно числу определяемых коэффициентов α_I .

СЛУЧАЙ $|Q| = 2$. Кольцо многочленов имеет единственный генератор R_1 , который удовлетворяет уравнению $(R_1 - q)(R_1 + q^{-1}) = 0$. Согласно формулам (3.7) базис на этом кольце состоит из двух ($2! = 2$) элементов, которые можно выбрать как

$$\Xi_0 = \mathbf{1} = \text{diag}(1, 1), \quad \Xi_1 = R_1 = \text{diag}(q, -q^{-1}).$$

Следовательно, проекторы должны удовлетворять уравнениям

$$P_2 = \alpha_2^0 + \alpha_2^1 R_1 = \text{diag}(1, 0), \quad P_{11} = \alpha_{11}^0 + \alpha_{11}^1 R_1 = \text{diag}(0, 1).$$

Поскольку $[1]^2 = [2] + [11]$, каждый элемент кольца разбивается на два блока размера 1×1 – один для представления $[2]$, второй для представления $[11]$. В результате получаются в точности $1^2 + 1^2 = 2$ уравнения на $2! = 2$ неизвестных. Решения этих уравнений совпадают с (4.2):

$$P_2 = \frac{1 + qR_1}{q[2]_q}, \quad P_{11} = \frac{q - R_1}{[2]_q}.$$

СЛУЧАЙ $|Q| = 3$. Согласно формулам (3.6), (3.7) кольцо R -матриц имеет два генератора R_1, R_2 . Кольцо многочленов шестимерно ($3! = 6$), и базис может быть выбран как

$$\Xi_{00} = \mathbf{1}, \quad \Xi_{10} = R_1, \quad \Xi_{01} = R_2 R_1, \quad \Xi_{11} = R_1 R_2 R_1, \quad \Xi_{02} = R_2, \quad \Xi_{12} = R_1 R_2.$$

Проекторы должны удовлетворять уравнениям³⁾

$$\begin{aligned} P_3 &= \alpha_3^{00} + \alpha_3^{10} R_1 + \alpha_3^{02} R_2 + \alpha_3^{12} R_1 R_2 + \alpha_3^{01} R_2 R_1 + \alpha_3^{11} R_1 R_2 R_1 = \text{diag}(1, 0, 0, 0), \\ P_{21} &= \alpha_{21}^{00} + \alpha_{21}^{10} R_1 + \alpha_{21}^{02} R_2 + \alpha_{21}^{12} R_1 R_2 + \alpha_{21}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{21}^{11} R_1 R_2 R_1 = \text{diag}(0, 1, 0, 0), \\ P_{2\bar{1}} &= \alpha_{2\bar{1}}^{00} + \alpha_{2\bar{1}}^{10} R_1 + \alpha_{2\bar{1}}^{02} R_2 + \alpha_{2\bar{1}}^{12} R_1 R_2 + \alpha_{2\bar{1}}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{2\bar{1}}^{11} R_1 R_2 R_1 = \text{diag}(0, 0, 1, 0), \\ P_{111} &= \alpha_{111}^{00} + \alpha_{111}^{10} R_1 + \alpha_{111}^{02} R_2 + \alpha_{111}^{12} R_1 R_2 + \\ &\quad + \alpha_{111}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{111}^{11} R_1 R_2 R_1 = \text{diag}(0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Поскольку $[1]^3 = [3] + 2[21] + [111]$, каждый элемент кольца многочленов разбивается на три блока: блок размера 1×1 для представления $[3]$, блок размера 2×2 для представления $[21]$ и блок размера 1×1 для представления $[111]$. Таким образом, мы имеем в точности $1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$ уравнений на $3! = 6$ переменных. Решение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1}{q^3[2]_q[3]_q} (1 + qR_1 + qR_2 + q^2 R_1 R_2 + q^2 R_2 R_1 + q^3 R_1 R_2 R_1), \\ P_{21} &= \frac{1}{[3]_q} \left(1 + qR_1 - \frac{q^{-2}}{[2]_q} R_2 - \frac{q^{-1}}{[2]_q} (R_1 R_2 + R_2 R_1) - \frac{1}{[2]_q} R_1 R_2 R_1 \right), \\ P_{2\bar{1}} &= \frac{1}{[3]_q} \left(1 - q^{-1} R_1 + \frac{q^2}{[2]_q} R_2 - \frac{q}{[2]_q} (R_1 R_2 + R_2 R_1) + \frac{1}{[2]_q} R_1 R_2 R_1 \right), \\ P_{111} &= \frac{q^3}{[2]_q[3]_q} (1 - q^{-1} R_1 - q^{-1} R_2 + q^{-2} R_1 R_2 + q^{-2} R_2 R_1 - q^{-3} R_1 R_2 R_1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

³⁾В разложении куба фундаментального представления есть два представления 21 : происходящие из представления 2 и из представления 11 . По этой причине имеются два проектора на представление 21 , которые мы обозначаем как P_{21} и $P_{2\bar{1}}$.

Проектор ранга 2 на сумму двух изоморфных представлений [21] можно получить как сумму проекторов:

$$P_{21} = P_{\underline{21}} + P_{\overline{21}} = \frac{1}{[3]_q} (2 + (q - q^{-1})(R_1 + R_2) - R_1 R_2 - R_2 R_1). \quad (4.6)$$

Другой способ состоит в том, чтобы вместо (4.5) написать уравнение

$$P_{21} = \alpha_{21}^{00} + \alpha_{21}^{10} R_1 + \alpha_{21}^{02} R_2 + \alpha_{21}^{12} R_1 R_2 + \alpha_{21}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{21}^{11} R_1 R_2 R_1 = \text{diag}(0, 1, 1, 0),$$

решение которого приведет к тому же ответу.

Используя свойства (3.3)–(3.5) кольца многочленов, можно привести выражение (4.6) к более простому виду $P_{21} = (R_1 - R_2)^2 / [3]_q$.

СЛУЧАЙ $|Q| = 4$. Кольцо многочленов порождается тремя генераторами R_1 , R_2 и R_3 . Согласно (3.7) базис содержит 24 элемента, например

$$\begin{aligned} \Xi_{000} &= \mathbb{1}, & \Xi_{001} &= R_3 R_2 R_1, & \Xi_{002} &= R_3 R_2, & \Xi_{003} &= R_3, \\ \Xi_{100} &= R_1, & \Xi_{101} &= R_1 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{102} &= R_1 R_3 R_2, & \Xi_{103} &= R_1 R_3, \\ \Xi_{010} &= R_2 R_1, & \Xi_{011} &= R_2 R_1 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{012} &= R_2 R_1 R_3 R_2, & \Xi_{013} &= R_2 R_1 R_3, \\ \Xi_{110} &= R_1 R_2 R_1, & \Xi_{111} &= R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{112} &= R_1 R_2 R_1 R_3 R_2, & \Xi_{113} &= R_1 R_2 R_1 R_3, \\ \Xi_{020} &= R_2, & \Xi_{021} &= R_2 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{022} &= R_2 R_3 R_2, & \Xi_{023} &= R_2 R_3, \\ \Xi_{120} &= R_1 R_2, & \Xi_{121} &= R_1 R_2 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{122} &= R_1 R_2 R_3 R_2, & \Xi_{123} &= R_1 R_2 R_3. \end{aligned}$$

Поскольку $[1]^4 = [4] + 3[31] + 2[22] + 3[211] + [1111]$, каждый элемент кольца разбивается на пять блоков: блок размера 1×1 для представления [4], блок размера 3×3 для представления [31], блок размера 2×2 для представления [22], блок размера 3×3 для представления [211] и блок размера 1×1 для представления [1111]. Таким образом, мы имеем ровно $1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 24$ уравнения на $4! = 24$ неизвестных. Выражения для проекторов на каждое из представлений, возникающих в разложении $[1]^4$, довольно громоздкие. По этой причине мы приводим их в приложении А к работе [98], в то время как здесь ограничимся формулами для проекторов на представления [4], [1111], а также на пространства всех представлений [31], [22] и [211]:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{q^6 [4]_q!} (1 + q(R_1 + R_2 + R_3) + \\ &+ q^2(R_1 R_2 + R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_3 R_2 + R_1 R_3) + \\ &+ q^3(R_1 R_2 R_1 + R_2 R_3 R_2 + R_1 R_2 R_3 + R_2 R_1 R_3 + R_3 R_1 R_2 + R_3 R_2 R_1) + \\ &+ q^4(R_1 R_2 R_1 R_3 + R_1 R_2 R_3 R_2 + R_1 R_3 R_2 R_1 + R_2 R_1 R_3 R_2 + R_2 R_3 R_2 R_1) + \\ &+ q^5(R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 + R_1 R_2 R_3 R_2 R_1 + R_2 R_1 R_3 R_2 R_1) + q^6 R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 R_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{31} &= \frac{1}{q^2 [2][4]} (3 + (2q - q^{-1})(R_1 + R_2 + R_3) + \\ &+ (q^2 - 1)(R_1 R_2 + R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_3 R_2) + (q^2 - 2)R_1 R_3 + \\ &+ q^3(R_1 R_2 R_1 + R_2 R_3 R_2) - q(R_1 R_2 R_3 + R_2 R_1 R_3 + R_3 R_1 R_2 + R_3 R_2 R_1) - \\ &- R_2 R_1 R_3 R_2 - q(R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 + R_2 R_1 R_3 R_2 R_1) + \\ &+ q^3 R_1 R_2 R_3 R_2 R_1 - q^2 R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 R_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{22} = & \frac{1}{[3][2]^2} (2 + (q - q^{-1})(R_1 + R_2 + R_3) - (R_1 R_2 + R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_3 R_2) - \\
& - (q^2 + q^{-2})R_1 R_3 + (R_1 R_2 R_1 R_3 + R_1 R_2 R_3 R_2 + R_1 R_3 R_2 R_1 + R_2 R_3 R_2 R_1) + \\
& + (q^2 + q^{-2})R_2 R_1 R_3 R_2 - \\
& - (q - q^{-1})(R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 + R_1 R_2 R_3 R_2 R_1 + R_2 R_1 R_3 R_2 R_1) + \\
& + 2R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 R_1),
\end{aligned}$$

$$P_{211}(q) = P_{31}(-q^{-1}),$$

$$P_{1111}(q) = P_4(-q^{-1}).$$

4.2.3. *Вычисление проекторов с помощью характеристических уравнений.* Рассмотрим еще один способ построить проекторы как полиномы от R -матриц. Этот способ (в отличие от способа из предыдущего пункта) не позволяет получить полиномы ни наименьшей возможной степени, ни наименьшей возможной длины; зато он приводит к ответу с более понятной структурой, что важно для теоретического анализа.

Метод основан на том, что если известно характеристическое уравнение для линейного оператора,

$$\prod_{i=1}^n (A - \lambda_i) = 0, \quad (4.7)$$

то легко построить проекторы на подпространства, соответствующие каждому из собственных значений,

$$P_{\lambda_j} = \prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \quad (4.8)$$

(порядок множителей в выражениях (4.7) и (4.8) несущественен, поскольку все эти множители коммутируют), или на сумму таких подпространств,

$$P_{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}} = \sum_{l=1}^k P_{\lambda_{j_l}}. \quad (4.9)$$

При этом свойство $P_{\lambda_j}^2 = P_{\lambda_j}$ следует непосредственно из уравнения (4.7). В применении к R -матрицам этот метод имеет следующий недостаток: многие из собственных значений R -матрицы совпадают. Например, в случае фундаментального представления среди собственных значений имеются всего два различных: q и $-q^{-1}$. Следовательно, основная задача состоит в том, чтобы найти комбинации R -матриц, которые имеют достаточно много несовпадающих собственных значений; тогда можно будет “различить” все неприводимые представления в разложении $[1]^{|Q|}$. Чтобы найти такие комбинации и соответствующие характеристические уравнения, достаточно рассмотреть косы с $|Q|$ нитями. Естественно начать со случаев $|Q| = 2$ и $|Q| = 3$, а затем попытаться обобщить метод.

Поскольку R -матрицы разбиваются на блоки, соответствующие разным неприводимым представлениям, их характеристические уравнения можно записать в виде

$$\prod_{Q \vdash 1^{|Q|}} F_Q(R) = 0,$$

где функция F_Q определяет характеристическое уравнение $F_Q(P_Q R) = 0$ блока, соответствующего представлению Q .

СЛУЧАЙ $|Q| = 2$. В этом случае имеем одну R -матрицу, удовлетворяющую характеристическому уравнению

$$F_2(R_1)F_{11}(R_1) \equiv (R_1 - q)(R_1 + q^{-1}) = 0. \quad (4.10)$$

В этом уравнении содержится достаточно информации, чтобы построить оба проектора:

$$P_2 = \frac{R_1 + q^{-1}}{q + q^{-1}}, \quad P_{11} = \frac{R_1 - q}{-q^{-1} - q}. \quad (4.11)$$

Этот результат совпадает с полученной ранее формулой (4.2).

СЛУЧАЙ $|Q| = 3$. В этом случае мы имеем две матрицы R_1 и R_2 , удовлетворяющие одному и тому же характеристическому уравнению (3.5). Проекторы, полученные из характеристического уравнения для первой из R -матриц, позволяют “отличить” представления $[3]$ и $[21]$, симметрические по первой паре нитей, от представлений $[2\bar{1}]$ и $[111]$, антисимметрических по первой паре нитей. Проекторы, полученные из уравнения для второй из R -матриц, позволяют отличить аналогичные группы представлений относительно второй пары нитей. Этого недостаточно, чтобы построить проекторы на каждое из представлений $[3]$, $[21]$ и $[111]$. Таким образом, требуется построить комбинации R -матриц, которые позволят найти все необходимые проекторы. В случае $|Q| = 3$ примером подходящей комбинации является $(R_1 - R_2)^2$. Используя явные выражения для R_1 и R_2 , можно установить, что эта комбинация удовлетворяет характеристическому уравнению

$$(R_1 - R_2)^2((R_1 - R_2)^2 - (q^2 + 1 + q^{-2})) = 0,$$

где представлению $[3]$, как и представлению $[111]$, соответствует собственное значение 0, в то время как обоим представлениям $[21]$ соответствует собственное значение $q^2 + 1 + q^{-2}$. Отсюда можно получить проектор P_{21} :

$$P_{21} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{q^2 + 1 + q^{-2}}. \quad (4.12)$$

Используя также уравнение (4.10), можно получить все четыре проектора:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{(R_1 + q^{-1})((q^2 + 1 + q^{-2}) - (R_1 - R_2)^2)}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}, \\ P_{2\bar{1}} &= \frac{(R_1 + q^{-1})(R_1 - R_2)^2}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}, \\ P_{2\bar{1}} &= \frac{(q - R_1)(R_1 - R_2)^2}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}, \\ P_{111} &= \frac{(q - R_1)((q^2 + 1 + q^{-2}) - (R_1 - R_2)^2)}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2.4. *Торические произведения R -матриц.* Остается нерешенным вопрос, существует ли универсальный метод построения проекторов на произвольные представления с помощью характеристических уравнений. Это было бы возможно, если бы удалось найти комбинации R -матриц, собственные значения которых известны для произвольного представления и которые имели бы достаточно много несовпадающих собственных значений, чтобы “различить” все неприводимые представления на соответствующем уровне. Очевидным кандидатом на такую комбинацию является произведение

$$\mathfrak{R}_{|Q|} \equiv \prod_{i=1}^{|Q|-1} R_{|Q|-i}.$$

Именно это произведение возникает при изучении торических узлов. Из формулы Россо–Джонса известно, что его собственные значения равны

$$\lambda_{Q,j} = q^{\varkappa_Q/|Q|} \Lambda_{Q,j}, \quad j = 1, \dots, N_Q,$$

где коэффициенты $\Lambda_{Q,j}$ – это некоторые не зависящие от q числа, неявно заданные правилом Адамса [58]–[61]. Эти коэффициенты на самом деле являются корнями из единицы степени $|Q|$, $\Lambda_{Q,j} = e^{2\pi i k/|Q|}$, причем кратность каждого корня нетривиальным образом зависит от Q . Таким образом,

$$|\lambda_{Q,j}| = q^{\varkappa_Q/|Q|}, \quad j = 1, \dots, N_Q.$$

Для таких произведений R -матриц множества собственных значений, соответствующих различным представлениям, не пересекаются вплоть до уровня $|Q| = 5$. Следовательно, проекторы на все неприводимые представления с $|Q|$ клетками в диаграмме Юнга можно получить из единственного уравнения для $\mathfrak{R}_{|Q|}$. Этот метод перестает работать в случае $|Q| = 6$, где $\varkappa_{411} = \varkappa_{33} = 3$, в результате чего нужны дополнительные уравнения. Кроме того, даже если все собственные значения различны, их явный вид неизвестен для произвольного представления. Собственные значения нужно либо определять с помощью правила Адамса, либо непосредственно вычислять для каждого $|Q|$, как это сделано в работах [86], [90]. Более того, даже в простейших случаях вид собственных значений весьма сложен: выражения содержат дробные степени величины q и корни из единицы. В силу этих проблем неясно, как построить проектор на произвольное представление с помощью торических произведений $\mathfrak{R}_{|Q|}$. Мы ограничимся несколькими примерами использования таких произведений.

Поскольку случай $|Q| = 2$ тривиален, мы начнем со случая $|Q| = 3$: имеем

$$F_3(R_2 R_1) F_{21}(R_2 R_1) F_{111}(R_2 R_1) \equiv (R_2 R_1 - q^2)((R_2 R_1)^2 + R_2 R_1 + 1)(q^2 R_2 R_1 - 1) = 0. \quad (4.14)$$

Соответствующие проекторы на симметрическое и антисимметрическое представления получаются непосредственно:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{((R_2 R_1)^2 + R_2 R_1 + 1)(R_2 R_1 - q^{-2})}{(q^4 + q^2 + 1)(q^2 - q^{-2})}, \\ P_{111} &= \frac{(R_2 R_1 - q^2)((R_2 R_1)^2 + R_2 R_1 + 1)}{(q^{-2} - q^2)(q^{-4} + q^{-2} + 1)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Однако для оставшегося представления простая конструкция типа (4.8) приводит к оператору $P \equiv (R_2 R_1 - q^2)(q^2 R_2 R_1 - 1)$, который не удовлетворяет условию $P^2 = \text{const} \cdot P$. Следовательно, этот оператор не является проектором даже с точностью до нормировки, а представляет собой некоторый линейный оператор, который обращает в нуль представления [3] и [111] и каким-то образом вращает два изоморфных представления [21]. Чтобы получить проектор с помощью формулы (4.9), нужно переписать уравнение (4.14) как

$$(R_2 R_1 - q^2)(R_2 R_1 - e^{2\pi i/3})(R_2 R_1 - e^{4\pi i/3})(q^2 R_2 R_1 - 1) = 0.$$

После этого проектор P_{21} можно найти в виде суммы:

$$\begin{aligned} P_{21} &= \frac{(R_2 R_1 - q^2)(q^2 R_2 R_1 - 1)}{e^{2\pi i/3} - e^{4\pi i/3}} \times \\ &\times \left(\frac{R_2 R_1 - e^{4\pi i/3}}{(e^{2\pi i/3} - q^2)(q^2 e^{2\pi i/3} - 1)} - \frac{R_2 R_1 - e^{2\pi i/3}}{(e^{4\pi i/3} - q^2)(q^2 e^{4\pi i/3} - 1)} \right) = \\ &= -\frac{(R_2 R_1 - q^2)(q^2 R_2 R_1 - 1)(R_2 R_1 + 1)}{q^4 + q^2 + 1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В этом выражении слагаемые суть проекторы ранга 1 на каждое из изоморфных представлений [21], но эти представления не являются представлениями [21], [21] из стандартного базиса (3.2), использованного в настоящей работе. Используя свойства R -матриц, описанные в п. 3.3, можно показать, что соотношения (4.5), соотношения (4.15), (4.16) и соотношение (4.13) дают три эквивалентных ответа для проекторов.

В случае $|Q| = 4$ соответствующее произведение включает в себя три R -матрицы, $\mathfrak{R}_3 \equiv R_3 R_2 R_1$, и удовлетворяет характеристическому уравнению

$$F_4(\mathfrak{R}_3)F_{31}(\mathfrak{R}_3)F_{22}(\mathfrak{R}_3)F_{211}(\mathfrak{R}_3)F_{1111}(\mathfrak{R}_3) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_4(\mathfrak{R}_3) &= q^3 - \mathfrak{R}_3, & F_{31}(\mathfrak{R}_3) &= (q + \mathfrak{R}_3)(q^2 + \mathfrak{R}_3^2), & F_{22}(\mathfrak{R}_3) &= \mathfrak{R}_3^2 - 1, \\ F_{211}(\mathfrak{R}_3|q) &= F_{31}(\mathfrak{R}_3|-q^{-1}), & F_{1111}(\mathfrak{R}_3|q) &= F_4(\mathfrak{R}_3|-q^{-1}) \end{aligned}$$

(в последних двух равенствах мы явно указали, что $\mathfrak{R}_3$ зависит от q и характеристические уравнения для разных представлений связаны заменой q на $-q^{-1}$). Таким образом, полное характеристическое уравнение имеет вид

$$(q^3 - \mathfrak{R}_3) \cdot (q + \mathfrak{R}_3)(q^2 + \mathfrak{R}_3^2) \cdot (\mathfrak{R}_3^2 - 1) \cdot (1 - q\mathfrak{R}_3)(1 + q^2\mathfrak{R}_3^2) \cdot (1 - q^3\mathfrak{R}_3) = 0.$$

Здесь знаки умножения “ $\cdot$ ” разделяют множители, относящиеся к разным неприводимым представлениям. Согласно соотношениям (4.8) и (4.9) проекторы можно записать как

$$P_4 = \prod_{\substack{Q_i \vdash 1^4, \\ Q_i \neq 4}} \frac{F_{Q_i}(\mathfrak{R}_3)}{F_{Q_i}(q^3)} = \frac{(q + \mathfrak{R}_3)(q^2 + \mathfrak{R}_3^2)(\mathfrak{R}_3^2 - 1)(q\mathfrak{R}_3 - 1)(q^2\mathfrak{R}_3^2 + 1)(q^3\mathfrak{R}_3 + 1)}{q^3(q^2 + 1)(q^{12} - 1)(q^{16} - 1)},$$

$$\begin{aligned}
P_{31} &= \prod_{\substack{Q_i \vdash 1^4, \\ Q_i \neq 31}} F_{Q_i}(\mathfrak{R}_3) \left(\frac{\mathfrak{R}_3 + q^2}{F'_{41}(-q) \prod_{Q_i \vdash 1^4, Q_i \neq 31} F_{Q_i}(-q)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\mathfrak{R}_3 + q)(\mathfrak{R}_3 + iq)}{F'_{41}(iq) \prod_{Q_i \vdash 1^4, Q_i \neq 31} F_{Q_i}(iq)} + \frac{(\mathfrak{R}_3 + q)(\mathfrak{R}_3 - iq)}{F'_{41}(-iq) \prod_{Q_i \vdash 1^4, Q_i \neq 31} F_{Q_i}(-iq)} \right) = \\
&= \frac{(\mathfrak{R}_3 - q^3)(\mathfrak{R}_3^2 - 1)}{q^3(q^2 + 1)(q^4 - 1)(q^{16} - 1)} \times \\
&\quad \times (q^8 \mathfrak{R}_3^2 - q^4 \mathfrak{R}_3^2 + \mathfrak{R}_3^2 - q^5 \mathfrak{R}_3 + q \mathfrak{R}_3 + q^2)(q \mathfrak{R}_3 - 1)(q^2 \mathfrak{R}_3^2 + 1)(q^3 \mathfrak{R}_3^2 + 1), \\
P_{22} &= \prod_{\substack{Q_i \vdash 1^4, \\ Q_i \neq 22}} F_{Q_i}(\mathfrak{R}_3) \left(\frac{\mathfrak{R}_3 + 1}{F'_{22}(1) \prod_{Q_i \vdash 1^4, Q_i \neq 22} F_{Q_i}(1)} + \frac{\mathfrak{R}_3 - 1}{F'_{22}(-1) \prod_{Q_i \vdash 1^4, Q_i \neq 22} F_{Q_i}(-1)} \right) = \\
&= \frac{(q^3 - \mathfrak{R}_3)(q + \mathfrak{R}_3)(q^2 + \mathfrak{R}_3^2)(1 - q \mathfrak{R}_3)(1 + q^2 \mathfrak{R}_3^2)(1 - q^3 \mathfrak{R}_3)}{(q^4 - 1)^2(q^4 + q^2 + 1)}.
\end{aligned}$$

Такую же процедуру можно провести в случаях $|Q| = 5$ и $|Q| = 7$. Однако этот метод не работает для $|Q| = 6$ и большинства старших представлений – в этих случаях различные представления могут иметь одинаковые $\varkappa_Q$, так, для $|Q| = 6$ это имеет место для представлений [411] и [33]. Следовательно, для этих представлений собственные значения торических произведений также совпадают, а именно $|\lambda_{411}| = |\lambda_{33}| = q$. В результате проекторы, построенные описанным выше способом, “не различают” эти два представления. Действительно,

$$\begin{aligned}
F_{411}(\mathfrak{R}_3) &= (\mathfrak{R}_3^2 - q^2)^2 (\mathfrak{R}_3^2 - q \mathfrak{R}_3 + q^2) (\mathfrak{R}_3^4 + q^2 \mathfrak{R}_3^2 + q^4), \\
F_{33}(\mathfrak{R}_3) &= (\mathfrak{R}_3^2 - q^2)(q^2 - q \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_3^2).
\end{aligned}$$

Так как все собственные значения для представления [33] также являются собственными значениями для представления [411], с помощью этих формул невозможно построить даже проектор ранга 1 на какое-то из изоморфных представлений [33]. Это означает, что необходимы другие уравнения. Было бы естественно рассмотреть уравнения того же типа для предыдущих уровней, т.е. для $|Q| \leq 6$, и тем самым использовать уже известные ответы для проекторов на представления предыдущих уровней. Однако торические произведения невозможно использовать непосредственно таким образом, поскольку собственные векторы матрицы $\mathfrak{R}_{|Q|}$ не являются, вообще говоря, собственными векторами матрицы $\mathfrak{R}_{|Q|+1}$.

4.2.5. Зацепленные произведения R -матриц. Еще один класс произведений R -матриц, для которых собственные значения известны в общем случае, – это операторы, которые мы будем называть зацепленными произведениями:

$$\mathfrak{R}_{n,m} \mathfrak{R}_{n,m}^\dagger = \left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n R_{n+i-j} \right) \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m R_{m+i-j} \right). \quad (4.17)$$

Такие произведения возникают при изучении двухнитевых зацеплений. Если поместить представление размера n на первую нить и представление размера m на

вторую, тогда при процедуре каблирования каждую пару $\mathcal{R}_{Q_1 Q_2} \mathcal{R}_{Q_2 Q_1}$ следует заменить на произведение (4.17). Как мы подробно обсудим в разделе 6, всякое произведение такого типа удовлетворяет следующему характеристическому уравнению:

$$\prod_{\substack{T_1 \vdash 1^m, T_2 \vdash 1^n, \\ Q \vdash 1^{m+n}}} (\mathfrak{R}_{n,m} \mathfrak{R}_{n,m}^\dagger - q^{2\kappa_Q - 2\kappa_{T_1} - 2\kappa_{T_2}}) = 0.$$

Эти зацепленные комбинации более громоздки, чем торические, но по некоторым причинам они удобнее. Прежде всего, их собственные значения известны в явном виде для произвольных представлений, причем соответствующие выражения проще, чем в случае торических произведений: они оказываются просто целыми степенями величины q . Кроме того, стандартный базис (3.2), использованный в настоящей работе, состоит из собственных векторов зацепленного произведения. Описанные свойства позволяют построить рекуррентную процедуру вычисления проекторов.

В простейшем случае $T_1 = [1]$. Тогда $\mathfrak{R}_{1,|T_2|}$ есть просто торическое произведение:

$$\mathfrak{R}_{1,|T_2|} \mathfrak{R}_{1,|T_2|}^\dagger \equiv \mathfrak{R}_{|T_2|} \mathfrak{R}_{|T_2|}^\dagger.$$

Как и прежде, мы начнем с некоторых примеров, после чего обсудим возможность обобщения.

В случае $|Q| = 2$ характеристическое уравнение оказывается весьма простой деформацией аналогичного уравнения, выписанного выше: мы имеем

$$F_2 = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^{2\kappa_2} = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^2, \quad F_{11} = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^{2\kappa_{11}} = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^{-2},$$

следовательно,

$$F_2 F_{11} = (\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^{-2}) = 0,$$

откуда получаются следующие выражения для проекторов:

$$P_2 = \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^{-2}}{q^2 - q^{-2}}, \quad P_{11} = \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger - q^2}{q^{-2} - q^2}.$$

Эти выражения приводятся к ответу (4.11), который получается при использовании других описанных здесь способов, если применить тождество

$$\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_2^\dagger = R_1^2 = (q - q^{-1}) R_1 + 1.$$

В первом нетривиальном случае $|Q| = 3$ мы имеем в характеристическом уравнении

$$\begin{aligned} F_3 &= \mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{2\kappa_3 - 2\kappa_2} = \mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^4, \\ F_{21} &= (\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{2\kappa_{21} - 2\kappa_3})(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{2\kappa_{21} - 2\kappa_{11}}) = (\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^2), \\ F_{111} &= \mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{2\kappa_{111} - 2\kappa_{11}} = \mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-4}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$F_3 F_{21} F_{111} = (\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^4)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-4}) = 0.$$

Проекторы ранга 1 на полностью симметрическое и полностью антисимметрическое представления суть

$$P_3 = P_{q^4}^{(3)} = \frac{(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-4})}{(q^4 - q^{-2})(q^4 - q^2)(q^4 - q^{-4})},$$

$$P_{111} = P_{q^{-4}}^{(3)} = \frac{(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^4)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-2})(q^{-4} - q^2)}{(q^{-4} - q^4)(q^{-4} - q^{-2})(q^{-4} - q^2)},$$

где $P_\lambda^{(m)}$ – проектор на собственное значение λ , полученный из m -нитевого уравнения. Оставшийся проектор имеет ранг два и равен сумме двух проекторов ранга 1:

$$\begin{aligned} P_{21} &= P_{q^2}^{(3)} + P_{q^{-2}}^{(3)} = \frac{(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^4)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-4})}{(q^2 - q^4)(q^2 - q^{-2})(q^2 - q^{-4})} + \\ &\quad + \frac{(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^4)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-4})}{(q^{-2} - q^4)(q^{-2} - q^2)(q^{-2} - q^{-4})} = \\ &= - \frac{(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^4)(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^{-4})(\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_3^\dagger - q^2 - q^{-2})}{(q - q^{-1})(q^3 - q^{-3})}. \end{aligned}$$

В случае $|Q| = 4$ характеристическое уравнение определяется функциями

$$\begin{aligned} F_4 &= \mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{2\kappa_4 - 2\kappa_3} = \mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^6, \\ F_{31} &= (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{2\kappa_{31} - 2\kappa_3})(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{2\kappa_{31} - 2\kappa_{21}})^2 = (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)^2, \\ F_{22} &= (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{2\kappa_{22} - 2\kappa_{21}})^2 = (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - 1)^2, \\ F_{211} &= (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{2\kappa_{211} - 2\kappa_{21}})^2 (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{2\kappa_{211} - 2\kappa_{111}}) = (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)^{-2}, \\ F_{1111} &= \mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{2\kappa_4 - 2\kappa_3} = \mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-6}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} F_4 F_{31} F_{22} F_{211} F_{1111} &= \\ &= (\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^6)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - 1)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-6}) = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В этом случае одного выписанного уравнения уже недостаточно, чтобы найти все проекторы, поскольку одно и то же множество собственных значений может соответствовать разным неприводимым представлениям. Именно, оба неприводимых представления $[31]$ и $[211]$ соответствуют паре собственных значений $q^{\pm 2}$. Эту проблему можно решить, заметив, что каждому множителю в (4.18) соответствует определенный путь, т. е. последовательность неприводимых представлений предыдущих уровней. Например, в F_{31} двукратному множителю с q^2 соответствует пара путей $[1] \rightarrow [\cdot] \rightarrow [21] \rightarrow [31]$, где $[\cdot] = [2]$ или $[\cdot] = [11]$, а множителю с q^{-2} – путь $[1] \rightarrow [2] \rightarrow [3] \rightarrow [31]$; в F_{211} множителю с q^2 отвечает путь $[1] \rightarrow [11] \rightarrow [21] \rightarrow [31]$, а двукратному множителю с q^{-2} – путь $[1] \rightarrow [\cdot] \rightarrow [21] \rightarrow [211]$, где $[\cdot] = [2]$ или $[\cdot] = [11]$. Это означает, что искомые проекторы можно найти, используя уже

построенные проекторы на представления предыдущих уровней:

$$\begin{aligned}
 P_{31} &= P_{q^{-2}}^{(4)} P_3 + P_{q^2}^{(4)} P_{21} = \\
 &= \frac{(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^6)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - 1)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-6})}{(q^4 - q^{-4})(q^2 - q^{-2})^2(q - q^{-1})} \times \\
 &\quad \times (q^3(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)P_3 + q^{-3}(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-2})P_{21}), \\
 P_{211} &= P_{q^{-2}}^{(4)} P_{21} + P_{q^2}^{(4)} P_{111} = \\
 &= \frac{(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^6)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - 1)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-6})}{(q^4 - q^{-4})(q^2 - q^{-2})^2(q - q^{-1})} \times \\
 &\quad \times (q^3(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)P_{21} + q^{-3}(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-2})P_{111}).
 \end{aligned}$$

Все остальные проекторы строятся так же, как в предыдущих случаях:

$$\begin{aligned}
 P_4 &= P_{q^6}^{(4)} = \frac{(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^6)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - 1)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-6})}{(q^6 - q^2)(q^6 - q^{-2})(q^6 - 1)(q^6 - q^{-6})}, \\
 P_{22} &= P_1^{(4)} = \frac{(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^6)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-6})}{(1 - q^6)(1 - q^2)(1 - q^{-2})(1 - q^{-6})}, \\
 P_{1111} &= P_{q^{-6}}^{(4)} = \frac{(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^6)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^2)(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - q^{-2})(\mathfrak{R}_4 \mathfrak{R}_4^\dagger - 1)}{(q^{-6} - q^6)(q^{-6} - q^2)(q^{-6} - q^{-2})}.
 \end{aligned}$$

4.2.6. Произвольные представления. В принципе, системы уравнений для зацепленных произведений $\mathfrak{R}_{|Q|} \mathfrak{R}_{|Q|}^\dagger$ достаточно, чтобы построить проектор на произвольное представление. Пусть, например, представление Q получено из представления T добавлением клетки (i, j) к диаграмме Юнга, тогда $\varkappa_Q = \varkappa_T + j - i$. Следовательно, для всякого T все полученные таким образом представления Q имеют различные значения $\varkappa_Q$. Если в качестве представлений Q выбраны собственные векторы матрицы $\mathfrak{R}_{|Q|} \mathfrak{R}_{|Q|}^\dagger$, то проекторы получаются из уравнения

$$\prod_{i,j} (P_T \mathfrak{R}_{|Q|} \mathfrak{R}_{|Q|}^\dagger P_T - q^{2j-2i}) = 0$$

и имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_Q|_{Q=T \cup (k,l)} &= \sum_{i,j} \prod_{(i,j) \neq (k,l)} \frac{P_T \mathfrak{R}_{|Q|} \mathfrak{R}_{|Q|}^\dagger P_T - q^{2j-2i}}{q^{2l-2k} - q^{2j-2i}} = \\
 &= \sum_{i,j} \prod_{(i,j) \neq (k,l)} \frac{\mathfrak{R}_{|Q|} \mathfrak{R}_{|Q|}^\dagger - q^{2j-2i}}{q^{2l-2k} - q^{2j-2i}} P_T,
 \end{aligned}$$

где все произведения вычисляются по всевозможным добавлениям клетки (с координатами (i, j)) к диаграмме Юнга T , в результате которых снова получается диаграмма Юнга. Данная формула позволяет вычислить проектор на всё пространство представлений Q , возникающих одновременно в разложении $1^{|Q|}$ и в разложении $1 \otimes Q$. Чтобы получить проектор на одно из представлений Q , возникающих в разложении $1^{|Q|}$, нужно вместо P_T подставить проектор на одно из представлений T , возникающих в разложении $1^{|T|}$. Чтобы, напротив, получить проектор на всё

пространство представлений Q , возникающих в разложении $1^{|Q|}$, нужно вычислить сумму по всем возможным T :

$$P_Q = \sum_{T: |T|=|Q|-1} P_Q|_{Q=T \cup (k,l)}.$$

Приведенные формулы задают рекуррентную процедуру, позволяющую построить проектор на произвольное представление.

4.2.7. Полностью (анти)симметрические представления. Метод, описанный выше, позволяет вычислить проектор на произвольное представление. Неясно, однако, как написать общую формулу для проекторов. Такая формула все же существует для простейшего класса представлений, а именно для полностью симметрических и полностью антисимметрических представлений. Эти проекторы имеют вид

$$P_{[r]} = P_{[r-1]} \left(1 + \sum_{j=1}^k q^j \prod_{i=1}^j R_{k-i+1} \right) = \prod_{k=1}^{r-1} \left(1 + \sum_{j=1}^k q^j \prod_{i=1}^j R_{k-i+1} \right),$$

или

$$P_{[r]} = \sum_{k=1}^{r!} q^{l_k} \Xi_k,$$

где сумма берется по всем $r!$ независимым элементам Ξ_k (см. формулы (3.6), (3.7)) кольца многочленов, а l_k есть число R -матриц, входящих в Ξ_k .

Проектор на полностью антисимметрические представления выглядит аналогичным образом:

$$P_{[1^r]}(q) = P_{[r]}(-q^{-1}).$$

5. ОСНАЩЕНИЕ В ПРОЦЕДУРЕ КАБЛИРОВАНИЯ

$\mathcal{R}$ -матрицы определены с точностью до общего множителя, поскольку таковой не изменяет уравнение Янга–Бакстера. Этот множитель может быть выбран по-разному, и от этого зависит ответ для полиномов ХОМФЛИ. С точки зрения теории Черна–Саймонса это означает, что вильсоновское среднее соответствует оснащеному узлу [16], [100], и выбор общего множителя отвечает выбору оснащения. Поэтому выбор общего множителя и называется оснащением. Можно показать, что различные оснащения должны отличаться друг от друга на множитель $q^{\varkappa_T + N|T|/2}$ [48].

В конкретных случаях оснащение может быть выбрано по-разному. Один из распространенных способов приходит из теории представлений, где собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы равны $q^{\varkappa_Q - N|Q|/2 - \varkappa_{T_1} + N|T_1|/2 - \varkappa_{T_2} + N|T_2|/2}$, а T_1 и T_2 соответствуют представлениям, помещенным на пересекающиеся нити, Q – одно из неприводимых представлений в разложении $T_1 \otimes T_2$ (число различных представлений Q равно числу различных собственных значений). При таком оснащении собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы равны q , $-q^{-1}$ в фундаментальном представлении и q^4 , -1 , q^{-2} в первом симметрическом представлении. Такое оснащение называется вертикальным, и в нем процедура каблирования дает в точности те же ответы, что и прямое вычисление через раскрашенные $\mathcal{R}$ -матрицы.

Чтобы обеспечить топологическую инвариантность, нужно выбрать другое оснащение (оно называется топологическим и использовано, например, в работе [86] при

вычислении полиномов узлов). Тогда собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы задаются формулой $q^{\varkappa_Q - 4\varkappa_T} A^{-|T|} = q^{\varkappa_Q - 4\varkappa_T - N|T|}$ (здесь $T_1 = T_2 = T$). Топологическое оснащение отличается от вертикального на $q^{-2\varkappa_T - N|T|}$. В топологическом оснащении собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы равны q/A , $-1/qA$ в фундаментальном представлении и q^2/A^2 , $1/A^2 q^2$, $1/A^2 q^4$ в первом симметрическом представлении.

Топологическое оснащение рассматривается только для случая $T_1 = T_2$, что отвечает смыслу этого оснащения. Топологическое оснащение должно давать один и тот же ответ для всех кос, представляющих данный узел и имеющих, вообще говоря, различное число пересечений. Именно это достигается за счет специального (приведенного выше) выбора общего множителя. Если же две нити несут различные представления, то они с необходимостью принадлежат различным компонентам зацепления. Как известно из топологии [100], алгебраическое число пересечений между различными компонентами зацепления не может измениться ни при каких гладких деформациях. Таким образом, в топологическое оснащение не нужно вводить какой-либо множитель, учитывающий пересечения между различными компонентами зацепления. Случай, когда разные компоненты несут одно и то же представление, исключения не составляет: в топологическое оснащение вносят вклад только самопересечения каждой из связных компонент.

6. ПРОЦЕДУРА КАБЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ДВУХНИТЕВЫХ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

В случае двухнитевых узлов раскрашенные полиномы ХОМФЛИ известны для произвольного представления, так как для их вычисления необходима только диагональная $\mathcal{R}$ -матрица. Поэтому случай двух нитей удобен в качестве проверки на согласованность выражений для проекторов и собственных значений $\mathcal{R}$ -матрицы в различных представлениях. Общая формула такова:

$$H_{T_1 T_2}^{T[2,n]} = \text{Tr}_{T_1 \otimes T_2} ((\mathcal{R}_{T_1 T_2} \mathcal{R}_{T_2 T_1})^{n/2}) = \frac{1}{q^{n\varkappa_{T_1} + n\varkappa_{T_2}}} \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} (\pm q^{\varkappa_{Q_i}})^n N_{T_1 T_2}^{Q_i} S_{Q_i}^*, \quad (6.1)$$

где $q^{\varkappa_Q}$ – собственные значения двухнитевой $\mathcal{R}$ -матрицы из п. 3.1, а сумма берется по всем неприводимым представлениям Q_i в разложении произведения $T_1 \otimes T_2$; при этом представление Q_i имеет кратность $N_{T_1 T_2}^{Q_i}$. Коэффициент перед суммой приводит к ответу в вертикальном оснащении (см. раздел 5).

Процедура каблирования дает следующую формулу:

$$H_{T_1 T_2}^{T[2,n]} = \text{Tr}_{1 \otimes (|T_1| + |T_2|)} \left(P_{T_1 T_2} \left(\prod_{i=1}^{T_2} \prod_{j=1}^{T_1} R_{|T_1|+i-j} \prod_{i=1}^{T_1} \prod_{j=1}^{T_2} R_{|T_2|+i-j} \right)^{n/2} \right).$$

Необходимо разделить два случая: двухнитевые узлы и двухнитевые зацепления. Изучение зацеплений позволяет определить вид собственных значений в случае различных представлений на разных компонентах зацепления; заметим, что это невозможно при изучении узлов. С другой стороны, так как двухнитевые узлы всегда содержат четное число пересечений, с помощью процедуры каблирования для зацеплений невозможно определить знаки собственных значений – для этого необходимо рассмотреть двухнитевые узлы.

6.1. Двухнитевые зацепления. В этом случае имеются две $\mathcal{R}$ -матрицы, а именно $\mathcal{R}_{T_1 T_2}$ и $\mathcal{R}_{T_2 T_1}$. Как линейные операторы они различны, поскольку действуют в разных пространствах:

$$\mathcal{R}_{T_1 T_2} : T_1 \otimes T_2 \rightarrow T_2 \otimes T_1, \quad \mathcal{R}_{T_2 T_1} : T_2 \otimes T_1 \rightarrow T_1 \otimes T_2.$$

Их матрицы, однако, совпадают с точностью до транспонирования: $\mathcal{R}_{T_1 T_2} = \mathcal{R}_{T_2 T_1}^\dagger$. Выражение (6.1) для зацепления, имеющего $2n$ пересечений, можно переписать как

$$H_{T_1 T_2}^{T[2,2n]} = (q^{\varkappa_{T_1} + \varkappa_{T_2}})^{-2n} \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} N_{T_1 T_2}^{Q_i} q^{2n \varkappa_{Q_i}} S_{Q_i}^* = \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} H_{T_1 T_2 | Q_i}^{[2,2n]} S_{Q_i}^*.$$

Определить знаки собственных значений с помощью процедуры каблирования для двухнитевых зацеплений невозможно, так как в написанную формулу все собственные значения входят в четных степенях. С помощью процедуры каблирования можно получить точно такой же ответ, причем даже для отдельных коэффициентов $H_{T_1 Q_2 | Q_i}^{[2,2n]}$ в разложении полинома ХОМФЛИ по характеристам:

$$H_{T_1 T_2 | Q_i}^{T[2,2n]} = N_{T_1 T_2}^{Q_i} q^{2n \varkappa_{Q_i} - 2n \varkappa_{T_1} - 2n \varkappa_{T_2}}$$

(достаточно проверить это равенство для $2 \leq 2n \leq \min(\text{rank } P_{T_1}, \text{rank } P_{T_2})$). С помощью процедуры каблирования можно также увидеть, что выполняется как дуальность уровень–ранг,

$$H_{T_1 T_2 | Q_i}^{T[2,2n]}(q) = H_{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2 | \tilde{Q}_i}^{T[2,2n]}(-q^{-1}),$$

где $\tilde{T}$ обозначает представление, диаграмма Юнга которого есть транспонированная по отношению к диаграмме представления T , так и свойство симметрии по перестановке представлений,

$$H_{T_2 T_1 | Q_i}^{T[2,2n]} = H_{T_1 T_2 | Q_i}^{T[2,2n]}.$$

Эти свойства описаны, например, в работах [86], [87]. В данном случае они справедливы в силу того, что $N_{T_1 T_2}^{Q_i} = N_{T_2 T_1}^{Q_i} = N_{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2}^{\tilde{Q}_i}$ и $\varkappa_Q = -\varkappa_{\tilde{Q}}$. Можно также проверить, что выбор различных представлений, возникающих в разложении $1^{\otimes |T_1| + |T_2|}$ и изоморфных T_1 и T_2 , не изменяет ответа.

Абсолютные величины собственных значений раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц приведены в приложении В работы [98]. Кратности различных неприводимых представлений легко определить с помощью теории представлений, а именно используя следующее свойство характеров:

$$S_{T_1} S_{T_2} = \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} N_{T_1 T_2}^{Q_i} S_{Q_i}.$$

Например,

$$S_{31} S_{31} = S_{62} + S_{611} + S_{53} + 2S_{521} + S_{5111} + S_{44} + 2S_{431} + S_{422} + S_{4211} + S_{332} + S_{3311}.$$

Почти все рассмотренные представления имеют тривиальные кратности 0 или 1. Нетривиальные кратности при рассмотрении двухнитевых узлов встречаются начиная с представлений размера 3. Список всех представлений с нетривиальными

кратностями в случае представлений T_1 и T_2 размера 3 и 4 приведен в приложении В работы [98].

В разложении $1^{\otimes |T_1|+|T_2|}$ содержатся некоторые неприводимые представления, которые не присутствуют в разложении $T_1 \otimes T_2$. Для всех таких неприводимых представлений при вычислении ответа с помощью процедуры каблирования так или иначе должен получиться ноль. Поскольку мы помещаем проекторы, описанные в п. 4.1 с обеих сторон от R -матрицы, для всех представлений, не содержащихся в разложении $T_1 \otimes 1^{\otimes |T_2|}$, ноль в ответе получается автоматически. Оставшиеся ненулевые блоки R -матриц также оказываются вырожденными, так что вклад представлений, не содержащихся в разложении $1^{\otimes |T_1|} \otimes T_2$, обращается в нуль, как и должен.

6.2. Двухнитевые узлы. Как уже отмечалось, процедура каблирования для двухнитевых узлов позволяет найти не только абсолютные величины собственных значений раскрашенной $\mathcal{R}$ -матрицы, но также и их знаки. Недостаток в том, что можно изучить только случай $T_1 = T_2$ (поскольку на нить, образующую узел, можно поместить только одно представление). Методом каблирования можно проверить, что во всех случаях без кратностей (мы проверили вплоть до $|T_1| = |T_2| = 4$) собственные значения раскрашенной $\mathcal{R}$ -матрицы удовлетворяют следующему правилу: собственное значение с наибольшей степенью параметра q имеет знак плюс, собственное значение со следующей по величине степенью параметра q имеет знак минус, и далее знаки чередуются. Это правило использовано, например, в работе [89]. Отступления от этого правила случаются, если в разложении тензорного произведения двух неприводимых представлений возникают кратности. Вот простейший пример этого явления:

$$[21] \times [21] = [42] + [411] + [33] + 2[321] + [3111] + [222] + [2211].$$

Для этого случая процедура каблирования дает следующие собственные значения:

$$q^5, -q^3, -q^3, 1, -1, q^{-3}, q^{-3}, -q^{-5}.$$

В следующем по сложности случае

$$\begin{aligned} [31] \times [31] = & [62] + [611] + [53] + 2[521] + [5111] + [44] + \\ & + 2[431] + [422] + [4211] + [332] + [3311] \end{aligned}$$

собственные значения, вычисленные с помощью процедуры каблирования, равны

$$q^{10}, -q^8, -q^6, q^3, -q^3, 1, q^4, 1, -1, q^{-2}, -q^{-4}, -q^{-4}, q^{-6}.$$

Таким образом, общее правило расстановки знаков в двухнитевой $\mathcal{R}$ -матрице остается неизвестным.

Полученные ответы для собственных значений приведены в расширенной электронной версии настоящей работы [98].

Для проверки можно подставить вычисленные собственные значения в выражение (6.1) и убедиться, что выполнены следующие два свойства полинома ХОМФЛИ. Во-первых, полином ХОМФЛИ действительно должен быть полиномом. Во-вторых, полином двухнитевого узла с единственным пересечением должен быть равен полиному тривиального узла с точностью до оснащающего множителя. Действительно,

такой узел преобразуется в тривиальный с помощью первого движения Рейдемейстера.

Таким образом, собственные значения должны удовлетворять системе уравнений $S_R^* = \sum \lambda_Q S_Q^*$, причем $\sum (\lambda_Q)^{2n+1} S_Q^*$ кратно S_R^* . Все знаки собственных значений, вероятно, задаются написанными уравнениями, но способ определения этих знаков из уравнений неясен.

7. ПРОЦЕДУРА КАБЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХНИТЕВЫХ УЗЛОВ

7.1. Трехнитевые узлы. Полиномы ХОМФЛИ для узлов, представимых в виде замыкания косы из трех нитей, в представлениях [2] (первом симметрическом представлении) и [11] (первом антисимметрическом представлении) были получены ранее [87]. Те же результаты можно получить с помощью процедуры каблирования. Для этого каждую раскрашенную $\mathcal{R}$ -матрицу в косе из трех нитей нужно заменить на комбинацию фундаментальных матриц в косе из шести нитей:

$$\mathcal{R}_{(1^2 \otimes 1^2) \otimes 1^2} = R_2 R_1 R_3 R_2, \quad \mathcal{R}_{1^2 \otimes (1^2 \otimes 1^2)} = R_4 R_3 R_5 R_4. \quad (7.1)$$

Затем нужно ввести проекторы на соответствующие представления. Как уже говорилось в разделе 4, проекторов может быть произвольное количество (но не менее одного на каждую связную компоненту), причем годится любая форма из описанных в разделе 4. Для упрощения вычислений удобнее всего использовать описание проекторов через пути и вводить по два проектора на каждое пересечение изначального узла, окружив ими каждую из комбинаций операторов в (7.1).

Для представлений уровня 3, т. е. для [3], [21] и [111], косу из трех нитей нужно заменить на косу из девяти нитей с соответствующей заменой для $\mathcal{R}$ -матриц:

$$\mathcal{R}_{(1^3 \otimes 1^3) \otimes 1^3} = R_3 R_2 R_1 R_4 R_3 R_2 R_5 R_4 R_3, \quad \mathcal{R}_{1^3 \otimes (1^3 \otimes 1^3)} = R_6 R_5 R_4 R_7 R_6 R_5 R_8 R_7 R_6.$$

Все необходимые проекторы описаны в разделе 4. Полиномы ХОМФЛИ для трехнитевых узлов в представлениях [3] и [111] приведены в работе [89], а ответы для представления [21] можно найти в приложении С к работе [98]. Ту же процедуру можно проделать и в случае старших представлений, но для этого требуются большие вычислительные мощности.

7.2. Четырехнитевые узлы. Случай узлов, представимых в виде замыкания косы из четырех нитей, по существу аналогичен рассмотренному в предыдущем пункте. Например, для представления [2] и представления [11] (первого симметрического и первого антисимметрического представлений) раскрашенные $\mathcal{R}$ -матрицы нужно заменить на фундаментальные:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1^2 \otimes 1^2) \otimes 1^2 \otimes 1^2} &= R_2 R_1 R_3 R_2, & \mathcal{R}_{1^2 \otimes (1^2 \otimes 1^2) \otimes 1^2} &= R_4 R_3 R_5 R_4, \\ \mathcal{R}_{1^2 \otimes 1^2 \otimes (1^2 \otimes 1^2)} &= R_6 R_5 R_7 R_6. \end{aligned}$$

Кроме того, нужно ввести соответствующие проекторы из раздела 4. Полиномы ХОМФЛИ четырехнитевых узлов для представлений уровня 2 приведены в приложении D к работе [98].

8. РАСКРАШЕННЫЕ ТРЕХНИТЕВЫЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Раскрашенные зацепления гораздо сложнее для изучения, чем раскрашенные узлы, так как зацепления имеют несколько компонент связности, на каждую из которых можно поместить свое представление. Инварианты зацеплений, на все компоненты которых помещено одно и то же представление, вычисляются аналогично инвариантам узлов, поэтому здесь мы сосредоточимся на зацеплениях, на компоненты которых помещены различные представления. Узлы и зацепления даже в фундаментальном представлении обладают еще одним свойством – ориентацией. Если ориентацию узла можно ввести только одним способом (на самом деле существуют два способа, но они переводятся друг в друга преобразованием симметрии), то в случае зацепления можно рассматривать различные относительные ориентации разных компонент. Если пользоваться представлением зацепления в виде косы, то ориентация задается автоматически: зацепления с различной ориентацией имеют различные представления в виде косы. Также следует отметить, что полиномы ХОМФЛИ зацеплений на самом деле не являются полиномами: они всегда содержат некоторый знаменатель, зависящий от выбора представлений.

В настоящем разделе мы разберем простейшие и по большей части известные примеры, чтобы проиллюстрировать изучаемый подход.

8.1. Метод раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц. Основная проблема вычислений в рамках подхода Решетихина–Тураева в данном случае состоит в следующем. Если все нити имеют один и тот же цвет, то все возможные $\mathcal{R}$ -матрицы задаются порядковыми номерами пересекающихся нитей, а именно матрица $\mathcal{R}_k$ соответствует пересечению нитей с номерами k и $k + 1$. Если разные нити имеют разные цвета, то ситуация иная: в этом случае $\mathcal{R}$ -матрицы задаются как порядковыми номерами пересекающихся нитей, так и их цветами (см. примеры, разобранные ниже). Также нужно учесть, что $\mathcal{R}$ -матрицы содержат операторы перестановки и, таким образом, изменяют расположение нитей в косе:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{T_1 \dots (T_i T_{i+1}) \dots T_{m-1}} : \quad & T_1 \otimes \dots \otimes (T_i \otimes T_{i+1}) \otimes \dots \otimes T_{m-1} \rightarrow \\ & \rightarrow T_1 \otimes \dots \otimes (T_{i+1} \otimes T_i) \otimes \dots \otimes T_{m-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{T_1 \dots (T_{i-1} T_i T_{i+1}) \dots T_{m-1}} : \quad & T_1 \otimes \dots \otimes ((T_{i-1} \otimes T_i) \otimes T_{i+1}) \otimes \dots \otimes T_{m-1} \rightarrow \\ & \rightarrow T_1 \otimes \dots \otimes (T_{i-1} \otimes (T_i \otimes T_{i+1})) \otimes \dots \otimes T_{m-1}. \end{aligned}$$

Пользуясь этим правилом, можно найти все возможные последовательности $\mathcal{R}$ -матриц, которые могут встретиться в данной раскрашенной косе.

Собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц известны: они такие же, как в случае диагональных $\mathcal{R}$ -матриц, описанных в п. 3.1, и равны $\mathcal{R}_{T_1 T_2 | Q} = \pm q^{\varkappa_Q - \varkappa_{T_1} - \varkappa_{T_2}}$ в вертикальном оснащении. Знаки собственных значений существенны только для пересечений нитей одного цвета, так как число пересечений между каждыми двумя нитями различного цвета всегда четно. В рассмотренных примерах эти знаки просто чередуются в каждой из $\mathcal{R}$ -матриц, т. е. собственное значение с наибольшей степенью параметра q имеет знак плюс, следующее по степени – знак минус и т. д. Недиагональные матрицы получаются из диагональных с помощью коэффициентов Рака [86], которые можно вычислить методами теории представлений [99].

Мы рассмотрим три частных случая, когда коса, представляющая зацепления, раскрашена как: $[1] \otimes [1] \otimes [2]$, $[1] \otimes [2] \otimes [2]$ и $[1] \otimes [2] \otimes [3]$. Во всех случаях, чтобы вычислить матрицы Рака, достаточно теории представлений для группы $SU_q(2)$.

8.2. Случай $[1] \otimes [1] \otimes [2]$.

8.2.1. *Вычисление с помощью раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц.* Тензорное произведение представлений разлагается как

$$[1] \otimes [1] \otimes [2] = [4] + 2[31] + [22] + [211].$$

Для синглетов матриц смешивания нет, и соответствующие компоненты $\mathcal{R}$ -матриц полностью описываются их собственными значениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 1|4} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 1|4} = \mathcal{R}_{1(12)|4} = \mathcal{R}_{1 \otimes (2 \otimes 1)|4} = q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} = q^2, \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 1|22} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 1|22} = \mathcal{R}_{1(12)|22} = \mathcal{R}_{1 \otimes (2 \otimes 1)|22} = q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} = -q^{-1}, \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 1|211} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 1|211} = \mathcal{R}_{1(12)|211} = \mathcal{R}_{1 \otimes (2 \otimes 1)|211} = q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} = -q^{-1}, \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 1) \otimes 2|4} &= \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 1)|4} = q^{\varkappa_2} = q, \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 1) \otimes 2|22} &= \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 1)|22} = q^{\varkappa_2} = q, \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 1) \otimes 2|211} &= \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 1)|211} = -q^{\varkappa_{11}} = -q^{-1}. \end{aligned}$$

Для дублетов нужны как диагональная, так и недиагональная $\mathcal{R}$ -матрицы, причем последняя вычисляется с помощью матриц смешивания. Дублетные компоненты $\mathcal{R}$ -матриц имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1 \otimes 1) \otimes 2|31} &= \text{diag}(q^{\varkappa_2}, -q^{\varkappa_{11}}) = \text{diag}(q, -q^{-1}), \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 1|31} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 1|31}^\dagger = \text{diag}(q^{\varkappa_3 - \varkappa_2}, -q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2}) = \text{diag}(q^2, -q^{-1}). \end{aligned}$$

Матрицы смешивания, вычисленные с помощью теории представлений для группы $SU_q(2)$, суть⁴⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1 \otimes 2 \otimes 1|31} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} \\ \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} & -\frac{1}{[3]_q} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_{1 \otimes 1 \otimes 2|31} = \mathcal{U}_{2 \otimes 1 \otimes 1|31} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{[3]_q}} & \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q [3]_q}} \\ \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q [3]_q}} & -\frac{1}{\sqrt{[3]_q}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате получим недиагональные $\mathcal{R}$ -матрицы:

$$\mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 1)|31} = \mathcal{U}_{2 \otimes 1 \otimes 1|31} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2 \otimes 1 \otimes 1|31}^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{q^3 [3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} \\ \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} & -\frac{q^3}{[3]_q} \end{pmatrix},$$

⁴⁾ Подробный вывод матриц смешивания из теории представлений см., например, в работе [86].

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{1\otimes(1\otimes 2)|31} &= \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 1)|31}^\dagger = \\ &= \mathcal{U}_{1\otimes 1\otimes 2|31} \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 1|31}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q\sqrt{[3]_q}} & \frac{q\sqrt{[4]_q}}{\sqrt{[2]_q[3]_q}} \\ \frac{\sqrt{[4]_q}}{\sqrt{[2]_q[3]_q}} & \frac{q^3}{\sqrt{[3]_q}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

В качестве примера применения написанных формул мы вычислим полиномы ХОМФЛИ для нескольких простейших двухкомпонентных трехнитевых зацеплений в представлении $[1] \otimes [1] \otimes [2]$. Чтобы изучить этот случай, нужно на двухнитевую компоненту зацепления поместить представление $[1]$, а на однонитевую – представление $[2]$. Простейшее зацепление такого типа есть представление пары незацепленных тривиальных узлов в виде косы из трех нитей со словом σ_1 . Соответствующий полином ХОМФЛИ в вертикальном оснащении равен

$$H_{1\otimes 2}^{\circ 2} = \text{Tr}_{1\otimes 1\otimes 2} \mathcal{R}_{(1\otimes 1)\otimes 2} = qS_4^* + (q - q^{-1})S_{31}^* + qS_{22}^* - q^{-1}S_{211}^* = S_1^*S_2^*.$$

Следующий по сложности пример – это представление торического зацепления $T[2, 4]$ в виде косы из трех нитей со словом $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ или $\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1$. Соответствующий полином ХОМФЛИ имеет вид

$$\begin{aligned}H_{2\otimes 1\otimes 1}^{T[2,4]} &= \text{Tr}_{2\otimes 1\otimes 1} \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 1} \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 1)} \mathcal{R}_{(1\otimes 1)\otimes 2} \mathcal{R}_{1\otimes(1\otimes 2)} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 1} = \\ &= q^9S_4^* + (q - q^3)S_{31}^* + q^3S_{22}^* - q^{-5}S_{311}^*.\end{aligned}$$

Полученный ответ совпадает с ответом для того же зацепления, представленного косой из двух нитей (если использовать топологическое оснащение, которое отличается от вертикального множителем A^{-1}):

$$A^{-1}H_{2\otimes 1\otimes 1}^{T[2,4]-3\text{-хнит.}} = H_{1\otimes 2}^{T[2,4]-2\text{-хнит.}} = q^{4\kappa_3-8\kappa_2}S_3^* + q^{4\kappa_{21}-8\kappa_2}S_{21}^* = q^8S_3^* + q^{-4}S_{21}^*.$$

Простейшее неторическое трехнитевое двухкомпонентное зацепление – это зацепление 5_1^2 , или зацепление Уайтхеда⁵⁾, которое имеет представление в виде косы со словом $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$. Это представление отличается от представления торического зацепления $T[2, 4]$ обращением всех $\mathcal{R}$ -матриц, действующих на первую пару нитей. Полином ХОМФЛИ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}H_{2\otimes 1\otimes 1}^{5_1^2} &= \text{Tr}_{2\otimes 1\otimes 1} \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 1}^{-1} \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 1)} \mathcal{R}_{(1\otimes 1)\otimes 2}^{-1} \mathcal{R}_{1\otimes(1\otimes 2)} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 1} = \\ &= q^{-1}S_4^* + (-q^7 + q^5 + q^3 - 2q + 2q^{-1} - q^{-3} - q^{-5} + q^{-7})S_{31}^* + q^{-1}S_{22}^* - qS_{221}^* = \\ &= \frac{S_2^*}{q^2 - 1} ((-q^3 + q^{-1} - q^{-3})A^{-2} + \\ &\quad + (q^7 - q^5 - q^3 + 3q - q^{-1} - q^{-3} + q^{-5}) + (-q^5 + q^3 + q - q^{-1})A^2).\end{aligned}$$

8.2.2. Вычисление с помощью процедуры каблирования. Чтобы вычислить те же полиномы методом каблирования, нужно заменить каждую из раскрашенных

⁵⁾Обозначение Рольфсена для зацеплений c_k^n является обобщением обозначения Рольфсена для узлов: c_k . В этих обозначениях s – минимальное число пересечений на плоской проекции узла или зацепления, а n – число связанных компонент.

$\mathcal{R}$ -матриц на соответствующее произведение фундаментальных, в данном случае действующих в косе из четырех нитей (так как $1 + 1 + 2 = 4$):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1\otimes 1)\otimes 2} &\rightarrow R_1, & \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 1} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 1}^\dagger \rightarrow R_2 R_1, \\ \mathcal{R}_{1\otimes(1\otimes 2)} &= \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 1)}^\dagger \rightarrow R_3 R_2, & \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 1)} &\rightarrow R_3. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Соответствующая замена для обратных $\mathcal{R}$ -матриц выглядит как

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1\otimes 1)\otimes 2}^{-1} &\rightarrow R_1^{-1}, & \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 1}^{-1} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 1}^\dagger \rightarrow R_2^{-1} R_1^{-1}, \\ \mathcal{R}_{1\otimes(1\otimes 2)}^{-1} &= \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 1)}^\dagger \rightarrow R_3^{-1} R_2^{-1}, & \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 1)}^{-1} &\rightarrow R_3^{-1}. \end{aligned}$$

Кроме того, необходимо ввести проекторы. При этом следует использовать один из трех проекторов, в зависимости от участка косы, на который проектор будет помещен⁶⁾:

$$P_{2\otimes 1\otimes 1} = \frac{1 + qR_1}{1 + q^2}, \quad P_{1\otimes 2\otimes 1} = \frac{1 + qR_2}{1 + q^2}, \quad P_{1\otimes 1\otimes 2} = \frac{1 + qR_3}{1 + q^2}. \quad (8.2)$$

Ответы для конкретных зацеплений можно получить, применяя правила (8.1) к проекторам (8.2), которые отвечают конкретным косам, а затем вычисляя полином ХОМФЛИ для полученной косы в фундаментальном представлении. Полученные таким образом ответы совпадают с ответами, которые получены с помощью раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц.

В случае двух незацепленных тривиальных узлов, представленных в виде косы из трех нитей со словом σ_1 , полином ХОМФЛИ, полученный с помощью процедуры каблирования, равен

$$H_{1\otimes 2}^{\circ 2} = \text{Tr}_{1^4} P_{1\otimes 1\otimes 2} R_1 = qS_4^* + (q - q^{-1})S_{31}^* + qS_{22}^* - q^{-1}S_{211}^* = A S_1^* S_2^*.$$

Для торического зацепления $T[2, 4]$, представленного косой из трех нитей, получается следующий полином ХОМФЛИ:

$$\begin{aligned} H_{2\otimes 1\otimes 1}^{T[2,4]-3\text{-хнит.}} &= \text{Tr}_{1^4} P_{2\otimes 1\otimes 1} R_1 R_2 \cdot R_2 R_3 \cdot R_1 \cdot R_3 R_2 \cdot R_2 R_1 = \\ &= q^9 S_4^* + (q - q^3)S_{31}^* + q^3 S_{22}^* - q^{-5} S_{311}^* = A H_{1\otimes 2}^{T[2,4]-2\text{-хнит.}}. \end{aligned}$$

Наконец, для полинома ХОМФЛИ зацепления Уайтхеда процедура каблирования дает

$$\begin{aligned} H_{2\otimes 1\otimes 1}^{5_1^2} &= \text{Tr}_{2\otimes 1\otimes 1} P_{2\otimes 1\otimes 1} R_1^{-1} R_2^{-1} \cdot R_2 R_3 \cdot R_1^{-1} \cdot R_3 R_2 \cdot R_2 R_1 = \\ &= q^{-1} S_4^* + (-q^7 + q^5 + q^3 - 2q + 2q^{-1} - q^{-3} - q^{-5} + q^{-7})S_{31}^* + q^{-1} S_{22}^* - qS_{221}^*. \end{aligned}$$

⁶⁾Как описано в разделе 4, расположение проекторов и их количество могут быть различными. Во всех вычислениях настоящего раздела мы используем один проектор, помещенный в начало косы.

8.3. Случай $[2] \otimes [2] \otimes [1]$.

8.3.1. *Вычисление с помощью раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц.* В этом случае тензорное произведение представлений разлагается как

$$[2] \otimes [2] \otimes [1] = [5] + 2 [41] + 2 [32] + [311] + [221].$$

Синглетные компоненты раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 2|5} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 2|5} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)|5} = \mathcal{R}_{2\otimes(2\otimes 1)|5} = q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} = q^2, \\ \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 2|311} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 2|311} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)|311} = \mathcal{R}_{2\otimes(2\otimes 1)|311} = q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} = -q^{-1}, \\ \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 2|221} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 2|221} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)|221} = \mathcal{R}_{2\otimes(2\otimes 1)|221} = q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} = -q^{-1}, \\ \mathcal{R}_{(2\otimes 2)\otimes 1|5} &= \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 2)|5} = q^{\varkappa_4 - 2\varkappa_2} = q^4, \\ \mathcal{R}_{(2\otimes 2)\otimes 1|311} &= \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 2)|311} = -q^{\varkappa_{31} - 2\varkappa_2} = -1, \\ \mathcal{R}_{(2\otimes 2)\otimes 1|221} &= \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 2)|221} = q^{\varkappa_{22} - 2\varkappa_2} = q^{-2}. \end{aligned}$$

Дублетные компоненты раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц в данном случае следующие:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 2|41} &= \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 2|32} = \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 2|41}^\dagger = \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 2|32}^\dagger = \\ &= \text{diag}(q^{\varkappa_3 - \varkappa_2}, -q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2}) = \text{diag}(q^2, -q^{-1}), \\ \mathcal{R}_{(2\otimes 2)\otimes 1|41} &= \text{diag}(q^{\varkappa_4 - 2\varkappa_2}, -q^{\varkappa_{31} - 2\varkappa_2}) = \text{diag}(q^4, -1), \\ \mathcal{R}_{(2\otimes 2)\otimes 1|32} &= \text{diag}(-q^{\varkappa_{31} - 2\varkappa_2}, q^{\varkappa_{22} - 2\varkappa_2}) = \text{diag}(-1, q^{-2}). \end{aligned}$$

Соответствующие матрицы Рака выглядят как

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|41} &= \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 2|41} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} & \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} \\ \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} & -\sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|32} &= \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 2|32} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{[3]_q}} & \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q}} \\ \sqrt{\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q}} & -\frac{1}{\sqrt{[3]_q}} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 2|41} &= \begin{pmatrix} \frac{[2]_q}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[5]_q}}{[3]_q} \\ \frac{\sqrt{[5]_q}}{[3]_q} & -\frac{[2]_q}{[3]_q} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 2|32} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} \\ \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & -\frac{1}{[3]_q} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате для дублетных компонент недиагональных раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)|41} &= \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)|41}^\dagger = \\ &= \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 2|41} \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|41}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{q^3 \sqrt{[3]_q[4]_q}} & \frac{q \sqrt{[2]_q[5]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} \\ \frac{\sqrt{[2]_q[5]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} & \frac{q^4 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)|32} &= \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)|32}^\dagger = \\
&= \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 2|32} \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|32}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2\sqrt{[3]_q}} & \frac{\sqrt{[4]_q}}{\sqrt{[2]_q[3]_q}} \\ \frac{q\sqrt{[4]_q}}{\sqrt{[2]_q[3]_q}} & \frac{q^3}{\sqrt{[3]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 2)|41} &= \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|41} \begin{pmatrix} q^4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|41}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{[2]_q}{q[3]_q} & \frac{q^2\sqrt{[5]_q}}{[3]_q} \\ \frac{q^2\sqrt{[5]_q}}{[3]_q} & \frac{q^5[2]_q}{[3]_q} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 2)|32} &= \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|32} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -q^{-2} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 2\otimes 1|32}^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{q^4[3]_q} & -\frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{q[3]_q} \\ -\frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{q[3]_q} & -\frac{q^2}{[3]_q} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В качестве примеров мы рассмотрим те же зацепления, что и в п. 8.2, но теперь представление [2] будет помещено на двухнитевую компоненту, а представление [1] – на однопонитевую.

Для двух незацепленных тривиальных узлов метод раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц дает

$$H_{1\otimes 2}^{\circ^2} = q^4 S_5^* + (q^4 - 1)S_{41}^* + (q^{-2} - 1)S_{32}^* - S_{311}^* + q^{-2}S_{221}^* = A^2 q^2 S_1^* S_2^*.$$

Вошедший в это выражение множитель $A^2 q^2$ связывает вертикальное и топологическое оснащения (см. раздел 5). Для торического зацепления $T[2, 4]$, представленного косой из трех нитей, получаем следующий ответ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1\otimes 2\otimes 2}^{T[2,4]-3\text{-хнит.}} &= \text{Tr}_{1\otimes 2\otimes 2} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 2} \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)} \mathcal{R}_{(2\otimes 2)\otimes 1} \mathcal{R}_{2\otimes(2\otimes 1)} \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 2}^\dagger = \\
&= q^{12} S_5^* + (q^2 - q^6)S_{41}^* + (q^2 - 1)S_{32}^* - q^{-4}S_{311}^* + q^{-6}S_{221}^* = \\
&= A^2 q^2 H_{2\otimes 1}^{T[2,4]-2\text{-хнит.}} = A^2 q^2 (q^{4\kappa_3 - 8\kappa_2} S_3^* + q^{4\kappa_{21} - 8\kappa_2} S_{21}^*) = A^2 q^{10} S_3^* + A^2 q^{-2} S_{21}^*.
\end{aligned}$$

Для зацепления Уайтхеда получается следующий полином ХОМФЛИ:

$$\begin{aligned}
H_{1\otimes 2\otimes 2}^{5_1^2} &= \text{Tr}_{1\otimes 2\otimes 2} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 2}^{-1} \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 2)} \mathcal{R}_{(2\otimes 2)\otimes 1}^{-1} \mathcal{R}_{2\otimes(2\otimes 1)} \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 2}^\dagger = \\
&= q^{-4} S_5^* + (-q^6 + q^4 + q^2 - 2 + 2q^{-4} - q^{-6} - q^{-8} + q^{-10})S_{41}^* + \\
&\quad + (-q^6 + q^4 + q^2 - 2 + 2q^{-4} - q^{-6} - q^{-8} + q^{-10})S_{32}^* - S_{311}^* + q^2 S_{221}^* = \\
&= A^{-1} q^{-1} H_{2\otimes 1\otimes 1}^{5_1^2},
\end{aligned}$$

так что полиномы $H_{2\otimes 1\otimes 1}^{5_1^2}$ и $H_{1\otimes 2\otimes 2}^{5_1^2}$ равны с точностью до множителя. Этот множитель возникает вследствие разницы между вертикальным оснащением, использованным в нашем вычислении, и топологическим оснащением, в котором ответы для этих двух полиномов должны совпадать. Соотношение $H_{2\otimes 1\otimes 1}^{5_1^2} = H_{1\otimes 2\otimes 2}^{5_1^2}$ должно выполняться в топологическом оснащении, поскольку зацепление Уайтхеда можно преобразовать с помощью движений Рейдемейстера так, что компоненты зацепления поменяются местами.

Еще одна проверка на самосогласованность состоит в том, что ответ должен обладать свойством факторизации [61], [102], [103] (подробности см. в разделе 11).

Расцепленные компоненты зацепления Уайтхеда изоморфны тривиальным узлам, что согласуется с формулой

$$\left. \frac{H_{1 \otimes 2 \otimes 2}^{5_1^2}}{S_1^* S_2^*} \right|_{q \rightarrow 1} = A^{-2}.$$

8.3.2. *Вычисление с помощью процедуры каблирования.* Процедура каблирования для этого случая аналогична уже описанной в п. 8.2.2. Раскрашенные $\mathcal{R}$ -матрицы следует заменить на следующие комбинации:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(2 \otimes 2) \otimes 1} &\rightarrow R_2 R_1 R_3 R_2, & \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 2} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 2}^\dagger \rightarrow R_1 R_2, \\ \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 2)} &= \mathcal{R}_{2 \otimes (2 \otimes 1)}^\dagger \rightarrow R_3 R_4, & \mathcal{R}_{1 \otimes (2 \otimes 2)} &\rightarrow R_3 R_2 R_4 R_3. \end{aligned}$$

Обратным пересечениям следует сопоставить произведения обратных R -матриц. Соответствующие проекторы равны

$$\mathcal{P}_{1 \otimes 2 \otimes 2} = \frac{1 + qR_2}{1 + q^2} \frac{1 + qR_4}{1 + q^2}, \quad \mathcal{P}_{2 \otimes 1 \otimes 2} = \frac{1 + qR_1}{1 + q^2} \frac{1 + qR_4}{1 + q^2}, \quad \mathcal{P}_{2 \otimes 2 \otimes 1} = \frac{1 + qR_1}{1 + q^2} \frac{1 + qR_3}{1 + q^2}.$$

Полином ХОМФЛИ двух незацепленных тривиальных узлов имеет вид

$$H_{1 \otimes 2}^{\circ 2} = \text{Tr}_{1^5} P_{2 \otimes 2 \otimes 1} R_1 = qS_4^* + (q - q^{-1})S_{31}^* + qS_{22}^* - q^{-1}S_{211}^* = AS_1^* S_2^*.$$

Для представления торического зацепления $T^{2,4}$ в виде косы из трех нитей имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1 \otimes 2 \otimes 2}^{T[2,4]-3\text{-нит.}} &= \text{Tr}_{1^5} P_{1 \otimes 2 \otimes 2} R_1 R_2 \cdot R_3 R_4 \cdot R_2 R_1 R_3 R_2 \cdot R_4 R_3 \cdot R_2 R_1 = \\ &= q^{12} S_5^* + (q^2 - q^6) S_{41}^* + (q^2 - 1) S_{32}^* - q^{-4} S_{311}^* + q^{-6} S_{221}^*. \end{aligned}$$

Для неторического зацепления Уайтхеда полином ХОМФЛИ записывается как

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1 \otimes 2 \otimes 2}^{5_1^2} &= \text{Tr}_{1 \otimes 2 \otimes 2} P_{1 \otimes 2 \otimes 2} R_1^{-1} R_2^{-1} \cdot R_3 R_4 \cdot R_2^{-1} R_1^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} \cdot R_4 R_3 \cdot R_2 R_1 = \\ &= q^{-4} S_5^* + (-q^6 + q^4 + q^2 - 2 + 2q^{-4} - q^{-6} - q^{-8} + q^{-10}) S_{41}^* + \\ &\quad + (q^8 - q^6 - q^4 + 2q^2 - 2 + q^{-2} + q^{-4} - q^{-6}) S_{32}^* - S_{311}^* + q^2 S_{221}^*. \end{aligned}$$

Все эти ответы совпадают с выражениями, полученными ранее при помощи раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц.

8.4. Случай $[1] \otimes [2] \otimes [3]$.

8.4.1. *Вычисление с помощью раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц.* Тензорное произведение указанных представлений разлагается как

$$[1] \otimes [2] \otimes [3] = [6] + 2 [51] + 2 [42] + [411] + [33] + [321].$$

Синглетные компоненты $\mathcal{R}$ -матриц имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3|6} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 3|6} = \mathcal{R}_{3 \otimes (1 \otimes 2)|6} = \mathcal{R}_{3 \otimes (2 \otimes 1)|6} = q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} = q^2, \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3|411} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 3|411} = \mathcal{R}_{3 \otimes (1 \otimes 2)|411} = \mathcal{R}_{3 \otimes (2 \otimes 1)|411} = -q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} = -q^{-1}, \\ \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3|33} &= \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 3|33} = \mathcal{R}_{3 \otimes (1 \otimes 2)|33} = \mathcal{R}_{3 \otimes (2 \otimes 1)|33} = q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} = q^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|321} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|321} = \mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|321} = \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|321} = -q^{\varkappa_{21}-\varkappa_2} = -q^{-1}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|6} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|6} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|6} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|6} = q^{\varkappa_4-\varkappa_3} = q^3, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|411} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|411} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|411} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|411} = -q^{\varkappa_{31}-\varkappa_3} = -q^{-1}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|33} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|33} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|33} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|33} = -q^{\varkappa_{31}-\varkappa_3} = -q^{-1}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|321} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|321} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|321} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|321} = q^{\varkappa_{31}-\varkappa_3} = q^{-3}, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|6} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|6} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|6} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|6} = q^{\varkappa_5-\varkappa_2-\varkappa_3} = q^6, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|411} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|411} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|411} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|411} = -q^{\varkappa_{41}-\varkappa_2-\varkappa_3} = -q, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|33} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|33} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|33} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|33} = q^{\varkappa_{32}-\varkappa_2-\varkappa_3} = q^{-2}, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|321} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|321} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|321} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|321} = q^{\varkappa_{32}-\varkappa_2-\varkappa_3} = q^{-2}.
\end{aligned}$$

Дублетные компоненты диагональных $\mathcal{R}$ -матриц равны

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|51} &= \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|42} = \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|51}^\dagger = \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|42}^\dagger = \\
&= \text{diag}(q^{\varkappa_3-\varkappa_2}, -q^{\varkappa_{21}-\varkappa_2}) = \text{diag}(q^2, -q^{-1}), \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|51} &= \mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|42} = \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|51}^\dagger = \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|42}^\dagger = \\
&= \text{diag}(q^{\varkappa_4-\varkappa_3}, -q^{\varkappa_{31}-\varkappa_3}) = \text{diag}(q^3, -q^{-1}), \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|51} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|51}^\dagger = \text{diag}(q^{\varkappa_5-\varkappa_2-\varkappa_3}, -q^{\varkappa_{41}-\varkappa_2-\varkappa_3}) = \text{diag}(q^6, -q), \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|42} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|42}^\dagger = \text{diag}(q^{\varkappa_{41}-\varkappa_2-\varkappa_3}, -q^{\varkappa_{32}-\varkappa_2-\varkappa_3}) = \text{diag}(q, -q^2).
\end{aligned}$$

Соответствующие матрицы Рака выглядят как

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|51} &= \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|51} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{[5]_q}} & \sqrt{\frac{[2]_q[6]_q}{[3]_q[5]_q}} \\ \sqrt{\frac{[2]_q[6]_q}{[3]_q[5]_q}} & -\frac{1}{\sqrt{[5]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|42} &= \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|42} = \begin{pmatrix} \frac{[2]_q}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[5]_q}}{[3]_q} \\ \frac{\sqrt{[5]_q}}{[3]_q} & -\frac{[2]_q}{[3]_q} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|51} &= \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|51} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q[5]_q}} & \sqrt{\frac{[3]_q[6]_q}{[4]_q[5]_q}} \\ \sqrt{\frac{[3]_q[6]_q}{[4]_q[5]_q}} & -\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q[5]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|42} &= \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|42} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} & \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} \\ \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} & -\sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|51} &= \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|51} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}} & \sqrt{\frac{[6]_q}{[3]_q[4]_q}} \\ \sqrt{\frac{[6]_q}{[3]_q[4]_q}} & -\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|42} &= \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|42} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} & \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} \\ \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} & -\sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Это приводит к следующим формулам для дублетных компонент недиагональных $\mathcal{R}$ -матриц:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|51} &= \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|51}^\dagger = \\
&= \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|51} \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|51}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{q^4 \sqrt{[4]_q [5]_q}} & \frac{q \sqrt{[3]_q [6]_q}}{\sqrt{[4]_q [5]_q}} \\ \frac{\sqrt{[3]_q [6]_q}}{\sqrt{[4]_q [5]_q}} & \frac{q^5 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[4]_q [5]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|42} &= \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|42}^\dagger = \\
&= \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|42} \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|42}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{q^3 \sqrt{[3]_q [4]_q}} & \frac{\sqrt{[2]_q [5]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} \\ \frac{q \sqrt{[2]_q [5]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} & \frac{q^4 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|51} &= \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|51}^\dagger = \\
&= \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|51} \begin{pmatrix} q^3 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|51}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^3 \sqrt{[5]_q}} & \frac{q^2 \sqrt{[2]_q [6]_q}}{\sqrt{[3]_q [5]_q}} \\ \frac{\sqrt{[2]_q [6]_q}}{\sqrt{[3]_q [5]_q}} & \frac{q^5}{\sqrt{[5]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|42} &= \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|42}^\dagger = \\
&= \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|42} \begin{pmatrix} q^3 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|42}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2 [3]_q} & \frac{q \sqrt{[5]_q}}{[3]_q} \\ \frac{q \sqrt{[5]_q}}{[3]_q} & \frac{q^4}{[3]_q} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|51} &= \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|51}^\dagger = \\
&= \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|51} \begin{pmatrix} q^6 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} \mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|51}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[4]_q}} & \frac{q^4 \sqrt{[6]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} \\ \frac{q^3 \sqrt{[6]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} & \frac{q^7 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[4]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|42} &= \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|42}^\dagger = \\
&= \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|42} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^2 \end{pmatrix} \mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|42}^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{\sqrt{q^4 [3]_q [4]_q}} & \frac{\sqrt{[2]_q [5]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} \\ \frac{\sqrt{[2]_q [5]_q}}{q \sqrt{[3]_q [4]_q}} & \frac{q^3 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления полиномов ХОМФЛИ простейших трехнитевых трехкомпонентных зацеплений. Простейшее нетривиальное трехкомпонентное зацепление – это несвязное объединение зацепления Хопфа и тривиального узла, представленное в виде косы из трех нитей со словом σ_1^2 . Расположить три представления на трех нитях косы можно шестью ($3! = 6$) различными способами, которые очевидным образом сводятся к трем различным зацеплениям, поскольку каждое зацепление такого типа имеет два представления в виде косы, отличающихся перестановкой $\mathcal{R}$ -матриц под знаком следа. С учетом этого имеем три разных зацепления, отличающихся выбором представления для тривиального

узла:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3} \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 3} &= H_{1 \otimes 2}^{T[2,2]} S_3^*, & \mathrm{Tr} \mathcal{R}_{(1 \otimes 3) \otimes 2} \mathcal{R}_{(3 \otimes 1) \otimes 2} &= H_{1 \otimes 3}^{T[2,2]} S_2^*, \\ \mathrm{Tr} \mathcal{R}_{(2 \otimes 3) \otimes 1} \mathcal{R}_{(3 \otimes 2) \otimes 1} &= H_{2 \otimes 3}^{T[2,2]} S_1^*.\end{aligned}$$

Можно проверить, что ответы для полиномов ХОМФЛИ зацепления Хопфа, входящие в выражения, вычисленные для косы из трех нитей, совпадают с ответами для зацепления Хопфа, представленного косой из двух нитей:

$$\begin{aligned}H_{1 \otimes 2}^{T[2,2]} &= q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} S_3^* + q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} S_{21}^* = q^4 S_3^* + q^{-2} S_{21}^*, \\ H_{1 \otimes 3}^{T[2,2]} &= q^{\varkappa_4 - \varkappa_3} S_4^* + q^{\varkappa_{31} - \varkappa_3} S_{21}^* = q^6 S_4^* + q^{-2} S_{21}^*, \\ H_{2 \otimes 3}^{T[2,2]} &= q^{\varkappa_5 - \varkappa_3 - \varkappa_2} S_5^* + q^{\varkappa_{41} - \varkappa_3 - \varkappa_2} S_{41}^* + q^{\varkappa_{32} - \varkappa_3 - \varkappa_2} S_{32}^* = q^{12} S_5^* + q^2 S_{41}^* + q^{-4} S_{32}^*.\end{aligned}$$

Следующий по сложности случай – это “двойное зацепление Хопфа”, т. е. составное зацепление, представленное в виде косы со словом $\sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2$. Как и в предыдущем случае, шесть способов расположить пересечения на нитях косы приводят к трем различным полиномам ХОМФЛИ:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{1 \otimes 2 \otimes 3} \mathcal{R}_{1 \otimes (2 \otimes 3)} \mathcal{R}_{(1 \otimes 3) \otimes 2} \mathcal{R}_{(3 \otimes 1) \otimes 2} \mathcal{R}_{1 \otimes (3 \otimes 2)} &= \\ &= \mathrm{Tr}_{2 \otimes 1 \otimes 3} \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 3)} \mathcal{R}_{(2 \otimes 3) \otimes 1} \mathcal{R}_{(3 \otimes 2) \otimes 1} \mathcal{R}_{2 \otimes (3 \otimes 1)} = \frac{H_{2 \otimes 3}^{T[2,2]} H_{1 \otimes 3}^{T[2,2]}}{S_3^*}, \\ \mathrm{Tr}_{3 \otimes 1 \otimes 2} \mathcal{R}_{3 \otimes (1 \otimes 2)} \mathcal{R}_{(3 \otimes 2) \otimes 1} \mathcal{R}_{(2 \otimes 3) \otimes 1} \mathcal{R}_{3 \otimes (2 \otimes 1)} &= \\ &= \mathrm{Tr}_{1 \otimes 3 \otimes 2} \mathcal{R}_{1 \otimes (3 \otimes 2)} \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3} \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 3} \mathcal{R}_{1 \otimes (2 \otimes 3)} = \frac{H_{1 \otimes 2}^{T[2,2]} H_{2 \otimes 3}^{T[2,2]}}{S_2^*}, \\ \mathrm{Tr}_{3 \otimes 2 \otimes 1} \mathcal{R}_{3 \otimes (2 \otimes 1)} \mathcal{R}_{(3 \otimes 1) \otimes 2} \mathcal{R}_{(1 \otimes 3) \otimes 2} \mathcal{R}_{3 \otimes (1 \otimes 2)} &= \\ &= \mathrm{Tr}_{2 \otimes 3 \otimes 1} \mathcal{R}_{2 \otimes (3 \otimes 1)} \mathcal{R}_{(2 \otimes 1) \otimes 3} \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3} \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 3)} = \frac{H_{1 \otimes 2}^{T[2,2]} H_{1 \otimes 3}^{T[2,2]}}{S_1^*}.\end{aligned}$$

Известно [100], что полином ХОМФЛИ составного узла или зацепления пропорционален произведению полиномов ХОМФЛИ своих частей, что действительно имеет место в рассмотренном случае.

Первое простое трехнитевое трехкомпонентное зацепление – это торическое зацепление $T[3, 3] = 6_3^3$, представленное в виде косы со словом $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$. Для него можно применить метод эволюции [61], [86], [93], который позволяет получить ответ не для отдельного зацепления, а сразу для целой серии зацеплений. В данном случае эта серия есть $T[3, 3n]$. В ходе соответствующего вычисления потребуется найти собственные значения следующего произведения:

$$\mathfrak{R} \equiv \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3} \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 3)} \mathcal{R}_{(2 \otimes 3) \otimes 1} \mathcal{R}_{3 \otimes (2 \otimes 1)} \mathcal{R}_{(3 \otimes 1) \otimes 2} \mathcal{R}_{1 \otimes (3 \otimes 2)}.$$

Коэффициенты разложения полиномов ХОМФЛИ по характерам тогда выражаются через n -е степени этих собственных значений:

$$H_{1 \otimes 2 \otimes 3}^{T[3, 3n]} = \mathrm{Tr}_{1 \otimes 2 \otimes 3} \mathfrak{R}^n = q^{22n} S_6^* + 2q^{10n} S_{51}^* + 2q^{2n} S_{42}^* + q^{-2n} S_{411}^* + q^{-2n} S_{33}^* + q^{-8n} S_{321}^*.$$

Данный ответ очевидным образом инвариантен относительно перестановок представлений, помещенных на различные нити, поскольку это соответствует циклическим перестановкам $\mathcal{R}$ -матриц под знаком следа.

Простейшее неторическое трехкомпонентное трехнитевое зацепление – это зацепление 6_2^3 (кóльца Борромео). Его представление в виде косы есть $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$. Соответствующий полином ХОМФЛИ имеет вид

$$\begin{aligned} H_{1\otimes 2\otimes 3}^{6_2^3} &= \text{Tr}_{1\otimes 2\otimes 3} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3}^{-1} \mathcal{R}_{2\otimes (1\otimes 3)} \mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1}^{-1} \mathcal{R}_{3\otimes (2\otimes 1)} \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2}^{-1} \mathcal{R}_{1\otimes (3\otimes 2)} = \\ &= S_6^* + (-q^{12} + q^{10} + q^8 - q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - q^{-4} + q^{-8} + q^{-10} - q^{-12})S_{51}^* + \\ &\quad + (-q^{10} + q^8 + 2q^6 - 2q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} + q^{-8} - q^{-10})S_{42}^* + \\ &\quad + S_{411}^* + S_{33}^* + S_{321}^* = \\ &= \frac{S_3^*}{(q^2 - 1)^2(q^4 - 1)} ((q^{15} - 2q^{13} + q^9 + q^7 - q^5 - 2q^3 + q)A^3 + \\ &\quad + (-q^{17} + 2q^{15} - 2q^{11} + 2q^7 + 3q^5 - 2q^3 - q + 2q^{-1} + q^{-3} - q^{-5})A + \\ &\quad + (q^{13} - q^{11} - 2q^9 + q^7 + 2q^5 - 3q^3 - 2q + 2q^{-3} - 2q^{-7} + q^{-9})A^{-1} + \\ &\quad + (-q^7 + 2q^5 + q^3 - q - q^{-1} + 2q^{-5} - q^{-7})A^{-3}). \end{aligned}$$

Как и в случае торического зацепления, ответ обладает очевидной симметрией по отношению к перестановке компонент.

Зацепление кóльца Борромео состоит из трех тривиальных узлов, зацепленных друг за друга. Следовательно, свойство факторизации [61], [102], [103] (см. также раздел 11 настоящей работы) должно давать

$$\left. \frac{H_{1\otimes 2\otimes 3}^{6_2^3}}{S_1^* S_2^* S_3^*} \right|_{q \rightarrow 1} = 1.$$

Это соотношение действительно выполняется.

8.4.2. *Вычисление с помощью процедуры каблирования.* В этом случае имеем шесть различных подстановок для различных цветных пересечений:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3}^\dagger \rightarrow R_1 R_2, & \mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2}^\dagger \rightarrow R_1 R_2 R_3, \\ \mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1}^\dagger \rightarrow R_2 R_1 R_3 R_2 R_4 R_3, \\ \mathcal{R}_{1\otimes (2\otimes 3)} &= \mathcal{R}_{1\otimes (3\otimes 2)}^\dagger \rightarrow R_3 R_2 R_4 R_3 R_5 R_4, \\ \mathcal{R}_{2\otimes (1\otimes 3)} &= \mathcal{R}_{2\otimes (3\otimes 1)}^\dagger \rightarrow R_3 R_4 R_5, & \mathcal{R}_{3\otimes (1\otimes 2)} &= \mathcal{R}_{3\otimes (2\otimes 1)}^\dagger \rightarrow R_4 R_5. \end{aligned}$$

Обратные пересечения следует заменить на соответствующие произведения обратных R -матриц. Кроме того, имеем шесть проекторов, отвечающих шести ($3! = 6$) перестановкам трех раскрашенных нитей:

$$\begin{aligned} P_{1\otimes 2\otimes 3} &= \frac{1 + qR_2}{1 + q^2} \frac{1 + qR_4 + qR_5 + qR_4R_5 + qR_5R_4 + q^2R_4R_5R_4}{(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)}, \\ P_{2\otimes 1\otimes 3} &= \frac{1 + qR_1}{1 + q^2} \frac{1 + qR_4 + qR_5 + qR_4R_5 + qR_5R_4 + q^2R_4R_5R_4}{(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1\otimes 3\otimes 2} &= \frac{1 + qR_5}{1 + q^2} \frac{1 + qR_2 + qR_3 + qR_2R_3 + qR_3R_2 + q^2R_2R_3R_2}{(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)}, \\
P_{3\otimes 1\otimes 2} &= \frac{1 + qR_5}{1 + q^2} \frac{1 + qR_1 + qR_2 + qR_1R_2 + qR_2R_1 + q^2R_1R_2R_1}{(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)}, \\
P_{2\otimes 3\otimes 1} &= \frac{1 + qR_1}{1 + q^2} \frac{1 + qR_3 + qR_4 + qR_3R_4 + qR_4R_3 + q^2R_3R_4R_3}{(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)}, \\
P_{3\otimes 2\otimes 1} &= \frac{1 + qR_4}{1 + q^2} \frac{1 + qR_1 + qR_2 + qR_1R_2 + qR_2R_1 + q^2R_1R_2R_1}{(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)}.
\end{aligned}$$

С помощью этих формул можно вычислять полиномы ХОМФЛИ трехнитевых трех-компонентных зацеплений в представлении $[1] \otimes [2] \otimes [3]$. Для несвязного объединения зацепления Хопфа и тривиального узла ответ имеет вид

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{1^6} P_{1\otimes 2\otimes 3} R_2 R_1 \cdot R_1 R_2 &= H_{1\otimes 2}^{T[2,2]} S_3^*, \\
\text{Tr}_{1^6} P_{1\otimes 3\otimes 2} R_3 R_2 R_1 \cdot R_1 R_2 R_3 &= H_{1\otimes 3}^{T[2,2]} S_2^*, \\
\text{Tr}_{1^6} P_{2\otimes 3\otimes 1} R_2 R_1 R_3 R_2 R_4 R_3 \cdot R_3 R_4 R_2 R_3 R_1 R_2 &= H_{2\otimes 3}^{T[2,2]} S_1^*.
\end{aligned}$$

Для “двойного зацепления Хопфа” имеем

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}_{1^6} P_{1\otimes 2\otimes 3} R_3 R_2 R_4 R_3 R_5 R_4 \cdot R_3 R_2 R_1 \cdot R_1 R_2 R_3 \cdot R_4 R_5 R_3 R_4 R_2 R_3 = \\
&= \text{Tr}_{1^6} P_{2\otimes 1\otimes 3} R_5 R_4 R_3 \cdot R_2 R_1 R_3 R_2 R_4 R_3 \cdot R_3 R_4 R_2 R_3 R_1 R_2 \cdot R_3 R_4 R_5 = \\
&= \frac{H_{2\otimes 3}^{T[2,2]} H_{1\otimes 3}^{T[2,2]}}{S_3^*}, \\
&\text{Tr}_{1^6} P_{3\otimes 1\otimes 2} R_4 R_5 \cdot R_3 R_4 R_2 R_3 R_1 R_2 \cdot R_2 R_1 R_3 R_2 R_4 R_3 \cdot R_4 R_5 = \\
&= \text{Tr}_{1^6} P_{1\otimes 3\otimes 2} R_3 R_2 R_4 R_3 R_5 R_4 \cdot R_2 R_1 \cdot R_1 R_2 \cdot R_4 R_5 R_3 R_4 R_2 R_3 = \frac{H_{1\otimes 2}^{T[2,2]} H_{2\otimes 3}^{T[2,2]}}{S_2^*}, \\
&\text{Tr}_{1^6} P_{3\otimes 2\otimes 1} R_5 R_4 \cdot R_1 R_2 R_3 \cdot R_3 R_2 R_1 \cdot R_4 R_5 = \\
&= \text{Tr}_{1^6} P_{2\otimes 3\otimes 1} R_3 R_4 R_5 \cdot R_1 R_2 \cdot R_2 R_1 \cdot R_5 R_4 R_3 = \frac{H_{1\otimes 2}^{T[2,2]} H_{1\otimes 3}^{T[2,2]}}{S_1^*}.
\end{aligned}$$

Для серии торических зацеплений имеем

$$\begin{aligned}
H_{1\otimes 2\otimes 3}^{T[3,3n]} &= \\
&= \text{Tr}_{1^6} P_{1\otimes 2\otimes 3} (R_2 R_1 \cdot R_5 R_4 R_3 \cdot R_2 R_1 R_3 R_2 R_4 R_3 \cdot R_4 R_5 \cdot R_3 R_2 R_1 \cdot R_4 R_5 R_3 R_4 R_2 R_3)^n = \\
&= q^{22n} S_6^* + 2q^{10n} S_{51}^* + 2q^{2n} S_{42}^* + q^{-2n} S_{411}^* + q^{-2n} S_{33}^* + q^{-8n} S_{321}^*.
\end{aligned}$$

Наконец, для зацепления кольца Борромео полином ХОМФЛИ записывается как

$$\begin{aligned}
H_{1\otimes 2\otimes 3}^{6^3} &= \text{Tr}_{1^6} P_{1\otimes 2\otimes 3} R_2^{-1} R_1^{-1} \cdot R_5 R_4 R_3 \cdot R_2^{-1} R_1^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} R_4^{-1} R_3^{-1} \times \\
&\quad \times R_4 R_5 \cdot R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} \cdot R_4 R_5 R_3 R_4 R_2 R_3 = \\
&= S_6^* + (-q^{12} + q^{10} + q^8 - q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - q^{-4} + q^{-8} + q^{-10} - q^{-12}) S_{51}^* + \\
&\quad + (-q^{10} + q^8 + 2q^6 - 2q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} + q^{-8} - q^{-10}) S_{42}^* + \\
&\quad + S_{411}^* + S_{33}^* + S_{321}^*.
\end{aligned}$$

Во всех случаях ответы совпадают с результатом вычисления с помощью раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц.

9. ПРОЦЕДУРА КАБЛИРОВАНИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В предыдущих разделах мы описали процедуру каблирования и все необходимые для нее величины, а также рассмотрели ряд примеров. При этом сама процедура до сих пор рассматривалась как постулат. В настоящем разделе мы обсудим, почему процедура каблирования должна работать с точки зрения теории представлений. Подчеркнем, что процедура каблирования возникает не из топологии, а из теории представлений. Поэтому с помощью процедуры каблирования можно вычислять не только топологические инварианты, т.е. полиномы ХОМФЛИ, но также объекты, которые тесно связанные с последними, однако сами по себе не являются топологическими инвариантами: расширенные полиномы ХОМФЛИ [85] и $\mathcal{R}$ -матрицы.

В теории представлений старшие представления вводятся с помощью операции коумножения. Коумножение задает действие алгебры на тензорном произведении представлений и тем самым определяет разложение тензорного произведения на неприводимые представления. Именно в этом и состоит процедура каблирования. Рассмотрим двухнитевую $\mathcal{R}$ -матрицу, соответствующую пересечению нитей в представлениях T_1 и T_2 . Опишем ее с помощью фундаментальных R -матриц, действующих в косе из $|T_1| + |T_2|$ нитей. Соответствующую процедуру каблирования можно схематически задать с помощью следующих двух операций: во-первых, раскрашенная $\mathcal{R}$ -матрица заменяется произведением фундаментальных,

$$\mathcal{R}_{T_1 \otimes T_2} \rightarrow \prod_{i=1}^{|T_2|} \prod_{j=1}^{|T_1|} R_{|T_1|+i-j}; \quad (9.1)$$

во-вторых, вводятся проекторы P_R .

Первая операция (9.1) основана на равенстве

$$\mathcal{R}_{1^{|T_1|} \otimes 1^{|T_2|}} = \prod_{i=1}^{|T_2|} \prod_{j=1}^{|T_1|} R_{|T_1|+i-j}, \quad (9.2)$$

это равенство в свою очередь является следствием определения коумножения для $\mathcal{R}$ -матриц [104]–[106]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3} &= (I_{T_1} \otimes \mathcal{R}_{T_2 \otimes T_3}) \cdot (\mathcal{R}_{T_1 \otimes T_3} \otimes I_{T_2}), \\ \mathcal{R}_{T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)} &= (\mathcal{R}_{T_1 \otimes T_2} \otimes I_{T_3}) \cdot (I_{T_2} \otimes \mathcal{R}_{T_1 \otimes T_3}), \end{aligned} \quad (9.3)$$

где T_1 , T_2 и T_3 – произвольные представления, не обязательно неприводимые. Соотношение (9.2) выводится из (9.3) по индукции: сначала нужно применить первое из соотношений (9.3) $|T_1|$ раз,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1^{m+1} \otimes 1} &= \mathcal{R}_{(1^m \otimes 1) \otimes 1} = (I_{1^m} \otimes \mathcal{R}_{1 \otimes 1}) \cdot (\mathcal{R}_{1^m \otimes 1} \otimes I_1) = \\ &= R_{m+1}(\mathcal{R}_{1^m \otimes 1} \otimes I_1) = \prod_{i=1}^{m+1} R_{m-i+1}, \end{aligned}$$

а затем аналогичным образом применить второе из соотношений (9.3) $|T_2|$ раз.

Вторая операция основана на определении проекторов. Это определение опирается на разложение тензорной степени фундаментального (или старшего) представления по неприводимым представлениям: $1^m = \sum_{T \vdash 1^m} T$ (см. раздел 4). После того как проекторы определены, второй шаг делается на основании известного тождества из линейной алгебры:

$$\mathrm{Tr}_{1|T_1| \otimes 1|T_2|} P_{T_1} P_{T_2} \cdot (\cdot) = \mathrm{Tr}_{T_1 \otimes T_2} \cdot (\cdot).$$

Подводя итог, заметим, что процедура каблирования основана на следующем утверждении: *раскрашенная $\mathcal{R}$ -матрица равна произведению R -матриц в фундаментальном представлении и проекторов⁷⁾*. Это, в частности, означает, что в базисе, где соответствующие проекторы диагональны, “каблированное” произведение фундаментальных матриц распадается на “раскрашенные блоки”, относящиеся к разным неприводимым представлениям. Это утверждение нетривиально с точки зрения рассуждений из раздела 3, где фундаментальная и раскрашенная R -матрицы рассматриваются как два независимых объекта, определенных через свои собственные значения.

Основная техническая проблема здесь состоит в том, чтобы перейти от стандартного базиса (3.2), в котором известен вид фундаментальных R -матриц, к базису

$$(1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \cdots \otimes (1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1),$$

в котором следует вычислять раскрашенные R -матрицы. Коэффициенты Рака [99], непосредственно описывающие этот переход, в общем случае неизвестны. В некоторых случаях, однако, удастся найти необходимую матрицу перехода. Чтобы упростить задачу перехода от одного базиса к другому, можно попытаться диагонализировать проекторы P_Q ,

$$1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes (1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \cdots \otimes 1 \rightarrow 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes Q \otimes \cdots \otimes 1, \quad (9.4)$$

для которых известны выражения в виде многочленов от фундаментальных R -матриц (см. раздел 4). В свою очередь фундаментальные R -матрицы известны в явном виде (см. п. 3.3).

9.1. Выражение раскрашенных $\mathcal{R}$ -матриц через фундаментальные R -матрицы. Как уже было сказано в п. 3.3, всякая фундаментальная R -матрица строится из блоков размера 1×1 и 2×2 . Блоки размера 1×1 суть просто собственные значения $\pm q^{\pm 1}$, в то время как блоки размера 2×2 имеют вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{q^k[k]} & \frac{\sqrt{[k-1][k+1]}}{[k]} \\ \frac{\sqrt{[k-1][k+1]}}{[k]} & \frac{q^k}{[k]} \end{pmatrix}$$

и диагонализуются с помощью матриц

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[k-1]}{[2][k]}} & -\sqrt{\frac{[k+1]}{[2][k]}} \\ \sqrt{\frac{[k+1]}{[2][k]}} & \sqrt{\frac{[k-1]}{[2][k]}} \end{pmatrix}.$$

⁷⁾ Точное равенство имеет место в вертикальном оснащении (см. раздел 5). При другом выборе оснащения нужно дополнительно учитывать оснащающие множители.

Таким образом, легко диагонализировать каждую из $\mathcal{R}$ -матриц в отдельности. Этим способом можно получить выражения для $\mathcal{R}$ -матриц в представлениях уровня 2 через фундаментальные R -матрицы.

9.1.1. *Случай $|Q| = 2$.* Раскрашенные $\mathcal{R}$ -матрицы в представлениях уровня 2 (т. е. в представлениях $[2]$ и $[11]$) диагональны в базисах вида

$$(1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes \dots \quad (9.5)$$

В таких базисах диагональны все проекторы:

$$P_2^{(j)}: (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes (1 \otimes 1) \otimes \cdots \rightarrow (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes 2 \otimes \cdots,$$

$$P_{11}^{(j)}: (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes (1 \otimes 1) \otimes \cdots \rightarrow (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes 11 \otimes \cdots,$$

где через j обозначен номер пары фундаментальных представлений.

Мы имеем (см. раздел 4)

$$P_2^{(j)} = \frac{1 + qR_{2j-1}}{1 + q^2}, \quad P_{11}^{(j)} = \frac{q^2 - qR_{2j-1}}{1 + q^2},$$

диагонализировать все проекторы $P_{2,11}^{(j)}$ (что эквивалентно диагонализации всех проекторов $P_2^{(j)}$) означает диагонализировать все “нечетные” фундаментальные R_{2j-1} -матрицы. Это в самом деле можно сделать, так как среди R -матриц не коммутируют только пары соседних, т. е. R_i и R_{i+1} . Для R -матриц, имеющих вид, описанный выше, это означает, что там, где в одной из матриц встречается блок размера 2×2 , во всех остальных стоит либо диагональный блок с равными диагональными элементами, либо точно такой же блок размера 2×2 .

9.1.2. *Случай $|Q| = 3$.* Базисы, в которых диагональны $\mathcal{R}$ -матрицы в представлениях уровня 3, имеют вид

$$(1 \otimes 1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1 \otimes 1) \otimes \cdots \otimes (1 \otimes 1 \otimes 1). \quad (9.6)$$

В таких базисах диагональны все проекторы:

$$P_3^{(j)}: (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes (1 \otimes 1) \otimes \cdots \rightarrow (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes 2 \otimes \cdots,$$

$$P_{21}^{(j)}: (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes (1 \otimes 1) \otimes \cdots \rightarrow (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes 11 \otimes \cdots,$$

$$P_{111}^{(j)}: (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes (1 \otimes 1) \otimes \cdots \rightarrow (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \cdots \otimes 11 \otimes \cdots.$$

Как мы увидим в дальнейшем, достаточно диагонализировать проекторы $P_{21}^{(j)}$. Как следует из выражения (4.12), соответствующие формулы для проектора, выраженного через R -матрицы имеют вид

$$P_{21}^{(j)} = \frac{(R_{3j-2} - R_{3j-1})^2}{q^{-2} + 1 + q^2}.$$

Базис (9.6) определен неоднозначно, поскольку остается свобода в выборе базиса в двумерном пространстве представлений $[21]$, возникающих при разложении произведения в каждой из скобок⁸⁾: $[1] \otimes [1] \otimes [1] = [3] + 2[21] + [111]$. От этой неопределенности можно избавиться, зафиксировав порядок умножения фундаментальных

⁸⁾Есть также неопределенность более общего характера, так как не определен порядок умножения скобок. Во всех случаях мы будем выбирать базис $(((((\cdot) \otimes (\cdot)) \otimes (\cdot)) \cdots) \otimes \cdots)$, являющийся обобщением стандартного базиса (3.2).

представлений в каждой из скобок, например так:

$$(((1 \otimes 1) \otimes 1) \otimes ((1 \otimes 1) \otimes 1) \otimes \dots) \otimes ((1 \otimes 1) \otimes 1). \quad (9.7)$$

В этом базисе диагональны также все проекторы $*P_2^{(j)} = (1 + qR_{3j-2})/(1 + q^2)$. Их можно диагонализировать тем же способом, которым выше были диагонализированы проекторы $P_2^{(j)}$. После этого можно вычислить матрицы проекторов $P_{21}^{(j)}$ в том же базисе. Недиагональные элементы в этих матрицах появятся только там, где стоят нулевые и единичные блоки в уже диагонализированных проекторах $P_{21}^{(j)}$ и $*P_{21}^{(l)}$, так как эти проекторы коммутируют для всех j и l . В шестинитевом случае, который мы рассмотрим, все проекторы $P_{21}^{(j)}$ состоят из блоков размера 2×2 , за единственным исключением в виде блока размера 3×3 , который несколько раз входит в компоненту $P_{21|321}^{(j)}$, соответствующую представлению $[321]$. Универсальный вид блоков в проекторах на представления размера 3, в отличие от вида блоков в фундаментальных R -матрицах и в проекторах на представления размера 2, неизвестен. Мы вычислили эти блоки в некоторых частных случаях, явные выражения приведены в приложении F к работе [98].

9.2. Операторы перестановки в $\mathcal{R}$ -матрицах и U -матрицах. Операторы $\mathcal{U}$ (матрицы смешивания) можно определить одним из двух способов. При первом способе эти операторы определены просто как матрицы перехода от одного базиса (например, того, в котором диагональна $\mathcal{R}$ -матрица, соответствующая пересечению первой и второй нитей) к другому (например, к тому, в котором диагональна $\mathcal{R}$ -матрица, соответствующая пересечению второй и третьей нитей). Таким образом определены все $\mathcal{U}$ -матрицы, описанные в разделе 8. В рамках подхода, при котором используются матрицы смешивания такого типа, подразумевается, что диагональный вид $\mathcal{R}$ -матрицы известен независимо от расположения соответствующего пересечения. Существует другой способ определить операторы $\mathcal{U}$. Его основное отличие состоит в том, что теперь оператор $\mathcal{U}$ включает оператор перестановки и, следовательно, изменяет расположение нитей в косе. Такие матрицы мы будем обозначать как U . Операторы U , которые мы обсудим в настоящем пункте, позволяют определить произвольную $\mathcal{R}$ -матрицу, пользуясь только диагональной $\mathcal{R}$ -матрицей, соответствующей пересечению первой и второй нитей. Способ определения операторов U показан ниже (здесь и далее через m обозначено число нитей):

для $m = 2$

$$T_1 \otimes T_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_{T_1 T_2}} T_2 \otimes T_1,$$

для $m = 3$

$$\begin{array}{ccc} (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{(T_1 T_2) T_3}} & (T_2 \otimes T_1) \otimes T_3 \\ \downarrow U_{T_1 T_2 T_3} & & \downarrow U_{T_2 T_1 T_3} \\ T_3 \otimes (T_2 \otimes T_1) & \xrightarrow{\mathcal{R}_{T_3 (T_2 T_1)}} & T_3 \otimes (T_1 \otimes T_2) \end{array}$$

при этом

$$\mathcal{R}_{T_3(T_2T_1)} = U_{T_1T_2T_3} \mathcal{R}_{(T_1T_2)T_3} U_{T_2T_1T_3}^\dagger.$$

Далее мы рассмотрим несколько конкретных примеров, в каждом из которых приведем явный вид произведений фундаментальных R -матриц, соответствующих раскрашенным $\mathcal{R}$ -матрицам. Во всех примерах, разобранных ниже, как и во всей настоящей работе, $\mathcal{R}$ -матрицы написаны в вертикальном оснащении (см. раздел 5).

9.3. Случай $|T| = 2$, $m = 2$. В этом случае мы имеем единственную $\mathcal{R}$ -матрицу, которую согласно (9.1) следует заменить на произведение:

$$\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_1 = R_2 R_1 R_3 R_2.$$

В базисе (9.5) матрица $\mathfrak{R}$ распадается на блоки, соответствующие раскрашенным $\mathcal{R}$ -матрицам вида $\mathcal{R}_{QQ'}$, где $|Q| = |Q'| = 2$ (на рисунке, приведенном ниже, и далее сплошными линиями обозначено симметрическое представление, а пунктирными – антисимметрическое):

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \diagup \quad \diagdown \cdots \\ \diagdown \quad \cdots \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \quad \cdots \\ \cdots \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \diagup \quad \cdots \\ \cdots \diagdown \end{array} \\ \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{112} & \mathcal{R}_{211} & \mathcal{R}_{111} \end{array}$$

В данном случае сплошная линия отвечает представлению [2], а пунктирная – представлению [11].

Для $Q = [31]$ имеем следующее. Представление [31] возникает в разложении произведений $2 \otimes 2$, $2 \otimes 11$, $11 \otimes 2$ и не возникает в разложении произведения $11 \otimes 11$. Поэтому $\mathfrak{R}$ -матрица содержит три из четырех возможных блоков:

$$\mathfrak{R}_{1|31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \\ 0 & q^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2 \otimes 2|31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{2 \otimes 11|31} \\ 0 & \mathcal{R}_{11 \otimes 2|31} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $Q = [22]$ имеем следующее. Представление [22] возникает в разложении произведений $2 \otimes 2$, $11 \otimes 11$ и не возникает в разложении произведений $2 \otimes 11$, $11 \otimes 2$. Поэтому $\mathfrak{R}$ -матрица содержит два из четырех возможных блоков:

$$\mathfrak{R}_{1|22} = \begin{pmatrix} q^{-2} & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2 \otimes 2|22} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{11 \otimes 11|22} \end{pmatrix}.$$

9.4. Случай $|T| = 2$, $m = 3$. В случае трехнитевых узлов имеются две различные $\mathcal{R}$ -матрицы:

$$\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_1 \equiv R_2 R_1 R_3 R_2, \quad \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathfrak{R}_2 \equiv R_4 R_3 R_5 R_4.$$

Раскрашенную матрицу смешивания U также следует заменить на определенное произведение фундаментальных – на $\mathfrak{U} = UVWY \cdot UVW$ (обозначения, как в работах [86], [90]). Существуют восемь различных типов пересечений, соответствующих

матрицам $\mathcal{R}$:

Восемь возможных переходов между ними описываются операторами $\mathcal{U}$, заданными следующим образом:

В базисе $((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)) \otimes (1 \otimes 1)$ матрицы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{U}$ имеют блочную структуру:

$$\mathfrak{R}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{(2 \otimes 2) \otimes 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{(2 \otimes 2) \otimes 11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{(2 \otimes 11) \otimes 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{(11 \otimes 2) \otimes 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{(2 \otimes 11) \otimes 11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{(11 \otimes 2) \otimes 11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{(11 \otimes 11) \otimes 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{(11 \otimes 11) \otimes 11} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{R}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2 \otimes (2 \otimes 2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{2 \otimes (2 \otimes 11)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{2 \otimes (11 \otimes 2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{11 \otimes (2 \otimes 2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{2 \otimes (11 \otimes 11)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{11 \otimes (2 \otimes 11)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{11 \otimes (11 \otimes 2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{11 \otimes (11 \otimes 11)} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} U_{2 \otimes 2 \otimes 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{11 \otimes 2 \otimes 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{2 \otimes 11 \otimes 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{2 \otimes 2 \otimes 11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{11 \otimes 11 \otimes 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{11 \otimes 2 \otimes 11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{2 \otimes 11 \otimes 11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{11 \otimes 11 \otimes 11} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что равенство $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{U} \mathfrak{R}_1 \mathfrak{U}^\dagger$ разбивается на отдельные компоненты:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2 \otimes (2 \otimes 2)} &= U_{2 \otimes 2 \otimes 2} \mathcal{R}_{(2 \otimes 2) \otimes 2} U_{2 \otimes 2 \otimes 2}^\dagger, \\ \mathcal{R}_{11 \otimes (11 \otimes 11)} &= U_{11 \otimes 11 \otimes 11} \mathcal{R}_{(11 \otimes 11) \otimes 11} U_{11 \otimes 11 \otimes 11}^\dagger, \\ \mathcal{R}_{11 \otimes (2 \otimes 2)} &= U_{2 \otimes 2 \otimes 11} \mathcal{R}_{(2 \otimes 2) \otimes 11} U_{11 \otimes 2 \otimes 2}^\dagger, \\ \mathcal{R}_{2 \otimes (11 \otimes 2)} &= U_{2 \otimes 11 \otimes 2} \mathcal{R}_{(2 \otimes 11) \otimes 2} U_{2 \otimes 11 \otimes 2}^\dagger, \\ \mathcal{R}_{2 \otimes (2 \otimes 11)} &= U_{11 \otimes 2 \otimes 2} \mathcal{R}_{(11 \otimes 2) \otimes 2} U_{2 \otimes 11 \otimes 11}^\dagger, \\ \mathcal{R}_{2 \otimes (11 \otimes 11)} &= U_{11 \otimes 11 \otimes 2} \mathcal{R}_{(11 \otimes 11) \otimes 2} U_{2 \otimes 11 \otimes 11}^\dagger, \\ \mathcal{R}_{11 \otimes (2 \otimes 11)} &= U_{11 \otimes 2 \otimes 11} \mathcal{R}_{(11 \otimes 2) \otimes 11} U_{11 \otimes 2 \otimes 11}^\dagger, \\ \mathcal{R}_{2 \otimes (11 \otimes 11)} &= U_{11 \otimes 11 \otimes 2} \mathcal{R}_{(11 \otimes 11) \otimes 2} U_{2 \otimes 11 \otimes 11}^\dagger. \end{aligned}$$

Явный вид блоков приведен в приложении G к работе [98].

9.5. Случай $|T| = 3$, $m = 2$. Для представлений размера 3 мы, вследствие технической трудности вычислений, ограничимся рассмотрением двухнитевых узлов. В этом случае потребуется вычисление для шести ($2 \cdot 3 = 6$) нитей в фундаментальном представлении (как и в случае трехнитевых узлов в представлениях размера 2). Следует взять базис вида $(1 \otimes 1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1 \otimes 1)$.

Согласно (9.1) каждую $\mathcal{R}$ -матрицу следует заменить на произведение девяти фундаментальных R -матриц:

$$\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R} = R_3 R_2 R_1 R_4 R_3 R_2 R_5 R_4 R_3.$$

В базисе (9.7) эта матрица распадается на блоки, соответствующие неприводимым представлениям, возникающим в разложении $(1 \otimes 1) \otimes 1 = 3 + \underline{21} + \overline{21} + 111$. Мы

имеем

$$\mathfrak{R} = \text{diag}(\mathfrak{r}_{3 \otimes 111}, \mathfrak{r}_{3 \otimes 21}, \mathfrak{r}_{21 \otimes 111}, \mathfrak{r}_{21 \otimes 21}),$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{3 \otimes 111} &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{3 \otimes 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{3 \otimes 111} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{111 \otimes 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{111 \otimes 111} \end{pmatrix}, & \mathfrak{r}_{3 \otimes 21} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{3 \otimes 21} & 0 & 0 \\ \mathcal{R}_{21 \otimes 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{3 \otimes \overline{21}} \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{\overline{21} \otimes 3} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{r}_{21 \otimes 111} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{111 \otimes 21} & 0 & 0 \\ \mathcal{R}_{\overline{21} \otimes 111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{111 \otimes \overline{21}} \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{\overline{21} \otimes 111} & 0 \end{pmatrix}, & \mathfrak{r}_{21 \otimes 21} &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{21 \otimes 21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{\overline{21} \otimes \overline{21}} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{\overline{21} \otimes 21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{\overline{21} \otimes \overline{21}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Явный вид блоков приведен в приложении Н к работе [98].

10. ПРОЦЕДУРА КАБЛИРОВАНИЯ И ГИПОТЕЗА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В работе [89] сформулировано предположение, что существует определенное соотношение между собственными значениями $\mathcal{R}$ -матрицы и соответствующими коэффициентами Рака. Утверждается, что все трехнитевые U -матрицы зависят только от (нормированных некоторым образом) собственных значений $\mathcal{R}$ -матриц; при этом предполагается, что на все три нити помещено одно и то же представление. Изучая процедуру каблирования, мы можем объяснить, почему элементы U -матриц выражаются через собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц.

10.1. Ограничения на элементы $\mathcal{R}$ -матриц, вытекающие из процедуры каблирования. Существование процедуры каблирования подразумевает наличие строгих ограничений на вид $\mathcal{R}$ -матриц. Как уже обсуждалось в разделе 9, данная процедура на самом деле описывает правило слияния (коумножения) для $\mathcal{R}$ -матриц. Это означает, что произведения $\mathcal{R}$ -матриц специального вида в определенном базисе разлагаются на блоки, соответствующие $\mathcal{R}$ -матрицам в старших представлениях (см. примеры в разделе 9). Таким образом, правило коумножения (9.3) можно рассматривать как систему условий на элементы $\mathcal{R}$ -матриц, имеющую следующий вид:

$$\mathcal{U}_{xxx} \mathcal{R}_{(xx)x} \mathcal{U}_{xxx}^\dagger \mathcal{R}_{(xx)x} \mathcal{U}_{xxx} = \text{Diag}(\mathcal{R}_{wx})_{w \vdash x \otimes x}, \quad (10.1)$$

где в правой части стоит диагонализированная $\mathcal{R}$ -матрица; каждому из возможных w соответствует одно из собственных значений этой матрицы. Появление в этом соотношении трех вместо двух различных матриц перехода можно объяснить следующим образом: $\mathcal{R}$ -матрица $\mathcal{R}_{wx}$ диагональна, если она действует из пространства $w \otimes x$ в пространство $x \otimes w$. Таким образом, если потребовать, чтобы матрица в правой части равенства (10.1) была диагональна, то в левой части возникнут три матрицы перехода. Соотношение (10.1) всегда распадается на отдельные раскрашенные блоки, по одному на каждое пространство неприводимых представлений $Q \vdash x \otimes x \otimes x$, соответствующих одной и той же диаграмме Юнга. Мы будем иметь в виду, что все соотношения в настоящем разделе написаны для отдельных раскрашенных блоков $\mathcal{U}_{xxx|Q}$, несмотря на то что индекс Q будет опускаться. В частности, индекс w в (10.1) пробегает не все неприводимые представления в разложении $x \otimes x$, а только те из них, которые содержат Q в разложении $w \otimes x$.

Если все элементы диагональной матрицы $\mathcal{R}_{xx}$ известны, то система (10.1) налагает жесткие ограничения на элементы матрицы Рака $\mathcal{U}$ и на собственные значения матрицы $\mathcal{R}_{wx}$ для представлений w таких, что $|w| > |x|$. На первый взгляд, система (10.1) даже кажется переопределенной: условие обращения в нуль внедиагональных элементов в левой части приводит к $N^2 - N$ соотношениям, в то время как ортогональная матрица $\mathcal{U}$ содержит всего $(N^2 - N)/2$ свободных параметров. Кажущееся противоречие разрешается тем фактом, что матрица Рака $\mathcal{U}$ не только ортогональна, но удовлетворяет также соотношению $\mathcal{U}\sigma = \sigma\mathcal{U}^\dagger$ для некоторой матрицы σ такой, что $\sigma_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\sigma_{ii} = \pm 1$. Мы будем называть такие матрицы $\mathcal{U}$ псевдосимметричными. Предположив, что матрица $\mathcal{U}$ псевдосимметричная, можно увидеть, что число независимых уравнений в (10.1) уменьшается. На конкретных примерах мы покажем, что число уравнений в точности равно числу неизвестных. На самом деле, достаточно рассмотреть случай симметричных матриц, так как всякое псевдосимметричное решение $\mathcal{U}$ уравнений (10.1) соответствует некоторому симметричному⁹⁾.

10.2. Выражение для элементов $\mathcal{U}$ -матрицы через собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы. Для дальнейшего анализа немного упростим выражение (10.1). Из уравнения (10.1) и из свойства ортогональной матрицы $\det \mathcal{U} = \pm 1$ следует, что $\det^2 \mathcal{R}_{(xx)x} = \det \mathcal{R}_{wx}$. Вследствие этого непосредственная подстановка показывает, что уравнение (10.1) останется верным, если в обеих частях равенства перемасштабировать $\mathcal{R}$ -матрицы как

$$\mathcal{R} \rightarrow \frac{\mathcal{R}}{(\pm \det \mathcal{R})^{1/n}}, \quad (10.2)$$

где n – размер матриц, а знак перед детерминантом выбирается так, чтобы выражение в скобках было положительным для положительных вещественных q (это несколько упрощает последующие формулы). Тогда уравнение (10.1) в компонентах можно записать следующим образом:

$$\sum_{j,k=1}^n \mathcal{U}_{ij} \mathcal{U}_{jk} \mathcal{U}_{lk} \xi_j \xi_k = \delta_{il} \eta_i, \quad (10.3)$$

где ξ и η – нормированные собственные значения, введенные в работе [89]¹⁰⁾:

$$\frac{\mathcal{R}_{(xx)x}}{(\pm \det \mathcal{R})^{1/n}} \equiv \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \frac{\text{Diag}(\mathcal{R}_{wx})_{w \vdash x \otimes x}}{(\pm \det \mathcal{R})^{1/n}} \equiv \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

Уравнения (10.3) вместе с условием ортогональности $\sum_{k=1}^n \mathcal{U}_{ik} \mathcal{U}_{lk} = \delta_{il}$ составляют систему уравнений для $\mathcal{U}$ -матрицы. На первый взгляд, найти решение системы в явном виде невозможно, так как она существенно нелинейная. В некоторых частных случаях эта система, однако, сводится к линейной.

⁹⁾Если матрица $\mathcal{U}$ псевдосимметричная, т.е. $\mathcal{U}\sigma = \sigma\mathcal{U}^\dagger$, то матрица $U\sigma$ симметричная: $(U\sigma)^\dagger = U\sigma$. Тогда симметричное решение можно получить из псевдосимметричного, подставляя $\mathcal{U}\sigma$ вместо $\mathcal{U}$ в уравнения (10.1).

¹⁰⁾В работе [89] нормированные собственные значения обозначены через $\tilde{\xi}$, в то время как обозначение ξ использовано для обыкновенных собственных значений. Мы будем использовать обозначение ξ для нормированных собственных значений, так как обыкновенные собственные значения не встречаются в вычислениях данного раздела.

Поскольку предполагается, что матрица $\mathcal{U}$ ортогональна и симметрична, ее можно выразить через линейный симметричный проектор $\mathcal{P}$ как

$$\mathcal{U} = 1 - 2\mathcal{P}, \quad \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}, \quad (10.4)$$

следовательно, $\mathcal{U}^2 = 1$, $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}$. В простейшем случае $\text{rank } \mathcal{P} = 1$, тогда

$$\mathcal{P} = u_i u_j, \quad \mathcal{U}_{ij} = \delta_{ij} - 2u_i u_j. \quad (10.5)$$

Подстановка этих выражений в (10.3) в этом случае дает

$$\delta_{il} \xi_i^2 - 2u_i u_l (\xi_l^2 + \xi_i^2 + \xi_i \xi_l) + 4u_i u_l \left((\xi_i + \xi_l) \sum_{j=1}^n u_j^2 \xi_j + \sum_{j=1}^n u_j^2 \xi_j^2 \right) - 8u_i u_l \left(\sum_{j=1}^n u_j^2 \xi_j \right)^2 = \delta_{ij} \eta_i. \quad (10.6)$$

В результате для внедиагональных компонент получаем

$$-(\xi_l^2 + \xi_i^2 + \xi_i \xi_l) + 2 \left((\xi_i + \xi_l) \sum_{j=1}^n u_j^2 \xi_j + \sum_{j=1}^n u_j^2 \xi_j^2 \right) - 4 \left(\sum_{j=1}^n u_j^2 \xi_j \right)^2 = 0, \quad i \neq l. \quad (10.7)$$

Условие (10.4) тогда сводится к следующему:

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1. \quad (10.8)$$

Вид проектора (10.5) является единственно возможным для матриц смешивания размера $n = 2$. При $n = 3$ возможен также случай $\text{rank } \mathcal{P} = 2$, который сводится к предыдущему с помощью следующих соотношений:

$$\mathcal{U} = 1 - 2\mathcal{P} = 2(\mathcal{P} - 1) - 1, \quad (1 - \mathcal{P})^2 = 1 - \mathcal{P}, \quad \text{rank}(1 - \mathcal{P}) = n - \text{rank } \mathcal{P}.$$

Явные выражения для $\mathcal{U}$ -матриц при $n = 2, 3$ мы получим в п. п. 10.2.1, 10.2.2. При $n \geq 4$ и $\text{rank } \mathcal{P} = 1$ система уравнений (10.7), (10.8) оказывается несовместной, а случай $\text{rank } \mathcal{P} = 2$ не сводится к (10.5). Следовательно, не существует решений вида (10.5) при $n \geq 4$.

После того как $\mathcal{U}$ -матрицы получены, нормированные собственные значения η для старших представлений сразу же определяются из соотношений (10.6). Другой способ состоит в том, чтобы определить η_i непосредственно из уравнений (10.1), предполагая, что $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}$. Действительно, вводя обозначение $\tilde{\mathcal{R}} \equiv \text{Diag}(\mathcal{R}_{wx})_{w \vdash x \otimes x}$, перепишем уравнения (10.6) как $\mathcal{U} \mathcal{R} \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{R}}$, следовательно,

$$\mathcal{U} \mathcal{R} \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{U} \mathcal{R}^{-1}, \quad \mathcal{U} \mathcal{R} \mathcal{U} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{U} \tilde{\mathcal{R}},$$

таким образом, $\tilde{\mathcal{R}} \mathcal{U} \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{U} \tilde{\mathcal{R}} = 0$.

Если $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ перенормированы согласно (10.2), то последнее уравнение запишется в компонентах следующим образом: $(\xi_i^{-1} \eta_j - \xi_j^{-1} \eta_i) \mathcal{U}_{ij} = 0$, откуда $\xi_i \eta_i = C$ при условии, что $\mathcal{U}_{ij} \neq 0$ для всех i, j (что имеет место для всех известных $\mathcal{U}$ -матриц). Из соотношения на детерминанты матриц, входящих в (10.1), следует, что $C^3 = 1$; при этом можно положить $C = 1$, так как общий фазовый множитель несущественен при определении нормированных собственных значений. Таким образом, $\eta_i = \xi_i^{-1}$. Это же соотношение получается с помощью общей формулы $\mathcal{R}_{xy|Q} = q^{\varkappa_Q - \varkappa_x - \varkappa_y}$ в соответствии с (3.1).

10.2.1. Матрицы смешивания размера 2×2 . Условия (10.7), (10.8) задают два уравнения относительно u_1^2 и u_2^2 , одно квадратное и одно линейное:

$$\begin{aligned} u_1^2 \xi_1^4 + 2\xi_1 \xi_2 u_1^2 u_2^2 + u_2^2 \xi_2^4 - (2\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2) u_1^2 - (2\xi_2^2 + \xi_1 \xi_2) u_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Исключая u_2^2 , получаем $((\xi_1 - \xi_2)u_1^2 - \xi_1)^2 = 0$. Таким образом, система (10.7), (10.8) имеет единственное решение, причем это решение рационально относительно u_1^2 и u_2^2 . Подстановка этого решения в (10.4) приводит к следующему выражению для $\mathcal{U}$ -матрицы:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_{11} & \mathcal{U}_{12} \\ \mathcal{U}_{12} & -\mathcal{U}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} & \frac{\sqrt{\xi_1^2 + 1 + \xi_2^2}}{\xi_1 - \xi_2} \\ \frac{\sqrt{\xi_1^2 + 1 + \xi_2^2}}{\xi_1 - \xi_2} & \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Это выражение совпадает с приведенным в работе [89].

10.2.2. Матрицы смешивания размера 3×3 . При $n > 2$ уравнения (10.7) задают не одно, а несколько соотношений (по одному на каждую внедиагональную компоненту симметричной матрицы), причем разность любых двух дает линейное уравнение относительно u_i^2 :

$$-(\xi_l^2 - \xi_m^2 + \xi_i(\xi_l - \xi_m)) + 2(\xi_l - \xi_m) \sum_{j=1}^n u_j^2 \xi_j = 0, \quad i \neq l \neq m.$$

Для $n = 3$ это уравнение приводит к трем различным уравнениям, каждое из которых разлагается на множители как

$$\begin{aligned} i = 1, l = 2, m = 3: & (\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 u_1^2 + \xi_2 u_2^2 + \xi_3 u_3^2 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3) = 0, \\ i = 2, l = 1, m = 3: & (\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 u_1^2 + \xi_2 u_2^2 + \xi_3 u_3^2 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3) = 0, \\ i = 3, l = 1, m = 2: & (\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 u_1^2 + \xi_2 u_2^2 + \xi_3 u_3^2 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3) = 0. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Множитель, зависящий от u (второй), во всех трех выражениях совпадает. Этот множитель линеен по u_1^2 , u_2^2 и u_3^2 так же, как и уравнение (10.8), которое при $n = 3$ выглядит следующим образом:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1. \quad (10.10)$$

Выражая u_2^2 и u_3^2 из уравнений (10.9), (10.10) и подставляя результат в (10.7), скажем, для $i = 1, l = 2$, получаем

$$\begin{aligned} \xi_1^2 u_1^4 + \xi_2^2 u_2^4 + \xi_3^2 u_3^4 + 2\xi_1 \xi_2 u_1^2 u_2^2 + 2\xi_1 \xi_3 u_1^2 u_3^2 + 2\xi_2 \xi_3 u_2^2 u_3^2 - (2\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2) u_1^2 - \\ - (2\xi_2^2 + \xi_1 \xi_2) u_2^2 - (\xi_3^2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3) u_3^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1 \xi_2) = 0. \end{aligned}$$

Все это приводит к уравнению, линейному относительно u_1^2 :

$$(\xi_1^2 - \xi_1 \xi_2 - \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3) u_1^2 - \xi_1^2 = 0.$$

Решение этого уравнения вместе с соответствующими решениями для u_2^2 и u_3^2 после подстановки в (10.4) воспроизводят формулы из работы [89] для матриц смешивания размера 3×3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{11} &= -\frac{\xi_1(\xi_2 + \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}, & \mathcal{U}_{22} &= -\frac{\xi_2(\xi_1 + \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}, & \mathcal{U}_{33} &= -\frac{\xi_3(\xi_1 + \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}, \\ \mathcal{U}_{12}^2 &= -\frac{(\xi_1^2 - 1)(\xi_2^2 - 1)}{\xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_3)}, & \mathcal{U}_{23}^2 &= -\frac{(\xi_2^2 - 1)(\xi_3^2 - 1)}{\xi_2 \xi_3 (\xi_2 - \xi_3)^2 (\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)}, \\ \mathcal{U}_{13}^2 &= -\frac{(\xi_1^2 - 1)(\xi_3^2 - 1)}{\xi_1 \xi_3 (\xi_1 - \xi_3)^2 (\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_2)}. \end{aligned}$$

10.3. Гипотеза собственных значений в случае различных представлений. Используя методы, описанные в п. 10.1, можно попытаться обобщить гипотезу собственных значений на случай различных представлений на разных компонентах зацепления. Такое обобщение потенциально ведет к возможности вычислять инварианты раскрашенных зацеплений путем непосредственного применения формализма Решетихина–Тураева. Обобщение гипотезы собственных значений, которое мы предлагаем и которое проиллюстрируем ниже, состоит в том, что матрицы смешивания для данной раскрашенной косы полностью определяются нормированными собственными значениями тех $\mathcal{R}$ -матриц, которые могут возникнуть в данной косе.

10.3.1. Два различных представления.

ГИПОТЕЗА 1. Каждую из двух матриц смешивания $\mathcal{U}_{QSQ}$ и $\mathcal{U}_{QQS} = \mathcal{U}_{SQQ}^\dagger$ можно выразить через нормированные собственные значения двух матриц: матрицы $\mathcal{R}_{QQ}$ и матрицы $\mathcal{R}_{SQ}$.

Тогда можно написать два соотношения вместо (10.1):

$$\mathcal{U}_{xyx} \mathcal{R}_{(yx)x} \mathcal{U}_{xxy} \mathcal{R}_{(xx)y} \mathcal{U}_{xyx} = \mathcal{R}_{wx}, \quad \mathcal{U}_{xxy} \mathcal{R}_{(xy)x} \mathcal{U}_{xyx} \mathcal{R}_{(xy)x} \mathcal{U}_{yxx} = \mathcal{R}_{wy}. \quad (10.11)$$

Однако уже первого из них достаточно, чтобы определить обе матрицы смешивания и собственные значения, стоящие в правой части.

Приведем вид матриц смешивания размера 2×2 . Записав $\mathcal{R}$ и $\mathcal{U}$ в виде матриц и подставив их в уравнение (10.11), получаем два матричных уравнения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -c_x & s_x \\ s_x & c_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{yx} & 0 \\ 0 & -\xi_{yx}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_y & s_y \\ s_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{yy} & 0 \\ 0 & -\xi_{yy}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_y & s_y \\ s_y & c_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_{wy} & 0 \\ 0 & -\xi_{wy}^{-1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -c_y & s_y \\ s_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{xy} & 0 \\ 0 & -\xi_{xy}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_x & s_x \\ s_x & c_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{yx} & 0 \\ 0 & -\xi_{yx}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_y & s_y \\ s_y & c_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_{wx} & 0 \\ 0 & -\xi_{wx}^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найти решение этой системы оказывается весьма просто. Условие совместности на внедиагональные компоненты первого уравнения сводится к уравнению, линейному относительно c_y^2 и $s_y^2 = 1 - c_y^2$. Из этого уравнения можно найти c_y^2 . После того как найдены c_y^2 , величины c_x , s_x можно получить как решения соответствующей вырожденной линейной системы. Подставляя полученные c_x^2 и c_y^2 обратно в (10.11), находим ξ_{xx} и ξ_{xy} .

Решения, полученные таким способом, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} c_x^2 &= \frac{\xi_{xx}^2 - \xi_{xy}^4}{(1 - \xi_{xy}^4)(1 + \xi_{xx}^2)}, & c_y^2 &= \frac{\xi_{xy}^2(1 - \xi_{xx}^2)^2}{\xi_{xx}^2(1 - \xi_{yx}^4)^2}, \\ s_x^2 &= \frac{1 - \xi_{xx}^2 \xi_{xy}^4}{(1 - \xi_{xy}^4)(1 + \xi_{xx}^2)}, & s_y^2 &= \frac{(\xi_{xx}^2 - \xi_{yx}^4)(1 - \xi_{xy}^4 \xi_{xx}^2)}{\xi_{xx}^2(1 - \xi_{yx}^4)^2}, \\ \xi_{wx} &= -\frac{1}{\xi_{yx}}, & \xi_{wy} &= -\frac{1}{\xi_{xx}}. \end{aligned}$$

10.3.2. Три различных представления.

ГИПОТЕЗА 2. Каждую из трех матриц смешивания $\mathcal{U}_{zxy} = \mathcal{U}_{yxz}^\dagger$, $\mathcal{U}_{xzy} = \mathcal{U}_{yzx}^\dagger$ и $\mathcal{U}_{zyx} = \mathcal{U}_{xyz}^\dagger$ можно выразить через нормированные собственные значения трех матриц: матрицы $\mathcal{R}_{yz}$, матрицы $\mathcal{R}_{xz}$ и матрицы $\mathcal{R}_{yx}$.

В данном случае мы имеем три уравнения вместо одного (10.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{xyz} \mathcal{R}_{(yz)x} \mathcal{U}_{xzy} \mathcal{R}_{(xz)y} \mathcal{U}_{zxy} &= \mathcal{R}_{wz}, \\ \mathcal{U}_{xzy} \mathcal{R}_{(zy)x} \mathcal{U}_{xyz} \mathcal{R}_{(xy)z} \mathcal{U}_{yxz} &= \mathcal{R}_{wy}, \\ \mathcal{U}_{zyx} \mathcal{R}_{(yx)z} \mathcal{U}_{zxy} \mathcal{R}_{(zx)y} \mathcal{U}_{xzy} &= \mathcal{R}_{wx}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

На самом деле любых двух из них достаточно, чтобы определить все матрицы смешивания и собственные значения, стоящие в правых частях.

Выпишем матрицы смешивания размера 2×2 . Первое из уравнений (10.12) в данном случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} -c_y & s_y \\ s_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{zy} & 0 \\ 0 & -\xi_{zy}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_z & s_z \\ s_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{xz} & 0 \\ 0 & -\xi_{xz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_x & s_x \\ s_x & c_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{wz} & 0 \\ 0 & -\xi_{wz}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

Всего мы имеем четыре уравнения на внедиагональные компоненты двух уравнений системы (10.12). Решения этой системы можно найти, изучая условия совместности этих четырех уравнений (данные условия сводятся к линейным уравнениям на квадраты параметров матриц смешивания). Решение имеет вид

$$c_z^2 = \frac{(\xi_{xz}^2 - \xi_{xy}^2 \xi_{zy}^2)(\xi_{zy}^2 - \xi_{xz}^2 \xi_{xy}^2)}{\xi_{xy}^2(1 - \xi_{zy}^4)(1 - \xi_{xz}^4)}, \quad s_z^2 = \frac{(\xi_{xy}^2 - \xi_{xz}^2 \xi_{zy}^2)(1 - \xi_{zy}^2 \xi_{xz}^2 \xi_{xy}^2)}{\xi_{xy}^2(1 - \xi_{zy}^4)(1 - \xi_{xz}^4)}, \quad \xi_{wz} = -\frac{1}{\xi_{yx}}.$$

Знаки решений c_z и s_z можно восстановить с помощью подстановки ответа в (10.13).

10.4. Блоки в недиагональных $\mathcal{R}$ -матрицах. Следуя подходу п. п. 10.1–10.3, можно также определить вид блоков в $\mathcal{R}$ -матрицах, которые приведены в п. 3.2. Из условия самосогласованности процедуры каблирования можно вывести соотношения непосредственно на элементы $\mathcal{R}$ -матриц:

$$\text{Diag}(\mathcal{R}_{ux|w}^2)_{w \otimes x \dashv Q}^{w \vdash u \otimes x} = \mathcal{R}_{x^{m+1} \otimes x} \mathcal{R}_{x \otimes x^{m+1}}. \quad (10.14)$$

Тогда из соотношения (10.1) и формулы для коумножения (9.3) следует, что

$$\begin{aligned} \text{Diag}(\mathcal{R}_{ux|w}^2)_{w \otimes x \dashv Q}^{w \vdash u \otimes x} &= \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)} \mathcal{R}_{(x^m \otimes x) \otimes x} \mathcal{R}_{(x \otimes x^m) \otimes x} \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)} = \\ &= \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)} \text{Diag}(\mathcal{R}_{wx|Q}^2)_{w \otimes x \dashv Q}^{w \vdash u \otimes x} \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)}, \end{aligned}$$

где u – неприводимое представление такое, что $u \vdash x^{m-1}$ и $Q \vdash u \otimes x^2$. Различные представления u никогда не появляются в одной и той же матрице смешивания в силу свойств $\mathcal{R}$ -матриц. Размер n недиагонального блока равен числу представлений w , которые одновременно удовлетворяют условиям $w \vdash u \otimes x$ и $w \otimes x \vdash Q$. Ниже мы найдем явный вид блоков в недиагональных $\mathcal{R}$ -матрицах в двух случаях, в которых эти блоки имеют размер $n = 2$: для фундаментального представления $x = \square$ и в случае, когда представления x, u, Q и, следовательно, все представления w описываются диаграммами типа крюка.

Обозначив через r_{11}, r_{12} и r_{22} неизвестные элементы недиагонального блока, а через λ_1 и λ_2 соответствующие собственные значения матрицы $\mathcal{R}_{ux|w}$, перепишем уравнение (10.14) для блока размера 2×2 в виде

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для внедиагональных элементов записываются как $r_{12}(\lambda_1^2 r_{11} + \lambda_2^2 r_{22}) = 0$. Кроме того, воспользуемся очевидным свойством матрицы размера 2×2 :

$$r_{11} + r_{22} = \mu_1 + \mu_2, \quad r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = \mu_1\mu_2,$$

где μ_1 и μ_2 – собственные значения внедиагонального блока, которые мы считаем известными. Решение данных уравнений имеет вид

$$r_{11} = -\frac{(\mu_1 + \mu_2)\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad r_{22} = -\frac{(\mu_1 + \mu_2)\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad r_{12}^2 = \frac{(\mu_1\lambda_1^2 + \mu_2\lambda_2^2)(\mu_1\lambda_2^2 + \mu_2\lambda_1^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}. \quad (10.15)$$

Рассмотрим фундаментальное представление. Если $x = \square$, то представление Q получается из u добавлением пары клеток (i_1, j_1) и (i_2, j_2) , следовательно, есть два возможных представления w , которые получаются из u добавлением одной или другой из этих клеток. В соответствии с общей формулой (3.1) имеем

$$\mu_1 = q, \quad \mu_2 = -q^{-1}, \quad \lambda_{1,2} = q^{\varkappa_{w_{1,2}} - \varkappa_u} = q^{j_{1,2} - i_{1,2}}.$$

Подстановка этих выражений в (10.15) дает формулу из п. 3.2 для блоков в фундаментальных R -матрицах:

$$\mathcal{R}_{1^m \otimes (1 \otimes 1) | Q} = \begin{pmatrix} -\frac{q - q^{-1}}{q^n(q^n - q^{-n})} & \frac{\sqrt{(q^{n+1} - q^{-n-1})(q^{n-1} - q^{1-n})}}{q^n - q^{-n}} \\ \frac{\sqrt{(q^{n+1} - q^{-n-1})(q^{n-1} - q^{1-n})}}{q^n - q^{-n}} & \frac{q^n(q - q^{-1})}{q^n - q^{-n}} \end{pmatrix},$$

где $Q = w_1 \cup (i_1, j_1) = w_2 \cup (i_2, j_2)$ и $n = j_2 - i_2 + j_1 - i_1$.

Теперь рассмотрим представления типа крюка. Если $x = [r_1, 1^{s_1}]$ и $u = [r_2, 1^{s_2}]$ – представления типа крюка, то представление Q может быть одним из трех представлений типа крюка, так как

$$\begin{aligned} [r_2, 1^{s_2}] \times [r_1, 1^{s_1}] &= \\ &= ([r_2 + r_1, 1^{s_2+s_1}] + [r_2 + r_1 - 1, 1^{s_2+s_1+1}] + \dots) \times [r_1, 1^{s_1}] = \\ &= [2r_1 + r_2, 1^{2s_1+s_2}] + 2[r_1 + r_2 - 1, 1^{2s_1+s_2+1}] + [2r_1 + r_2 - 2, 1^{2s_1+s_2+2}] + \dots, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены представления, не имеющие вид крюка. Три возможных представления типа крюка таковы:

$$Q = [2r_1 + r_2, 1^{2s_1+s_2}], \quad Q' = [2r_1 + r_2 - 1, 1^{2s_1+s_2+1}], \quad Q'' = [2r_1 + r_2 - 2, 1^{2s_1+s_2+2}],$$

где первое и последнее представления – синглеты, а второе – дублет, причем промежуточные представления суть

$$w_1 = [r_1 + r_2, 1^{s_1+s_2}], \quad w_2 = [r_1 + r_2 - 1, 1^{s_1+s_2+1}].$$

Так как всякий путь, который заканчивается представлением Q типа крюка, проходит только через представления типа крюка, соответствующий блок матрицы $\mathcal{R}_{x^m \otimes x \otimes x}$ относится к одному из двух представлений y , которые возникают в разложении $x \otimes x$:

$$y_1 = [2r_1, 1^{2s_1}], \quad y_2 = [2r_1 - 1, 1^{2s_1+1}].$$

Для этих представлений собственные значения (10.15) задаются формулой (3.1):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= q^{\varkappa_{y_1} - \varkappa_x} = q^{r_1(2r_1-1) - s_1(2s_1+1)} \equiv q^{r_1+s_1} \mu, & \mu_2 &= -q^{\varkappa_{y_2} - \varkappa_x} = -q^{-r_1-s_1} \mu, \\ \lambda_1 &= q^{\varkappa_{w_1} - \varkappa_u} \equiv q^{r_2+s_2} \lambda, & \lambda_2 &= q^{\varkappa_{w_2} - \varkappa_u} = q^{-r_2-s_2} \lambda. \end{aligned}$$

Подставляя эти собственные значения в (10.15), находим явный вид блоков:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x) | Q} &= q^{2r_1(r_1-1) - 2s_1(s_1+1)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -\frac{q^r - q^{-r}}{q^{rn}(q^{rn} - q^{-rn})} & \frac{\sqrt{(q^{rn+r} - q^{-rn-r})(q^{rn-r} - q^{-r-rn})}}{q^{rn} - q^{-rn}} \\ \frac{\sqrt{(q^{rn+r} - q^{-rn-r})(q^{rn-r} - q^{-r-rn})}}{q^{rn} - q^{-rn}} & \frac{q^{rn}(q^r - q^{-r})}{q^{rn} - q^{-rn}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.16)$$

где $n = s_2 - r_2 + 1$, $r = r_1 + s_1$ и $x = [r_1, 1^{s_1}]$ и $Q = [2r_1 + r_2 - 1, 1^{2s_1+s_2+1}]$.

11. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Рассмотрим специальные полиномы, которые описывают двойной скейлинговый предел полиномов ХОМФЛИ при больших N и малых $\hbar$ (т.е. при $q \equiv q^{\hbar} \rightarrow 1$ и $A = q^N = \text{const}$). Ряд, в который полином ХОМФЛИ разлагается в этом пределе, называется разложением по родам [95], [96]. Здесь мы, однако, интересуемся нулевым членом этого разложения, который и называется специальным полиномом [61]:

$$\sigma_Q^K(A) = H_Q^K(A, q) \Big|_{A=q^N=\text{const}, q=1}.$$

Поведение полинома ХОМФЛИ в этом пределе, полученное в работе [61] и изучавшееся в работах [95], [96], [102]–[108], связывает фундаментальные и раскрашенные полиномы:

$$\sigma_Q^K = \sigma_1^{K|Q|} = (\sigma_q^K)^{|Q|}. \quad (11.1)$$

Это соотношение называется свойством факторизации. Оно следует из основных свойств полиномов ХОМФЛИ: из скейн-соотношений, приведенных на рис. 7, из существования процедуры каблирования, из факторизации полинома ХОМФЛИ для несвязного объединения узлов или зацеплений и из теоремы о том, что неприведенный (не деленный на полином тривиального узла) ХОМФЛИ для n -компонентного

зацепления в фундаментальном представлении в пределе $q \rightarrow 1$ расходится как $(q - q^{-1})^{-n}$ [20].

Из процедуры каблирования вытекает, что раскрашенный полином ХОМФЛИ в представлении Q в пределе $q \rightarrow 1$ расходится как полином ХОМФЛИ $|Q|$ -компонентного зацепления, т. е. как $(q - q^{-1})^{-|Q|}$. Действительно, при процедуре каблирования не может получиться зацепления, которое содержит более чем $|Q|$ компонент, и всегда получится зацепление с $|Q|$ компонентами. Отсюда $\sigma_Q^K \sim (q - q^{-1})^{-|Q|}$. Далее, $|Q|$ -компонентное зацепление можно преобразовать в несвязное объединение его $|Q|$ компонент с помощью скейн-соотношений. При этом в пределе $q \rightarrow 1$ полином ХОМФЛИ не изменится. Действительно, если скейн-соотношения применяются к пересечению различных связных компонент, то член, соответствующий разрешению этого пересечения, содержит на одну компоненту связности меньше и, таким образом, расходится как $(q - q^{-1})^{-|Q|+1}$. С учетом коэффициента $(q - q^{-1})^{-1}$ перед этим членом соответствующее выражение расходится как $(q - q^{-1})^{-|Q|+2}$, т. е. менее сингулярно при $q \rightarrow 1$, чем два оставшихся, и его можно положить равным нулю. В результате получим тождество, означающее, что полиномы ХОМФЛИ двух зацеплений с числом зацеплений, отличающимся на единицу, в пределе $q \rightarrow 1$ равны. Следовательно, $\sigma_1^{K|Q|} = (\sigma_q^K)^{|Q|}$. Заметим, что в вертикальном оснащении переменная A не входит в скейн-соотношения, поэтому она не входит явным образом в соотношение (11.1).

Наше рассуждение относится к полиному ХОМФЛИ, вычисленному в вертикальном оснащении (см. раздел 5). Однако легко показать, что тождество (11.1) также верно и в топологическом оснащении.

12. ПОЛИНОМЫ АЛЕКСАНДЕРА

Рассмотрим полиномы Александера, которые представляют собой предел полиномов ХОМФЛИ при $A \rightarrow 1$:

$$A_Q^K(q) = H_Q^K(A, q)|_{A=q^N=1, q=\text{const}}.$$

Для представлений Q , которым соответствуют диаграммы типа крюка, существует гипотеза, описывающая зависимость полинома Александера от представления [61], [87]. Эта гипотеза утверждает, что

$$A_Q^K(q) = A_1^K(q^{|Q|}). \quad (12.1)$$

Это утверждение можно доказать методом, аналогичным описанному в разделе 3. Приведенные в указанном разделе ответы для R -матриц обобщаются на диаграммы типа крюка.

В пределе $A \rightarrow 1$ в полиномах Шура только множитель $A - A^{-1}$ является существенным. Степень этого члена в S_Q^* равна числу крюков в диаграмме Q . Это означает, что если вычислять полином в представлении с диаграммой $[r, 1^s]$ типа крюка, то в пределе $A \rightarrow 1$ все диаграммы, не имеющие вид крюка, в разложении полинома ХОМФЛИ по характерам не дадут вклада в ответ для приведенного полинома ХОМФЛИ. Для всех вошедших в ответ диаграмм R -матрицы состоят из блоков размера не более чем 2×2 (см. п. 10.4) подобно тому, что имело место в случае фундаментальных представлений. Эти блоки имеют вид (10.16), и можно

непосредственно проверить, что они удовлетворяют следующему соотношению по отношению к подстановке $q \rightarrow q^{r+s}$:

$$\mathcal{R}_{\square}^i \xrightarrow{q \rightarrow q^{r+s}} \mathcal{R}_{[r,1^s]}^i.$$

Это означает, что свойство (12.1) выполняется для отдельных коэффициентов перед полиномами Шура в разложении (1.2) по характерам. Кроме того, можно проверить, что в пределе $A \rightarrow 1$ характеры (полиномы Шура) сами по себе удовлетворяют необходимому соотношению. Следовательно, полиномы Александера также должны удовлетворять формуле (12.1).

13. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели метод вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ с помощью полиномов ХОМФЛИ в фундаментальном представлении. Этот метод называется процедурой каблирования и состоит из трех шагов. На первом шаге по исходному узлу строится каблированный узел. Этот шаг можно пояснить с помощью простого рисунка (см. раздел 2). Второй шаг состоит в построении проекторов, которые описывают, в какую именно комбинацию полиномов ХОМФЛИ в фундаментальном представлении разлагается раскрашенный полином ХОМФЛИ. Третий шаг состоит в вычислении раскрашенных полиномов ХОМФЛИ.

Чтобы вычислить полином ХОМФЛИ в фундаментальном представлении в рамках подхода Решетихина–Тураева (именно этот подход мы использовали), необходимо вычислить $\mathcal{R}$ -матрицы в фундаментальном представлении. Соответствующие выражения описываются весьма простой формулой путей (см. раздел 3). Полученные результаты позволяют построить полином ХОМФЛИ произвольного узла. Основная проблема состоит в сложности вычисления полинома узла, которая быстро растет с ростом минимального числа нитей в представлении узла в виде косы.

В терминах путей также можно построить матрицу проектора на произвольное представление (см. раздел 4). Несмотря на то что полученный ответ описывает только проектор, помещенный в первый кабель, этого, вообще говоря, достаточно, чтобы вычислить раскрашенный полином ХОМФЛИ для произвольного узла в произвольном представлении. Основная проблема опять же состоит в сложности вычислений. Поскольку при процедуре каблирования раскрашенный полином ХОМФЛИ в представлении Q выражается через полиномы ХОМФЛИ узлов, содержащих в представлении в виде косы в $|Q|$ раз больше нитей, чем в представлении исходного узла в виде косы, в случае раскрашенных полиномов вычисления становятся намного более громоздкими. На данный момент явное вычисление проведено вплоть до 12 нитей в косе. Это позволило найти раскрашенные полиномы ХОМФЛИ в различных представлениях для ряда узлов и зацеплений. Ответы приведены в приложениях C, D и E к работе [98].

Мы обсудили описание процедуры каблирования на языке теории представлений. Это описание позволяет получить вид $\mathcal{R}$ -матриц в фундаментальном представлении из раздела 3. Другими приложениями процедуры каблирования являются объяснения двух предположений, сформулированных в предыдущих работах: гипотезы собственных значений [89] и зависимости специального полинома и полинома Александера от представления [61].

Несмотря на то что существует метод, в принципе позволяющий вычислить произвольный раскрашенный полином ХОМФЛИ, многое еще предстоит изучить. Внутренняя структура полиномов ХОМФЛИ все еще не выяснена. Имеется несколько примеров, в которых общая (или, по крайней мере, более общая, чем один конкретный полином ХОМФЛИ) формула уже известна: это торические узлы [58]–[61], твистованные узлы [88], [49], узлы с двойной косой [93]. Однако большинство примеров представляются полностью загадочными. Получение общих формул для серий узлов и представлений было бы крайне полезно не только с точки зрения изучения самих полиномов ХОМФЛИ, но и для исследования некоторых связанных с ними сюжетов таких, как разностные уравнения и τ -функции [71]–[77], [85], [95], [96], суперполиномы [54]–[57], [61]–[70] и гомологии Хованова [109]–[115].

С точки зрения получения общих формул для полиномов ХОМФЛИ весьма плодотворной может оказаться гипотеза собственных значений [89]. Эта гипотеза фактически утверждает, что полином ХОМФЛИ полностью описывается собственными значениями $\mathcal{R}$ -матрицы, несмотря на то что при прямолинейном вычислении используется несколько $\mathcal{R}$ -матриц, которые друг с другом не коммутируют. Описание гипотезы собственных значений на языке процедуры каблирования (см. раздел 10) является одним из возможных средств для дальнейшего изучения этого вопроса.

Другое возможное направление исследований состоит в усложнении топологии пространства (см., например, книгу [100] и приведенные в ней ссылки). Едва ли не все известные ответы относятся к теории на многообразии S^3 , и практически ничего неизвестно уже в следующем по сложности случае $S^1 \times S^2$.

Благодарности. Авторы хотели бы поблагодарить Г. Аминова, И. Даниленко, П. Дунина-Барковского, Д. Дьяконова, Д. Васильева, Е. Зенкевича, Х. Итояму, А. Миронова, А. Морозова, А. Пополитова, А. Слепцова и всех участников еженедельного семинара ИТЭФ за крайне полезные обсуждения и критику. Авторы также благодарны А. Артамонову за помощь в вычислениях. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства Науки и Образования РФ, Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3349.2012.2), а также РФФИ (гранты № 12-01-00482 и 12-02-31078-мол_а, совместные гранты № 12-02-92108-Яф_а (А. Морозов) и 13-02-91371-СТ_а) и Фонда “Династия” (А. Морозов).

Список литературы

- [1] W. Ehrenberg, R. E. Siday, *Proc. Phys. Soc. B*, **62**:1 (1949), 8–21.
- [2] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115**:3 (1959), 485–491.
- [3] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [4] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2002.
- [5] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, **120**:3 (1977), 429–458.
- [6] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv: hep-th/9407087.
- [7] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **431**:3 (1994), 484–550, arXiv: hep-th/9408099.
- [8] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [9] M. F. Atiyah, “New invariants of 3- and 4-dimensional manifolds”, *The Mathematical Heritage of Herman Weyl* (Duke University, Durham, North Carolina, May 12–16, 1987), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **48**, ed. R. O. Wells, Jr., AMS, Providence, RI, 1988, 285–299.

- [10] М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **37** (1973), 53–65; *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:3 (1976), 562–592.
- [11] J. J. Duistermaat, G. J. Heckman, *Inv. Math.*, **69**:2 (1982), 259–268; **72**:1 (1983), 153–158.
- [12] A. Hietamhki, A. Yu. Morozov, A. J. Niemi, K. Palo, *Phys. Lett. B*, **263**:3–4 (1991), 417–424.
- [13] М. Е. Пескин, Д. В. Шрёдер, *Введение в квантовую теорию поля*, РХД, М., Ижевск, 2001.
- [14] S.-S. Chern, J. Simons, *Ann. Math.* (2), **99** (1974), 48–69.
- [15] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399.
- [16] L. H. Kauffman, *The Interface of Knots and Physics*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **51**, AMS, Providence, RI, 1996.
- [17] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12**:2 (1985), 239–246.
- [18] J. H. Przytycki, K. P. Traczyk, *Kobe J. Math.*, **4**:2 (1987), 115–139.
- [19] A. Mironov, A. Morozov, *AIP Conf. Proc.*, **1483** (2012), 189–211, arXiv: 1208.2282.
- [20] W. B. R. Lickorish, K. C. Millett, *Topology*, **26**:1 (1987), 107–141.
- [21] “The Knot Atlas”, http://katlas.org/wiki/Main_Page.
- [22] А. Ю. Морозов, А. А. Рослый, частное сообщение, 1991.
- [23] A. Morozov, A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **835**:3 (2010), 284–313, arXiv: 1001.2003.
- [24] A. Smirnov, “Notes on Chern–Simons theory in the temporal gauge”, *The Most Unexpected at LHC and the Status of High Energy Frontier*, Proceedings of the International School of Subnuclear Physics (Erice, Sicily, Italy, 29 August–7 September, 2009), The Subnuclear Series, **47**, ed. A. Zichichi, World Sci., Singapore, 489–498, arXiv: 0910.5011.
- [25] Д. В. Галахов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Смирнов, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 73–99, arXiv: 1104.2589.
- [26] R. Kirby, P. Melvin, *Invent. Math.*, **105**:3 (1991), 473–545.
- [27] M. Alvarez, J. M. F. Labastida, E. Perez, *Nucl. Phys. B*, **488**:3 (1997), 677–718, arXiv: hep-th/9607030.
- [28] J. M. F. Labastida, E. Perez, *J. Math. Phys.*, **39**:10 (1998), 5183–5198, arXiv: hep-th/9710176.
- [29] R. Gopakumar, C. Vafa, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **3**:5 (1999), 1415–1443, arXiv: hep-th/9811131.
- [30] H. Ooguri, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **577**:3 (2000), 419–438, arXiv: hep-th/9912123.
- [31] J. Labastida, M. Mariño, *Commun. Math. Phys.*, **217**:2 (2001), 423–449, arXiv: hep-th/0004196; *A new point of view in the theory of knot and link invariants*, arXiv: math/0104180.
- [32] M. Marino, C. Vafa, “Framed knots at large N ”, *Orbifolds in Mathematics and Physics* (Madison, WI, 2001), Contemporary Mathematics, **310**, AMS, Providence, RI, 2002, 185–204, arXiv: hep-th/0108064.
- [33] M. Mariño, “Chern–Simons theory, the $1/N$ expansion, and string theory”, *Chern–Simons gauge theory: 20 years after*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **50**, AMS, Providence, RI, 2011, 243–260, arXiv: 1001.2542.
- [34] M. Mariño, *Lectures on non-perturbative effects in large N gauge theories, matrix models and strings*, arXiv: 1206.6272.
- [35] R. K. Kaul, *Commun. Math. Phys.*, **162**:2 (1994), 289–319, arXiv: hep-th/9305032.
- [36] R. K. Kaul, T. R. Govindarajan, *Nucl. Phys. B*, **380**:1–2 (1992), 293–333, arXiv: hep-th/9111063.
- [37] P. Ramadevi, T. R. Govindarajan, R. K. Kaul, *Nucl. Phys. B*, **402**:1–2 (1993), 548–566, arXiv: hep-th/9212110.

- [38] P. Ramadevi, T. R. Govindarajan, R. K. Kaul, *Nucl. Phys. B*, **422**:1–2 (1994), 291–306, arXiv: hep-th/9312215.
- [39] P. Ramadevi, T. Sarkar, *Nucl. Phys. B*, **600**:3 (2001), 487–511, arXiv: hep-th/0009188.
- [40] G. Moore, N. Seiberg, *Phys. Lett. B*, **220**:3 (1989), 422–430.
- [41] V. V. Fock, Ya. I. Kogan, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:17 (1990), 1365–1372.
- [42] J. M. F. Labastida, A. V. Ramallo, *Phys. Lett. B*, **227**:1 (1989), 92–102; *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **16** (1990), 594–596.
- [43] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, G. Sierra, *Phys. Lett. B*, **220**:1–2 (1989), 142–152.
- [44] A. S. Schwarz, *Commun. Math. Phys.*, **67**:1 (1979), 1–16.
- [45] V. F. R. Jones, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12**:1 (1985), 103–111.
- [46] V. F. R. Jones, *Ann. Math. (2)*, **126**:2 (1987), 335–388.
- [47] L. Kauffman, *Topology*, **26** (1987), 395–407.
- [48] P. Borhade, P. Ramadevi, T. Sarkar, *Nucl. Phys. B*, **678**:3 (2004), 656–681, arXiv: hep-th/0306283.
- [49] Zodinmawia, P. Ramadevi, *Nucl. Phys. B*, **870**:1 (2013), 205–242, arXiv: 1107.3918.
- [50] Zodinmawia, P. Ramadevi, *Reformulated invariants for non-torus knots and links*, arXiv: 1209.1346.
- [51] S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, X. Sun, *JHEP*, **11** (2012), 157, 39 pp., arXiv: 1209.1409.
- [52] S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, *Multiplicity-free quantum 6j-symbols for $U_q(sl_N)$* , arXiv: 1302.5143.
- [53] S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, *Colored HOMFLY polynomials from Chern–Simons theory*, arXiv: 1302.5144.
- [54] S. Gukov, A. Schwarz, C. Vafa, *Lett. Math. Phys.*, **74**:1 (2005), 53–74, arXiv: hep-th/0412243.
- [55] N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen, *Experiment. Math.*, **15**:2 (2006), 129–159, arXiv: math/0505662.
- [56] E. Gorsky, S. Gukov, M. Stosic, *Quadruply-graded colored homology of knots*, arXiv: 1304.3481.
- [57] S. Arthamonov, A. Mironov, A. Morozov, *Differential hierarchy and additional grading of knot polynomials*, arXiv: 1306.5682.
- [58] M. Rosso, V. F. R. Jones, *J. Knot Theory Ramifications*, **2**:1 (1993), 97–112.
- [59] X.-S. Lin, H. Zheng, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:1 (2010), 1–18, arXiv: math/0601267.
- [60] S. Stevan, *Ann. Henri Poincaré*, **11**:7 (2010), 1201–1224, arXiv: 1003.2861.
- [61] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, A. Smirnov, *JHEP*, **03** (2013), 021, 85 pp., arXiv: 1106.4305.
- [62] M. Aganagic, Sh. Shakirov, *Knot homology from refined Chern–Simons theory*, arXiv: 1105.5117.
- [63] M. Aganagic, Sh. Shakirov, *Refined Chern–Simons theory and topological string*, arXiv: 1210.2733.
- [64] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, A. Sleptsov, *JHEP*, **20** (2012), 70, 12 pp., arXiv: 1201.3339.
- [65] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *J. Phys. A*, **45**:35 (2012), 355202, 11 pp., arXiv: 1203.0667.
- [66] E. Gorsky, “ q, t -Catalan numbers and knot homology”, *Zeta functions in algebra and geometry* (Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca, Spain, May 3–7, 2010), Contemporary Mathematics, **566**, eds. A. Campillo, G. Cardona, A. Melle-Hernandez, W. Veys, W. A. Zuniga-Galindo, AMS, Providence, RI, 2012, 213–232, arXiv: 1003.0916.
- [67] I. Cherednik, *Jones polynomials of torus knots via DAHA*, arXiv: 1111.6195.

- [68] A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende, *The Hilbert scheme of a plane curve singularity and the HOMFLY homology of its link*, [arXiv:1201.2115](#).
- [69] E. Gorsky, A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende, *Torus knots and the rational DAHA*, [arXiv:1207.4523](#).
- [70] E. Gorsky, A. Negut, *Refined knot invariants and Hilbert schemes*, [arXiv:1304.3328](#).
- [71] S. Garoufalidis, “On the characteristic and deformation varieties of a knot”, *Proceedings of the Casson Fest*, Geometry & Topology Monographs, **7**, eds. C. Gordon, Y. Rieck, Geom. Topol. Publ., Coventry, UK, 2004, 291–309, [arXiv:math/0306230](#).
- [72] A. Brini, B. Eynard, M. Mariño, *Ann. Henri Poincaré*, **13**:8 (2012), 1873–1910, [arXiv:1105.2012](#).
- [73] R. Gelca, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **133**:2 (2002), 311–323, [arXiv:math/0004158](#).
- [74] R. Gelca, J. Sain, *J. Knot Theory Ramifications*, **12**:2 (2003), 187–201, [arXiv:math/0201100](#).
- [75] S. Gukov, *Commun. Math. Phys.*, **255**:3 (2005), 577–627, [arXiv:hep-th/0306165](#).
- [76] H. Fujii, S. Gukov, P. Sulkowski, *Volume conjecture: refined and categorified*, [arXiv:1203.2182](#).
- [77] H. Fujii, S. Gukov, M. Stosic, P. Sulkowski, *3d analogs of Argyres–Douglas theories and knot homologies*, [arXiv:1209.1416](#).
- [78] H. R. Morton, H. J. Ryder, “Mutants and $SU(3, q)$ invariants”, *The Epstein Birthday Schrift*, Geometry & Topology Monographs, **1**, eds. I. Rivin, C. Rourke, C. Series, Geom. Topol. Publ., Coventry, UK, 1998, 365–381, [arXiv:math/9810197](#).
- [79] H. R. Morton, M. Rampichini, “Mutual braiding and the band presentation of braid groups”, *Knots in Hellas’98*, Proceedings of the international conference on knot theory and its ramifications (European Cultural Centre of Delphi, Greece, August 7–15, 1998), Series in Knots and Everything, **24**, eds. C. Gordon, V. F. R. Jones, L. H. Kauffman, S. Lambropoulou, J. H. Przytycki, World Sci., Singapore, 2000, 335–346, [arXiv:math/9907017](#).
- [80] H. R. Morton, R. J. Hadji, *Algebr. Geom. Topol.*, **2** (2002), 11–32, [arXiv:math/0106207](#).
- [81] H. Morton, S. Lukac, *J. Knot Theory Ramifications*, **12**:3 (2003), 395–416, [arXiv:math/0108011](#).
- [82] V. G. Turaev, *Invent. Math.*, **92**:3 (1988), 527–553.
- [83] N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Commun. Math. Phys.*, **127**:1 (1990), 1–26.
- [84] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, “Chern–Simons field theory and quantum groups”, *Quantum Groups*, Proceedings of the 8th international workshop on mathematical physics (Clausthal, Germany, 19–26 July, 1989), Lecture Notes in Physics, **370**, eds. H.-D. Doebner, J.-D. Hennig, Springer, Berlin, 1990, 307–317; *Phys. Lett. B*, **235**:3–4 (1990), 275–281.
- [85] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, “Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations”, *Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer*, eds. A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, E. Scheidegger, World Sci., Singapore, 2013, 101–118, [arXiv:1112.5754](#).
- [86] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *JHEP*, **03** (2012), 034, 34 pp., [arXiv:1112.2654](#).
- [87] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27**:19 (2012), 1250099, 85 pp., [arXiv:1204.4785](#).
- [88] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *JHEP*, **07** (2012), 131, 21 pp., [arXiv:1203.5978](#).
- [89] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **28**:3–4 (2013), 1340009, 81 pp., [arXiv:1209.6304](#).
- [90] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **868**:1 (2013), 271–313, [arXiv:1207.0279](#).

- [91] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Knot polynomials in the first non-symmetric representation*, [arXiv: 1211.6375](#).
- [92] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Adv. High Energy Phys.*, **2013** (2013), 931830, 12 pp., [arXiv: 1304.1486](#).
- [93] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials*, [arXiv: 1306.3197](#).
- [94] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, М., 2006.
- [95] А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Слепцов, *ТМФ*, **177**:2 (2013), 179–221, [arXiv: 1303.1015](#).
- [96] A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *Eur. Phys. J. C*, **73** (2013), 2492, 7 pp., [arXiv: 1304.7499](#).
- [97] C. C. Adams, *The Knot Book. An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W. H. Freeman, New York, 1994.
- [98] A. Anokhina, And. Morozov, *Cabling procedure for the colored HOMFLY polynomials*, [arXiv: 1307.2216](#).
- [99] Н. Я. Виленкин, А. У. Климык, “Представления групп Ли и специальные функции”, *Некоммутативный гармонический анализ* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **59**, ВИНИТИ, М., 1990, 145–264.
- [100] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, МЦНМО, 1997.
- [101] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, М., Мир, 1985.
- [102] X.-S. Lin, H. Zheng, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:1 (2010), 1–18, [arXiv: math.QA/0601267](#).
- [103] S. Zhu, *Colored HOMFLY polynomial via skein theory*, [arXiv: 1206.5886](#).
- [104] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **120** (1982), 92–121.
- [105] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories* (Tvärminne, Finland, 23–27 March, 1981), Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, 1982, 61–119.
- [106] M. Jimbo, T. Miwa, M. Okado, *Modern Phys. Lett. B*, **1** (1987), 73–79.
- [107] A. Morozov, *JHEP*, **12** (2012), 116, 7 pp., [arXiv: 1208.3544](#).
- [108] A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **97**:4 (2013), 195–196, [arXiv: 1211.4596](#).
- [109] M. Khovanov, *Duke Math. J.*, **101**:3 (2000), 359–426.
- [110] D. Bar-Natan, *Algebr. Geom. Topol.*, **2** (2002), 337–370, [arXiv: math/0201043](#).
- [111] M. Khovanov, L. Rozhansky, *Fund. Math.*, **199**:1 (2008), 1–91, [arXiv: math.QA/0401268](#).
- [112] M. Khovanov, L. Rozhansky, *Geom. Topol.*, **12**:3 (2008), 1387–1425, [arXiv: math.QA/0505056](#).
- [113] N. Carqueville, D. Murfet, *Computing Khovanov–Rozansky homology and defect fusion*, [arXiv: 1108.1081](#).
- [114] V. Dolotin, A. Morozov, *JHEP*, **01** (2013), 065, 46 pp., [arXiv: 1208.4994](#).
- [115] V. Dolotin, A. Morozov, *J. Phys. Conf. Ser.*, **411**:1 (2013), 012013, 46 pp., [arXiv: 1209.5109](#).