Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Борк, С. Л. Огарков, Об уравнении Кардара-Паризи-Чжана и его матричном обобщении, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 3, 416–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:21:25

© 2014 г.

Л. В. Борк^{*†}, С. Л. Огарков[†]

ОБ УРАВНЕНИИ КАРДАРА–ПАРИЗИ–ЧЖАНА И ЕГО МАТРИЧНОМ ОБОБЩЕНИИ

Исследуется вопрос о появлении конденсата (стохастического среднего) вспомогательного поля уравнения Кардара–Паризи–Чжана и его матричного обобщения. Для уравнения Кардара–Паризи–Чжана в рамках улучшенного с помощью метода ренормализационной группы однопетлевого приближения мы не можем сделать достоверных выводов о существовании конденсата. Для матричного обобщения уравнения Кардара–Паризи–Чжана ответ на вопрос о существовании ненулевого конденсата положительный, и задача решается точно в пределе больших N .

Ключевые слова: уравнение Кардара–Паризи–Чжана, ренормализационная группа, эффективный потенциал, $1/N$ -разложение.

DOI: 10.4213/tmf8594

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнению Кардара–Паризи–Чжана (КПЧ) посвящена обширная литература. Впервые это уравнение было получено в работе [1] как уравнение, описывающее процесс роста поверхности. Будучи достаточно общим, оно встречается во многих разделах физики, например при описании процесса распространения фронта пламени, высокотемпературной сверхпроводимости и других явлений. С теоретической точки зрения это уравнение также представляет значительный интерес, так как является одним из простейших примеров стохастического уравнения, описывающего систему, далекую от равновесия. Типичным примером уравнения, описывающего неравновесную систему, является уравнение Навье–Стокса (НС) со случайной силой. Исследование последнего основано на методах критической динамики [2] и было развито в работах [3], [4]. Для подробного введения в тему можно использовать, например, монографию [5]. Наряду со стохастическим уравнением НС в литературе

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: bork@itep.ru

[†]ФГУП Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова, Москва, Россия. E-mail: ogarkovstas@mail.ru

рассматриваются задачи о пассивном скаляре и пассивном векторе [6]–[8]. Физической реализацией первой задачи является, например, примесь во внешнем стохастическом поле скорости (корреляционная функция последнего обычно задается явно или вычисляется из уравнения НС со случайной силой). Также в литературе рассматриваются стохастические уравнения, описывающие реакции аннигиляции (парная аннигиляция рассмотрена, например, в работе [9]), мультипликации и другие.

Уравнение КПЧ в некотором смысле представляет собой скалярный аналог стохастического уравнения НС. К настоящему моменту для уравнения КПЧ в критической размерности $D = 2$ известны критические экспоненты с двухпетлевой точностью [10]–[12], а также высказана гипотеза о виде бета-функции во всех порядках теории возмущений (ТВ) [13]. Помимо этого, в литературе рассматривалось применение формализма эффективного действия к стохастическим дифференциальным уравнениям в частных производных [14], в частности к уравнению КПЧ. Явное выражение для однопетлевого эффективного потенциала получено в работах [15], [16]. Наконец, в работе [17] было предложено матричное обобщение уравнения КПЧ, которое исследовалось в рамках $1/N$ -разложения с однопетлевой точностью.

Целями настоящей работы являются критический пересмотр вывода однопетлевого эффективного потенциала, улучшенного методом ренормализационной группы (РГ), и исследование матричного обобщения уравнения КПЧ. Работа организована следующим образом. В разделе 2 для самодостаточности рассмотрения мы приводим однопетлевые результаты диаграммных вычислений в критической размерности для соответствующих констант ренормировки и вытекающие из них формулы для бета-функции, аномальных размерностей и критических экспонент. В разделе 3 мы даем подробный вывод выражения для однопетлевого эффективного действия и, как следствие, выражения для эффективного потенциала. Затем это выражение улучшается методом РГ. Исследуется вопрос о наличии в системе ненулевого конденсата (стохастического среднего вспомогательного поля уравнения КПЧ). В разделе 4 рассматривается матричное обобщение уравнения КПЧ в пределе больших N . По аналогии с решением Полякова для $O(N)$ -симметричной сигма-модели (хорошим обзором по сигма-моделям является работа [18]) мы получаем точные в пределе больших N выражения для бета-функции и стохастического среднего матричного вспомогательного поля задачи КПЧ. Обсуждение всех полученных результатов проводится в разделе 5. В качестве справочного материала в приложении А приводятся правила диаграммной техники для задачи КПЧ. Наконец, в приложении Б рассматривается вывод выражения для однопетлевого эффективного потенциала в случае, когда корреляционная функция шума имеет более сложный вид, чем в основном тексте статьи.

2. УРАВНЕНИЕ КПЧ

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных

$$\partial_t \varphi(t, x) = c_B \partial^2 \varphi(t, x) + \frac{\lambda}{2} (\partial \varphi(t, x))^2 + \eta(t, x) \quad (1)$$

с коррелятором шума, выбранным в виде

$$\langle \eta(t, x) \eta(t', x') \rangle_\eta = a_B \delta(t - t') \delta^D(x - x').$$

Эта система носит в литературе название уравнения КПЧ.

Для вывода лагранжиана соответствующей полевой теории рассмотрим произведение решений уравнения (1) в различных точках:

$$\varphi(t_1, x_1)[\eta] \dots \varphi(t_n, x_n)[\eta] \equiv \varphi_1[\eta] \dots \varphi_n[\eta].$$

Перепишем это произведение следующим эквивалентным образом:

$$\varphi_1[\eta] \dots \varphi_n[\eta] \equiv \int \mathcal{D}(\varphi) \delta^{(\infty)} \left[\partial_t \varphi - c_B \partial^2 \varphi - \frac{\lambda}{2} (\partial \varphi)^2 - \eta \right] \varphi_1 \dots \varphi_n.$$

Отметим, что произведение $\varphi_1 \dots \varphi_n$ в правой части равенства не зависит от η . Также отметим, что мы опускаем явное выражение для функционального детерминанта, возникающего вместе с функциональной дельта-функцией. В рамках построения ТВ вклад от этого детерминанта может быть включен в меру функционального интегрирования [5].

Далее, записав в виде экспоненты функциональную дельта-функцию посредством введения вспомогательного поля p и усреднив обе части равенства по η , мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1[\eta] \dots \varphi_n[\eta] \rangle_\eta &= \int \mathcal{D}(\varphi, p) \left\langle \exp \left[-i \int dt \int d^D x p \eta \right] \right\rangle_\eta \times \\ &\times \exp \left[i \int dt \int d^D x p \left(\partial_t \varphi - c_B \partial^2 \varphi - \frac{\lambda}{2} (\partial \varphi)^2 \right) \right] \varphi_1 \dots \varphi_n. \end{aligned}$$

Усреднение по η представляет собой гауссов функциональный интеграл, который может быть вычислен в явном виде. Это приводит нас к следующему выражению:

$$\langle \varphi_1[\eta] \dots \varphi_n[\eta] \rangle_\eta = \int \mathcal{D}(\varphi, p) e^{iS[\varphi, p]} \varphi_1 \dots \varphi_n,$$

где

$$S[\varphi, p] = \int dt \int d^D x p \left(\frac{ia_B}{2} p + (\partial_t - c_B \partial^2) \varphi - \frac{\lambda}{2} (\partial \varphi)^2 \right).$$

Лагранжиан соответствующей полевой теории имеет вид

$$L = p \left(\frac{ia_B}{2} p + (\partial_t - c_B \partial^2) \varphi - \frac{\lambda}{2} (\partial \varphi)^2 \right).$$

Кратко остановимся на канонических размерностях полей и параметров лагранжиана. Простой анализ приводит нас к следующим результатам:

$$[a] = [c] = 1, \quad [\lambda] = [E]^{1-D/2}, \quad [\varphi] = [E]^{D/2-1}, \quad [p] = [E]^{D/2+1}. \quad (2)$$

Отсюда мы заключаем, что критической размерностью является $D = 2$.

Исследуем свойства теории в критической размерности: вычислим соответствующие контрчлены, бета-функцию и критические индексы в однопетлевом приближении. Голый лагранжиан модели имеет вид

$$L_B = p_R \left(Z_1 \frac{ia_R}{2} p_R + (Z_2 \partial_t - Z_3 c_R \partial^2) \varphi_R - Z_4 \frac{\lambda_R}{2} (\partial \varphi_R)^2 \right),$$

где

$$Z_1 = Z_a Z_p^2, \quad Z_2 = Z_p Z_\varphi, \quad Z_3 = Z_c Z_p Z_\varphi, \quad Z_4 = Z_\lambda Z_p Z_\varphi^2.$$

Рис. 1. Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в $\langle \varphi \varphi \rangle_\eta$. Рис. 2. Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в $\langle p \varphi \rangle_\eta$.

Отметим, что для устранения расхождений нет необходимости вводить билинейные по p контрчлены, содержащие производные. Коэффициенты перед соответствующими операторами согласно формулам (2) имеют отрицательную массовую размерность.

Из-за наличия глобальной симметрии вида

$$t \rightarrow t, \quad x^i \rightarrow x^i - \lambda \epsilon^i t, \quad \varphi(t, x) \rightarrow \varphi(t, x) - \epsilon^i x_i$$

(здесь ϵ^i – параметр преобразования) выполняется следующее соотношение между константами ренормировки: $Z_\lambda = Z_\varphi = Z_p = 1$, отсюда мы заключаем, что единственными нетривиальными константами ренормировки являются Z_a и Z_c :

$$Z_a = 1 + \alpha(\mu) \frac{z_1}{\varepsilon} + \alpha^2(\mu) \left(\frac{z_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{z_{21}}{\varepsilon} \right) + O(\alpha^3),$$

$$Z_c = 1 + \alpha(\mu) \frac{d_1}{\varepsilon} + \alpha^2(\mu) \left(\frac{d_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{d_{21}}{\varepsilon} \right) + O(\alpha^3).$$

Здесь введено обозначение для параметра ТВ:

$$\alpha(\mu) = \mu^{2\varepsilon} \frac{\lambda^2 a_R}{c_R^3}.$$

Единственными расходящимися корреляционными функциями являются пропагаторы теории $\langle \varphi \varphi \rangle_\eta$ и $\langle p \varphi \rangle_\eta$. Выражения для их сингулярных частей имеют вид (см. рис. 1, 2)

$$\begin{aligned} \langle \varphi \varphi \rangle_\eta|_{\text{pole}} &= \frac{a_B}{\omega^2 + (c_B p^2)^2} \left(1 - \alpha(\mu) \frac{z_1}{\varepsilon} \right) + O(\alpha^2), \\ \langle p \varphi \rangle_\eta|_{\text{pole}} &= \frac{1}{\omega - i c_B p^2} + O(\alpha^2), \end{aligned} \quad (3)$$

где z_1 оказывается равной $1/32\pi$. В однопетлевом приближении константы ренормировки принимают значения

$$Z_a = 1 + \alpha(\mu) \frac{z_1}{\varepsilon} + O(\alpha^2), \quad Z_c = 1 + O(\alpha^2).$$

Соответствующие аномальные размерности для величин a и c тогда записываются как

$$\begin{aligned}\gamma_a(\alpha) &= -\frac{d \ln Z_a(\alpha(\mu))}{d \ln \mu^2} = -z_1 \alpha(\mu) + O(\alpha^2), \\ \gamma_c(\alpha) &= -\frac{d \ln Z_c(\alpha(\mu))}{d \ln \mu^2} = 0 + O(\alpha^2).\end{aligned}$$

В надкритической размерности $D = 2(1 + \varepsilon)$ [10], [11] бета-функция равна

$$\beta(\alpha) \equiv \frac{d\alpha(\mu)}{d \ln \mu^2} = \varepsilon \alpha(\mu) - z_1 \alpha^2(\mu),$$

и мы имеем дело с асимптотически свободной теорией в размерности $D = 2$. Наши пертурбативные разложения применимы только для больших значений частот и импульсов. В надкритической размерности $D = 2(1 + \varepsilon)$ в теории имеется ультрафиолетово-стабильная фиксированная точка α^* Вильсона–Фишера:

$$\alpha^* = \frac{\varepsilon}{z_1}, \quad \beta(\alpha^*) = 0, \quad \gamma_a(\alpha^*) \equiv \gamma_a^* = -\varepsilon.$$

Уравнение Овсянникова (в зарубежной литературе его называют уравнением Каллана–Симанчика) для функции Грина $G_R(\mu^2, \alpha, a_R)$ (для определенности будем говорить о функции $\langle \varphi_R \varphi_R \rangle_\eta$) записывается как

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma_a(\alpha) a_R \frac{\partial}{\partial a_R} \right) G_R = 0.$$

Его решение методом характеристик имеет вид

$$G_R(\mu^2, \alpha, a_R) = G_R(\bar{\mu}^2(\ell), \bar{\alpha}(\ell), \bar{a}_R(\ell)),$$

где

$$\ell = \frac{\bar{\mu}^2(\ell)}{\mu^2}, \quad \int_{\alpha}^{\bar{\alpha}(\ell)} \frac{d\alpha'}{\beta(\alpha')} = \ln \ell, \quad \int_{\alpha}^{\bar{\alpha}(\ell)} \frac{\gamma_a(\alpha') d\alpha'}{\beta(\alpha')} = \ln \frac{\bar{a}_R(\ell)}{a_R}.$$

Используя явный вид бета-функции и аномальных размерностей, получаем

$$\bar{\alpha}(\ell) = \frac{\alpha \ell^\varepsilon}{1 + (\alpha/\alpha^*)(\ell^\varepsilon - 1)}, \quad \bar{a}_R(\ell) = \frac{a_R}{1 + (\alpha/\alpha^*)(\ell^\varepsilon - 1)}.$$

Эти выражения воспроизводят известные для $D = 2$ логарифмы. Если же система изначально находилась в точке Вильсона–Фишера ($\alpha = \alpha^*$), то мы имеем

$$\bar{\alpha}(\ell) = \alpha^*, \quad \bar{a}_R(\ell) = a_R \ell^{-\varepsilon} = a_R \left(\frac{\bar{\mu}(\ell)}{\mu} \right)^{2\gamma_a^*}.$$

Решение уравнения Овсянникова содержит произвольную функцию. Размерный анализ дает (в произвольном порядке ТВ “бег” коэффициента c также необходимо учитывать)

$$G_R = \frac{\bar{a}_R(\ell)}{[\bar{c}_R(\ell) \bar{\mu}^2(\ell)]^2} \mathcal{G} \left(\frac{k}{\bar{\mu}(\ell)}, \frac{\omega}{\bar{c}_R(\ell) \bar{\mu}^2(\ell)}, \bar{\alpha}(\ell) \right).$$

В однопетлевом приближении в точке Вильсона–Фишера, полагая $\bar{\mu}(\ell) = k$, имеем

$$G_R^{1\text{-loop}} = \frac{\bar{a}_R(k^2/\mu^2)}{(c_R k^2)^2} \mathcal{G}^*\left(\frac{\omega}{c_R k^2}\right) = \frac{A}{k^{4-2\gamma_a^*}} \mathcal{G}^*\left(\frac{\omega}{c_R k^2}\right).$$

С другой стороны, по определению функцию G_R (в пространстве импульсов) можно записать как

$$G_R \equiv \frac{A}{k^{D+2\chi+z}} \mathcal{G}^*\left(\frac{\omega}{c_R k^z}\right).$$

Сравнивая два последних равенства, приходим к окончательным выражениям для критических индексов: $z = 2$, $\chi = 1 - D/2 - \gamma_a^* = 0$.

В завершение данного раздела отметим, что в работе [11] для критических индексов были получены следующие ответы с двухпетлевой точностью: $z = 2 + O(\varepsilon^3)$, $\chi = 0 + O(\varepsilon^3)$. Эти результаты подверглись критике авторами работы [10]. Однако в работе [12] эта критика была опровергнута. Таким образом, критические индексы не получают поправок не только в рамках однопетлевого приближения, но и в следующем (двухпетлевом) порядке ТВ.

3. ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ КПЧ

Отправной точкой вывода эффективного действия является выражение для производящего функционала уравнения КПЧ

$$Z[J_\varphi, J_p] \equiv e^{-iE[J_\varphi, J_p]} = \int \mathcal{D}(\varphi, p) e^{iS[\varphi, p] + iJ_\varphi * \varphi + iJ_p * p} \quad (4)$$

с действием (ниже оператор $\hat{G}$ обозначает корреляционную функцию шума, до некоторого момента мы не будем ее конкретизировать)

$$S[\varphi, p] = \int dt \int d^D x p \left((\partial_t - c_B \partial^2) \varphi - \frac{\lambda}{2} (\partial \varphi)^2 + \frac{i}{2} \hat{G} p \right).$$

Функциональные скалярные произведения в (4) определены следующим образом:

$$J_\varphi * \varphi = \int dt \int d^D x J_\varphi \varphi, \quad J_p * p = \int dt \int d^D x J_p p.$$

Рассмотрим функциональные производные $E[J_\varphi, J_p]$ по источникам:

$$\frac{\delta E[J_\varphi, J_p]}{\delta J_\varphi(t, x)} = -\varphi_0(t, x), \quad \frac{\delta E[J_\varphi, J_p]}{\delta J_p(t, x)} = -p_0(t, x). \quad (5)$$

Правые части этих равенств суть стохастические средние полей φ и p в присутствии ненулевых источников. Будем рассматривать эти средние значения как термодинамические переменные, сопряженные к J_φ и J_p . Таким образом мы определяем величины φ_0 и p_0 , называемые классическими (детерминированными) полями. Классическое поле представляет собой взвешенное среднее по всем возможным флуктуациям.

Теперь определим преобразование Лежандра для $E[J_\varphi, J_p]$:

$$\Gamma[\varphi_0, p_0] = -E[J_\varphi, J_p] - \int dt \int d^D x J_\varphi \varphi - \int dt \int d^D x J_p p.$$

Эта величина известна как *эффективное действие*. По аналогии с (5) можно теперь вычислить производные

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_0, p_0]}{\delta \varphi_0(t, x)} = -J_\varphi(t, x), \quad \frac{\delta \Gamma[\varphi_0, p_0]}{\delta p_0(t, x)} = -J_p(t, x).$$

Решения φ_0 и p_0 этих уравнений при нулевых источниках будут нашей конечной целью.

Приведем теперь общее выражение для эффективного действия в однопетлевом приближении. Введем для компактности следующие обозначения:

$$\Psi(t, x) = \{\varphi(t, x), p(t, x)\}, \quad J(t, x) = \{J_\varphi(t, x), J_p(t, x)\}.$$

Теперь представим поля в виде

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(t, x) + \varphi'(t, x), \quad p(t, x) = p_0(t, x) + p'(t, x).$$

Тогда общее выражение для эффективного действия в однопетлевом приближении записывается как

$$\Gamma[\Psi_0] = S[\Psi_0] + \frac{i}{2} \ln \det \left(-i \frac{\delta^2 S[\Psi_0]}{\delta \Psi_0(t, x) \delta \Psi_0(t', x')} \right). \quad (6)$$

Запишем матрицу вторых функциональных производных, фигурирующую в выражении (6), для задачи КПЧ в явном виде. Если представить лагранжиан как

$$S[\Psi] = S[\Psi_0] + \frac{1}{2} \int dt \int d^D x \int dt' \int d^D x' (\Psi')^T(t', x') \hat{R} \Psi'(t, x),$$

то выражение для матрицы $\hat{R}$ совпадет с матрицей производных:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \lambda \delta^{D+1} \partial(p_0 \partial) & \delta^{D+1} (\hat{l}^+ + \lambda [(\partial \varphi_0) \partial + \partial^2 \varphi_0 / 2]) \\ \delta^{D+1} (\hat{l} + \lambda [-(\partial \varphi_0) \partial + \partial^2 \varphi_0 / 2]) & i G(t, x, t', x') \end{pmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения для операторов диффузии и антидиффузии:

$$\hat{l} = \partial_t - c_B \partial^2, \quad \hat{l}^+ = -\partial_t - c_B \partial^2. \quad (7)$$

Функция $G(t, x, t', x')$ в этом разделе обозначает функцию накачки (корреляционную функцию шума) в координатном представлении. Нелокальный оператор $\hat{G}$, соответствующий этой функции, задается формулой

$$\hat{G} p(t, x) = \int dt' \int d^D x' G(t, x, t', x') p(t', x').$$

Наконец, символом δ^{D+1} обозначена дельта-функция в соответствующем числе измерений: $\delta^{D+1} \equiv \delta(t - t') \delta^D(x - x')$.

Общее выражение для эффективного действия в однопетлевом приближении можно переписать как

$$\Gamma[\Psi_0] = S[\Psi_0] + \frac{i}{2} \ln \det(-i \hat{R}). \quad (8)$$

Если известен детерминант матрицы $-i\hat{R}$, то задача о нахождении эффективно-го действия в однопетлевом приближении решена. Кажущаяся простота выражения (8) обманчива: на практике $\det(-i\hat{R})$ удастся найти только в простейших случаях.

В общем случае, чтобы найти $\det(-i\hat{R})$, нужно решить уравнение на собственные значения E_n и собственные функции u_n матрицы $\hat{R}$:

$$-i\hat{R} * u_n(t, x) = E_n u_n(t', x'). \quad (9)$$

Тогда

$$\ln \det(-i\hat{R}) = \sum_n \ln E_n.$$

Рассмотрим случай, когда поля φ_0 и p_0 имеют вид

$$\varphi_0(t, x) = \varphi_0(x) = \vec{v}\vec{x}, \quad p_0(t, x) = p_0. \quad (10)$$

Уравнение (9) в (ω, k) -представлении становится системой из двух алгебраических уравнений (функция $N(\omega, k)$ – образ Фурье функции G):

$$\begin{aligned} (\lambda p_0(-k^2) - iE_n) u_n^{(1)}(\omega, k) + (l^+(\omega, k) + i\lambda \vec{v}\vec{k}) u_n^{(2)}(\omega, k) &= 0, \\ (l(\omega, k) - i\lambda \vec{v}\vec{k}) u_n^{(1)}(\omega, k) + (iN(\omega, k) - iE_n) u_n^{(2)}(\omega, k) &= 0, \end{aligned}$$

где $E_n^{(1)}$ и $E_n^{(2)}$ – две ветви собственных значений. Из этой системы мы заключаем, что

$$E_n^{(1)} E_n^{(2)} = \det \begin{pmatrix} l^+(\omega, k) + i\lambda \vec{v}\vec{k} & \lambda p_0(-k^2) \\ iN(\omega, k) & l(\omega, k) - i\lambda \vec{v}\vec{k} \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем записать $\ln \det(-i\hat{R})$ в виде интеграла:

$$\ln \det(-i\hat{R}) = \sum_n \ln(E_n^{(1)} E_n^{(2)}) = VT I(p_0, \vec{v}),$$

где

$$I(p_0, \vec{v}) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d\omega}{2\pi} \ln \frac{(\omega + \lambda \vec{v}\vec{k})^2 + (c_B k^2)^2 + i\lambda p_0 k^2 N(\omega, k)}{\omega^2 + (c_B k^2)^2}$$

и V – интеграл по всему пространству $\mathbb{R}_D$, а T – интеграл по времени $(-\infty, \infty)$.

Если функция N не зависит от ω , то интеграл по ω вычисляется тривиально, и остается интеграл по D -мерному импульсу k . Последний (при условии, что N зависит только от модуля k) можно взять по угловой мере, после чего мы получим следующее выражение (здесь $\eta = c_B k^2$):

$$I(p_0, \vec{v}) = \frac{\pi^{D/2} c_B^{-D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(D/2)} \int_0^\infty d\eta \eta^{D/2-1} \left(\sqrt{\eta^2 + i \frac{\lambda a_B p_0}{c_B} \eta} - \sqrt{\eta^2} \right).$$

В данной формуле функция N выбрана равной константе a_B , но подобное выражение можно получить и при произвольной зависимости $N(k)$ (обсуждению этого вопроса посвящено приложение Б). Для $D = 2 + 2\varepsilon$ этот интеграл равен

$$I(p_0, \vec{v}) = -\frac{A^2}{32\pi c_B} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{A}{c_B \mu^2} - \kappa \right),$$

где введены следующие обозначения:

$$A = \frac{\lambda a_B p_0}{c_B}, \quad \kappa = -\frac{1}{2} + 2 \ln 2.$$

Теперь введем функцию V_{eff} равенством

$$\Gamma[\Psi_0] = VT V_{\text{eff}}(p_0, \vec{v}).$$

Функция V_{eff} называется *эффективным потенциалом*. Чтобы ее найти, вычислим действие $S[\Psi_0]$ на полях (10). Простое вычисление дает

$$S[\Psi_0] = VT \frac{p_0}{2} (i a_B p_0 - \lambda v^2).$$

Тогда для V_{eff} имеем

$$V_{\text{eff}}(p_0, \vec{v}) = \frac{p_0}{2} (i a_B p_0 - \lambda v^2) + \frac{i}{2} I(p_0, \vec{v})$$

или, в развернутом виде,

$$V_{\text{eff}}(p_0, \vec{v}) = \frac{p_0}{2} \left\{ -\lambda v^2 + i a_B p_0 \left[1 - \frac{\lambda^2 a_B}{32\pi c_B^3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\lambda a_B p_0}{c_B^2 \mu^2} - \kappa \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Ренормировка выражения (11) с помощью равенства

$$a_B = a_R \left(1 + \frac{\mu^{2\varepsilon}}{32\pi} \frac{\lambda^2 a_R}{c_R^3} \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

при учете того, что в данном порядке ТВ $c_B = c_R$, приводит к окончательному ответу для эффективного потенциала, а с ним и эффективного действия в одной петле:

$$V_{\text{eff}}^{\text{ren}}(p_0, \vec{v}) = \frac{p_0}{2} \left\{ -\lambda v^2 + i a_R p_0 \left[1 - \frac{\lambda^2 a_R}{32\pi c_R^3} \left(\ln \frac{\lambda a_R p_0}{c_R^2 \mu^2} - \kappa \right) \right] \right\}. \quad (12)$$

С помощью уравнения Овсянникова для эффективного потенциала и формулы (12) можно получить улучшенное методом РГ выражение для эффективного потенциала:

$$V_{\text{eff}}^{\text{RG}}(p_0, \vec{v}) = \frac{p_0}{2} \left\{ -\lambda v^2 + i \bar{a}_R(p_0) p_0 \left[1 - \frac{\lambda^2 \bar{a}_R(p_0)}{32\pi c_R^3} \left(\ln \frac{\lambda \bar{a}_R(p_0)}{c_R^2} - \kappa \right) \right] \right\}. \quad (13)$$

“Бегущая амплитуда шума” $\bar{a}_R(p_0)$ имеет вид

$$\bar{a}_R(p_0) = \frac{a_R}{1 + (\lambda^2 a_R / 32\pi c_R^3) \ln(p_0 / \mu^2)}. \quad (14)$$

Выражение (13) с учетом равенства (14) показывает, что в системе возможно появление отличного от нуля значения p_0 . Однако данное значение лежит вне области применимости ТВ. Для получения отличного от нуля значения p_0 в непертурбативной области далее мы рассмотрим матричное обобщение уравнения КПЧ.

В завершение этого раздела дадим несколько комментариев по поводу серии работ [14]–[16]. В этих работах было получено выражение для эффективного действия

в однопетлевом приближении в случае достаточно общего стохастического дифференциального уравнения в частных производных и корреляционной функции шума достаточно общего вида. С помощью этой теории, в частности, было выведено выражение для однопетлевого эффективного потенциала задачи КПЧ. Из анализа последнего было сделано утверждение о существовании ненулевого стохастического среднего поля $\bar{v}$ как минимума эффективного потенциала. На наш взгляд, этот результат является артефактом ТВ и исчезает после улучшения с помощью метода РГ выражения для эффективного потенциала¹⁾. Само же применение метода РГ остается законным и последовательным и неверно подверглось критике в указанной серии работ.

4. МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА КПЧ

В асимптотически свободных теориях должен существовать масштаб Λ_{QCD} , отделяющий пертурбативную, высокоэнергетическую физику от непертурбативной, низкоэнергетической. Этот же масштаб определяет лидирующее поведение корреляционных функций теории. В рамках обычной ТВ получить этот масштаб, вообще говоря, невозможно. Однако в системах низкой размерности $D = 2$ существует метод, основанный на обобщении метода перевала для обычных интегралов на случай континуальных интегралов, который позволяет вычислить этот масштаб и указать лидирующее поведение некоторых корреляционных функций. Впервые этот метод был применен Поляковым для $O(N)$ -симметричной нелинейной сигма-модели в размерности $D = 2$ [18].

Задача КПЧ имеет много сходных черт с $O(N)$ -симметричной нелинейной сигма-моделью и, как мы покажем в дальнейшем, тоже может быть “решена” аналогичным способом в некотором пределе. Но для этого сначала нам необходимо рассмотреть обобщение исходной задачи КПЧ. Для метода перевала необходим безразмерный большой параметр. В случае $O(N)$ -симметричной нелинейной сигма-модели этим параметром является N . Мы рассмотрим матричное обобщение исходной задачи КПЧ, в которой вместо поля $\varphi(t, x)$ фигурирует $SU(N)$ -матричнозначная функция $h_\beta^\alpha(t, x)$. Затем мы проанализируем свойства теории в пределе больших N .

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\partial_t h_\beta^\alpha = c_v \partial^2 h_\beta^\alpha + \frac{\lambda'}{2\sqrt{N}} (\partial h_\gamma^\alpha)(\partial h_\beta^\gamma) + \eta_\beta^\alpha(t, x),$$

где X_β^α для любого X является $SU(N)$ -матрицей (иногда, когда это не вызовет разночтений, мы будем опускать матричные индексы). Также мы рассматриваем только лидирующее по $1/N$ поведение [17]. Коррелятор шума выберем в виде

$$\langle \eta_\beta^\alpha(t, x) \eta_{\alpha'}^{\beta'}(t', x') \rangle_\eta = a_v \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^{\beta'} \delta(t - t') \delta^D(x - x').$$

Производящий функционал для корреляционных функций теории при нулевых источниках записывается как

$$Z = \int \mathcal{D}(p_\beta^\alpha) \int \mathcal{D}(h_\beta^\alpha) e^{iS[h_\beta^\alpha, p_\beta^\alpha]},$$

¹⁾ Впервые подобная ситуация обсуждалась в классической работе Коулмена и Вайнберга.

где действие $S[h_\beta^\alpha, p_\beta^\alpha]$ является тривиальным обобщением скалярного случая:

$$S[h_\beta^\alpha, p_\beta^\alpha] = \int dt \int d^D x p_\alpha^\beta \left((\partial_t - c_B \partial^2) h_\beta^\alpha - \frac{\lambda'}{2\sqrt{N}} (\partial h_\gamma^\alpha) (\partial h_\beta^\gamma) + \frac{ia_B}{2} p_\beta^\alpha \right). \quad (15)$$

Отметим, что континуальный интеграл по h является гауссовым, и мы можем вычислить его точно:

$$Z = \int \mathcal{D}(p_\beta^\alpha) e^{iS[p_\beta^\alpha]}.$$

Здесь эффективное действие $S[p_\beta^\alpha]$ для p задано следующей формулой:

$$iS[p_\beta^\alpha] = -\frac{a_B}{2} \int dt \int d^D x p_\alpha^\beta p_\beta^\alpha - \frac{1}{2} \ln \det \left(-\frac{i\lambda'}{\sqrt{N}} \partial(p_\beta^\alpha \partial) \right) + iS'[p_\beta^\alpha].$$

Явный вид S' для нас не важен, отметим только, что на постоянных полевых конфигурациях эта часть действия обращается в нуль.

Мы вычислим континуальный интеграл по p_β^α методом перевала, взяв для p_β^α следующий анзац (диагональные и постоянные полевые конфигурации):

$$p_\beta^\alpha = p \delta_\beta^\alpha.$$

В рамках предложенного анзаца действие принимает вид

$$iS[p] = -\frac{a_B N}{2} \int dt \int d^D x p^2 - \frac{N}{2} \ln \det \left(-\frac{i\lambda'}{\sqrt{N}} \partial(p\partial) \right) + iS'[p].$$

Здесь мы встречаемся со следующей сложностью: детерминант оператора

$$-\frac{i\lambda'}{\sqrt{N}} \partial(p\partial) = -\frac{i\lambda'}{\sqrt{N}} p \partial^2$$

является плохо определенным. Чтобы придать смысл этому выражению, нужна регуляризация. Мы предлагаем следующую регуляризацию:

$$-\frac{i\lambda'}{\sqrt{N}} p \partial^2 \rightarrow -\frac{i\lambda'}{\sqrt{N}} p \partial^2 - iq_{\text{reg}} (\partial_t^2 - (c_{\text{reg}} \partial^2)^2),$$

где подразумевается взятие предела $q_{\text{reg}} \rightarrow 0$ в конце вычислений. Отметим, что такая регуляризация эквивалентна добавлению к исходному действию слагаемого

$$-q_{\text{reg}} \int dt \int d^D x h_\alpha^\beta [\hat{l}^+ \hat{l}] (c_{\text{reg}}) h_\beta^\alpha,$$

где $[\hat{l}^+ \hat{l}] (c_{\text{reg}})$ означает, что в произведение $\hat{l}^+ \hat{l}$ операторов антидиффузии и диффузии (7) нужно подставить c_{reg} вместо c_B . Такую модификацию исходного действия, в свою очередь, можно интерпретировать как аккуратный учет вклада от функционального детерминанта, возникающего при переходе от шума к вспомогательному полю p_β^α при выводе действия модели. Отметим, что в пределе больших N это слагаемое, как и ожидается, не дает вклада в ТВ (мы чуть позже обсудим поведение этого вклада при больших N подробнее).

После введения регуляризатора уравнение метода перевала принимает вид

$$-a_{\text{B}}p - \frac{\mu^{2\varepsilon}}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\lambda k^2}{\lambda p k^2 + q_{\text{reg}}(\omega^2 + c_{\text{reg}}^2 k^4)} = 0, \quad \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{N}}.$$

Отметим аналогию между этим уравнением и уравнением для щели в сверхпроводнике. Далее, после вычисления этого интеграла в размерной регуляризации мы имеем

$$-a_{\text{B}} + \frac{1}{32\pi} \frac{\lambda^2}{c_{\text{reg}}^3 q_{\text{reg}}^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{q_{\text{reg}} c_{\text{reg}}^2 \mu^2}{\lambda p} \right) = 0.$$

Учтем теперь соответствующий контрчлен в нужном порядке по λ' :

$$a_{\text{B}} = a_{\text{R}} \left(1 + \alpha(\mu) \frac{z_1}{\varepsilon} \right), \quad \alpha(\mu) = \mu^{2\varepsilon} \frac{(\lambda')^2 a_{\text{R}}}{c_{\text{R}}^3}, \quad z_1 = \frac{1}{64\pi}$$

(уменьшение в два раза величины z_1 в данном случае по сравнению с величиной z_1 из (3) есть следствие того, что мы рассматриваем $SU(N)$ -обобщение [17]). Следовательно, мы получаем

$$-a_{\text{R}} + \frac{1}{32\pi} \frac{\lambda^2}{c_{\text{reg}}^3 q_{\text{reg}}^2} \ln \frac{q_{\text{reg}} c_{\text{reg}}^2 \mu^2}{\lambda p} = 0,$$

если потребуем следующее свойство двойного предела:

$$N q_{\text{reg}}^2 c_{\text{reg}}^3 = \frac{2c_{\text{R}}^3}{a_{\text{R}}^2} \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \quad q_{\text{reg}} \rightarrow 0.$$

Теперь мы можем найти зависимость q_{reg} от N при условии, что c_{reg} от N не зависит (последнее всегда возможно):

$$q_{\text{reg}} = \frac{1}{a_{\text{R}}} \sqrt{\frac{c_{\text{R}}^3}{c_{\text{reg}}^3}} \sqrt{\frac{2}{N}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}},$$

откуда мы видим, что в рамках ТВ вклады, связанные с регуляризатором, подавлены в пределе больших N .

Введем функцию θ следующим образом:

$$q_{\text{reg}} c_{\text{reg}}^2 = \lambda \theta(\alpha, a_{\text{R}}, c_{\text{R}}).$$

Решая ренормированное уравнение перевала, получаем

$$p = \Lambda_{\text{QCD}} = \mu^2 \theta(\alpha, a_{\text{R}}, c_{\text{R}}) e^{-1/z_1 \alpha}.$$

Мы видим, что поле p приобрело ненулевое вакуумное среднее, равное Λ_{QCD} , причем его значение неаналитично по параметру ТВ α . Отметим также, что вакуумное среднее поля h равно нулю.

Подставим найденное p в уравнение Овсянникова с известными $\beta(\alpha)$ и $\gamma_a(\alpha)$:
имеем

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} - z_1 \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} - z_1 \alpha a_R \frac{\partial}{\partial a_R} \right) p = 0.$$

Из этого уравнения получаем, что функция θ имеет вид

$$\theta(\alpha, a_R, c_R) = \vartheta \left(\frac{\alpha}{a_R}, c_R \right).$$

Выберем, например, ϑ как

$$\vartheta \left(\frac{\alpha}{a_R}, c_R \right) = \sqrt{\frac{a_R}{\alpha}} c_R = \frac{c_R^2}{\lambda'}.$$

Получаем регуляризатор

$$-iq_{\text{reg}}(\partial_t^2 - (c_{\text{reg}}\partial^2)^2) = -i \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\left(\frac{2}{a_R^2} \partial_t \right)^2 - (c_R \partial^2)^2 \right],$$

не зависящий от λ' (или, что эквивалентно, от α).

Покажем теперь, что масштаб $p = \Lambda_{\text{QCD}}$ определяет свойства корреляционных функций, например, воспользовавшись уравнениями движения для лагранжиана из (15):

$$\langle [(\partial h)^2](t, x) \rangle = \Lambda_{\text{QCD}} + \text{РТ},$$

где РТ обозначает аналитические по α вклады. Символ $[(\partial h)^2](t, x)$ надо понимать как результат взятия предела (операторного разложения [18])

$$\langle \partial^i h_\beta^\alpha(t, x) \partial_i h_\alpha^\beta(t', x') \rangle \quad \text{при} \quad (t', x') \rightarrow (t, x).$$

Таким образом, мы заключаем, что в матричной задаче КПЧ среднее значение поля h остается равным нулю, однако среднее значение от $(\partial h)^2$ оказывается ненулевым за счет непертурбативных эффектов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено исследование уравнения КПЧ. В рамках однопетлевого приближения вычислены константы ренормировки, бета-функция теории, критические индексы и эффективный потенциал. На основании анализа улучшенного методом РГ эффективного потенциала мы не можем сделать достоверных выводов о наличии в системе конденсата (ненулевого стохастического среднего вспомогательного поля КПЧ). Вне рамок ТВ задача о появлении конденсата может быть решена в матричном обобщении модели КПЧ в пределе больших N . Для конденсата получено явное аналитическое выражение. Отметим, что в матричном обобщении модели КПЧ конденсат непертурбативен по константе связи уравнения КПЧ. Бурное развитие теоретических исследований стохастических систем в современной литературе и перспективы их применения в численных расчетах на решетке придают значимость полученным результатам.

Рис. 3. Пропагаторы $\langle \varphi \varphi \rangle_\eta$ (а), $\langle \varphi p \rangle_\eta$ (б) и $\langle pp \rangle_\eta$ (в). Рис. 4. Вершина $V[\varphi(\omega_1, k_1)\varphi(\omega_2, k_2)p(\omega_3, k_3)]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Диаграммная техника задачи КПЧ

Приведем без вывода диаграммную технику задачи КПЧ. Пропагаторы полей получаются непосредственно из вида лагранжиана КПЧ и в (ω, k) -представлении записываются как (см. рис. 3)

$$\begin{aligned} \langle \varphi \varphi \rangle_\eta(\omega, k) &= \frac{N(k)}{\omega^2 + (c_B k^2)^2}, & \langle pp \rangle_\eta(\omega, k) &= 0, \\ \langle p \varphi \rangle_\eta(\omega, k) &= \frac{1}{\omega - i c_B k^2}, & \langle \varphi p \rangle_\eta(\omega, k) &= -\frac{1}{\omega + i c_B k^2}. \end{aligned}$$

Если коррелятор шума имеет вид произведения дельта-функций, то $N(k) = a_B$. Вершину взаимодействия также можно найти из лагранжиана: мы имеем (см. рис. 4)

$$V[\varphi(\omega_1, k_1)\varphi(\omega_2, k_2)p(\omega_3, k_3)] = i\lambda \vec{k}_1 \vec{k}_2 \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \delta^D(k_1 + k_2 + k_3).$$

Все вычисления в настоящей работе проводятся с использованием данных диаграммных правил в размерной регуляризации в рамках $\overline{\text{MS}}$ -схемы.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Функция накачки специального вида

Рассмотрим вычисление эффективного потенциала с функцией накачки специального вида

$$N(\omega, k) = \frac{a r_{\text{SB}}^2}{k^2 + r_{\text{SB}}^2} = \frac{a \kappa_{\text{SB}}}{\eta + \kappa_{\text{SB}}},$$

где $\eta = c k^2$, $\kappa_{\text{SB}} = c r_{\text{SB}}^2$. После интегрирования по частоте однопетлевой интеграл для эффективного потенциала имеет теперь более сложный вид:

$$I(p_0, \vec{v}) = \frac{\pi^{D/2} c^{-D/2} \mu^{-2\epsilon}}{(2\pi)^D \Gamma(D/2)} J,$$

где

$$J = \int_0^\infty d\eta \eta^{D/2-1/2} \left(\sqrt{\eta + i \frac{\lambda a p_0}{c} \frac{\kappa_{\text{SB}}}{\eta + \kappa_{\text{SB}}}} - \sqrt{\eta} \right).$$

Введем обозначения

$$A = i \frac{\lambda a p_0}{c}, \quad h(\eta) = \frac{\kappa_{\text{SB}}}{\eta + \kappa_{\text{SB}}}, \quad D = 2(1 + \varepsilon).$$

Преобразуем теперь выражение для J следующим образом:

$$J = \int_0^\infty d\eta \eta^{D/2-1/2} (\sqrt{\eta + Ah(\eta)} - \sqrt{\eta}) = \int_0^\infty d\eta \eta^{D/2-1/2} \frac{\eta + Ah(\eta)}{\sqrt{\eta + Ah(\eta)}}.$$

Здесь мы воспользовались правилом размерной регуляризации: интеграл, не зависящий от внешнего масштаба, полагается равным нулю.

Дальнейшая идея вычисления этого интеграла заключается в том, чтобы преобразовать сумму в произведение. Для этого применим преобразование Меллина–Барнса (МБ). Отметим, что по своим свойствам это преобразование противоположно параметризации Фейнмана, преобразующей произведение в сумму. Для суммы двух слагаемых преобразование МБ задается формулой

$$\frac{1}{(X + Y)^\lambda} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{2\pi i \Gamma(\lambda)} \Gamma(\lambda + z) \Gamma(-z) \frac{Y^z}{X^{\lambda+z}}.$$

Применим это преобразование к J , после чего вычислим интеграл по η (он теперь сводится к набору гамма-функций), а затем оставшийся интеграл по параметру преобразования МБ (последний интеграл берется по теореме о вычетах):

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty d\eta \eta^{D/2-1/2} (\eta + Ah(\eta)) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{2\pi i \Gamma(1/2)} \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma(-z) \frac{(Ah(\eta))^z}{\eta^{z+1/2}} = \\ &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{2\pi i \Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(z + 1/2) \Gamma(-z) \Gamma(2z - 1 - D/2) \Gamma(1 + D/2 - z)}{\Gamma(z)} A^z \kappa_{\text{SB}}^{1+D/2-z} + \\ &+ \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{2\pi i \Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(z + 1/2) \Gamma(-z) \Gamma(2z + 1 - D/2) \Gamma(D/2 - z)}{\Gamma(z)} A^{z+1} \kappa_{\text{SB}}^{D/2-z} = \\ &= -2\pi i \sum \text{Res}_1 \left[\Gamma(-z), \Gamma\left(1 + \frac{D}{2} - z\right) \right] - 2\pi i \sum \text{Res}_2 \left[\Gamma(-z), \Gamma\left(\frac{D}{2} - z\right) \right]. \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

Здесь символами $\text{Res}_{1,2}[\Gamma(u - z), \Gamma(v - z)]$ обозначены вычеты в точках, которые соответствуют нулям указанных в квадратных скобках гамма-функций, для подынтегральных выражений в первом и втором слагаемых (см. вторую и третью строки в соотношении (П.1)).

Полученные суммы вычетов являются аналитическими функциями по параметру ТВ. С точностью $O(A^2)$ получаем следующий результат для однопетлевого интеграла:

$$I(p_0, \vec{v}) = -\frac{\kappa_{\text{SB}} A}{8\pi c} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\kappa_{\text{SB}}}{c\mu^2} \right) + O(A^2).$$

Отметим, что величина $O(A^2)$ оказывается конечной.

Из структуры расходимости видно, что для ее устранения при заданной функции накачки (корреляторе шума) в уравнение КПЧ необходимо добавить постоянное слагаемое f . Это приводит к добавлению следующего слагаемого к действию КПЧ:

$$\delta S[\varphi, p] = -f \int dt \int d^D x p.$$

Для эффективного потенциала получаем теперь выражение

$$V_{\text{eff}}(p_0, \vec{v}) = \frac{p_0}{2}(iap_0 - \lambda v^2) - fp_0 + \frac{1}{16\pi} \frac{\lambda ar_{\text{SB}}^2 p_0}{c} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{r_{\text{SB}}^2}{\mu^2} \right).$$

Пусть $f = r_{\text{SB}}^2$, а между r_{SB}^2 и r_{SR}^2 имеет место соотношение

$$r_{\text{SB}}^2 = r_{\text{SR}}^2 \left(1 + \frac{1}{16\pi} \frac{\lambda a}{c} \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Тогда ренормированный эффективный потенциал принимает вид

$$V_{\text{eff}}^{\text{ren}}(p_0, \vec{v}) = \frac{p_0}{2}(iap_0 - \lambda v^2) - r_{\text{SR}}^2 p_0 + \frac{1}{16\pi} \frac{\lambda ar_{\text{SR}}^2 p_0}{c} \ln \frac{r_{\text{SR}}^2}{\mu^2}.$$

В заключение сделаем несколько замечаний. Во-первых, единственным классом расходящихся диаграмм являются диаграммы типа “головастик”. Это делает рассмотренную теорию в некотором смысле тривиальной. Во-вторых, полученное выражение для эффективного потенциала можно исследовать дальше методами РГ. Однако целью настоящего приложения была демонстрация применения преобразования МБ для вычисления эффективного потенциала в случае сложных (отличных от произведения дельта-функций) функций накачки.

Благодарности. Авторы очень признательны А. С. Горскому за многочисленные плодотворные обсуждения и советы и Д. И. Казакову за внимательное прочтение и конструктивную критику рукописи.

Список литературы

- [1] M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:9 (1986), 889–892.
- [2] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **77**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.
- [3] L. Ts. Adzhemyan, J. Honkonen, M. V. Kompaniets, A. N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E*, **71**:3 (2005), 036305, 19 pp., arXiv: nlin/0407067.
- [4] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, P. B. Gol'din, T. L. Kim, M. V. Kompaniets, *J. Phys. A*, **41**:49 (2008), 495002, 25 pp.
- [5] А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамики*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [6] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E*, **58**:2 (1998), 1823–1835.
- [7] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, J. Honkonen, T. L. Kim, *Phys. Rev. E*, **71**:1 (2005), 016303, 20 pp.
- [8] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. V. Runov, *Phys. Rev. E*, **64**:4 (2001), 046310, 30 pp., arXiv: nlin/0104012.
- [9] М. Гнатич, Ю. Хонконен, Т. Лучивянски, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 146–157.

- [10] T. Sun, M. Plischke, *Phys. Rev. E*, **49**:6 (1994), 5046–5057.
- [11] E. Frey, U. C. Tauber, *Phys. Rev. E*, **50**:2 (1994), 1024–1045.
- [12] K. J. Wiese, *Phys. Rev. E*, **56**:5 (1997), 5013–5017, arXiv: cond-mat/9706009.
- [13] K. J. Wiese, *J. Statist. Phys.*, **93**:1–2 (1998), 143–154, arXiv: cond-mat/9802068.
- [14] D. Hochberg, C. Molina-Paris, J. Perez-Mercader, M. Visser, *Phys. Rev. E*, **60**:6 (1999), 6343–6360, arXiv: cond-mat/9904215.
- [15] D. Hochberg, C. Molina-Paris, J. Perez-Mercader, M. Visser, *Physica A*, **280**:3–4 (2000), 437–455, arXiv: cond-mat/9904391.
- [16] D. Hochberg, C. Molina-Paris, J. Perez-Mercader, M. Visser, *Phys. Lett. A*, **278**:4 (2001), 177–183, arXiv: cond-mat/9904413.
- [17] M. Kardar, A. Zee, *Nucl. Phys. B*, **464** (1996), 449–462, arXiv: cond-mat/9507112.
- [18] И. А. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, *ЭЧАЯ*, **17**:3 (1986), 472–545.

Поступила в редакцию 10.09.2013