Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрина, Целочисленные характеристики решений некоммутативной сигма-модели, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 3, 307–321

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:40:27

© 2014 г.

А. В. Домрина*

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШЕНИЙ НЕКОММУТАТИВНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

В некоммутативной сигма-модели у любого решения Φ конечной энергии имеются три неотрицательные целочисленные характеристики: нормированная энергия $e(\Phi)$, канонический ранг $r(\Phi)$ и минимальное унитарное число $u(\Phi)$. Доказаны неравенства $r(\Phi) \geq u(\Phi)$, $e(\Phi) \geq u(\Phi)(u(\Phi) + 1)/2$. Также показано, что если числа $e, r, u \in \mathbb{N}$ удовлетворяют более сильным неравенствам $r \geq u$ и $e \geq r + u(u - 1)/2$, то существует решение Φ конечной энергии, для которого $e(\Phi) = e$, $r(\Phi) = r$, $u(\Phi) = u$.

Ключевые слова: некоммутативная сигма-модель, унитарная факторизация.

DOI: 10.4231/tmf8595

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической унитарной сигма-модели теории поля изучаются гармонические отображения двумерной сферы в унитарную группу $U(n)$. Некоммутативная унитарная сигма-модель получается из классической посредством замены $U(n)$ -значных функций на унитарные операторы в гильбертовом пространстве по правилам исчисления Вейля псевдодифференциальных операторов. Эта модель была предложена в связи с теорией струн в работе [1] и далее изучалась в работах [2]–[5]. В работе [4] был сформулирован ряд гипотез о строении пространств решений конечной энергии. В работе [5] по аналогии с коммутативным случаем [6], [7] было введено понятие петлевого поднятия и, в частности, доказано, что минимальное унитарное число решения конечной энергии равно степени его петлевого поднятия.

В настоящей работе мы продолжаем изучать свойства петлевого поднятия. Мы показываем, во-первых, что для натуральных чисел e, u, r , удовлетворяющих неравенствам $e \geq r + u(u - 1)/2$, $r \geq u$, существует решение, нормированная энергия которого равна e , канонический ранг равен r , а минимальное унитарное число равно u . Во-вторых, мы доказываем, что для любого решения Φ конечной энергии справедливы неравенства $e \geq u(u + 1)/2$ и $r \geq u$, где e, u, r – соответственно нормированная энергия, минимальное унитарное число и канонический ранг решения Φ .

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: avdomrina@yandex.ru

Отметим, что последние неравенства были сформулированы в работе [4] в виде гипотетического необходимого и достаточного условия существования решения с характеристиками e, r, u . Таким образом, мы устанавливаем их необходимость, а также достаточность несколько более сильных неравенств.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со стандартным базисом $\{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$, a – оператор уничтожения, a^* – оператор рождения,

$$ae_0 = 0, \quad ae_j = \sqrt{j} e_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad a^*e_j = \sqrt{j+1} e_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Операторы a, a^* отображают в себя векторное пространство

$$D_\infty = \left\{ x \in H \left| \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^k |x_j|^2 < \infty, \quad k = 0, 1, \dots \right. \right\}.$$

Пусть M – множество унитарных операторов вида $\Phi = e^{i\theta} I + K$, где $\theta \in \mathbb{R}$, I – тождественный оператор, $K: H \rightarrow H$ – линейный оператор, образ которого $\text{im } K = K(H)$ является конечномерным подпространством в D_∞ . Для каждого $\Phi \in M$ операторы

$$\partial_+ \Phi := -[a^*, \Phi], \quad \partial_- \Phi := [a, \Phi], \quad \Phi_\pm := \Phi^{-1} \partial_\pm \Phi$$

определены на пространстве D_∞ и имеют конечномерный образ, лежащий в D_∞ . Поэтому эти операторы продолжаются по непрерывности на всё H . Они являются некоммутативными аналогами производных по $z, \bar{z}$ и соответствующих логарифмических производных. Наряду с M мы также будем рассматривать подпространство $M_0 \subset M$ унитарных операторов вида $\Phi = I + K$, где I и K – те же операторы, что и выше.

Некоммутативная $U(1)$ -сигма-модель, которая изучалась в статьях [1]–[5], задается функционалом энергии

$$4e(\Phi) = \|\partial_+ \Phi\|_{\text{HS}}^2 = \|\partial_- \Phi\|_{\text{HS}}^2 = \|\Phi_+\|_{\text{HS}}^2 = \|\Phi_-\|_{\text{HS}}^2 \quad (2.1)$$

(здесь $\|X\|_{\text{HS}}^2 = \text{tr } XX^*$ – квадрат нормы Гильберта–Шмидта оператора $X: H \rightarrow H$ с конечномерным образом).

Оператор $\Phi \in M$ называется решением некоммутативной $U(1)$ -сигма-модели, если $t = 0$ является критической точкой функции $e(\Psi(t))$ для любого гладкого отображения $\Psi: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, удовлетворяющего условию $\Psi(0) = \Phi$. Отметим, что если $\Phi \in M$ – решение и $\theta \in \mathbb{R}$, то $\Psi = e^{i\theta} \Phi$ – тоже решение. Такие решения называются эквивалентными. Тем самым любое решение $\Phi \in M$ эквивалентно некоторому решению $\Psi \in M_0$.

В работе [3] показано, что для любого решения $\Phi \in M$ число $e(\Phi)$ является неотрицательным и целым. При этом $e(\Phi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi = e^{i\theta} I$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$. Число $e(\Phi)$ называется *нормированной энергией решения* Φ .

Пусть $\Phi \in M$ – произвольное решение. Ортопроектор $P: H \rightarrow H$ называется унитаром для Φ , если $I - 2P \in M$ и справедливы равенства

$$P\Phi - P^\perp = 0, \quad (2.2)$$

$$P^\perp(\Phi_- + 2a)P = 0. \quad (2.3)$$

Тогда (см. работу [3], утверждение 9) унитарный оператор $\Psi = \Phi(I - 2P)$ также является решением, причем

$$\Psi_- = \Phi_- + 2\partial_- P. \quad (2.4)$$

Операция добавления унитаров обратима по формуле $\Phi = -\Psi(I - 2P^\perp)$, при этом $P^\perp$ является унитаром для решения Ψ . *Каноническим рангом* решения Φ называется число

$$r(\Phi) = \dim \operatorname{im} \Phi_+ = \dim \operatorname{im} \Phi_- = \dim \operatorname{im} \partial_- \Phi = \dim \operatorname{im} \partial_+ \Phi. \quad (2.5)$$

Согласно работе [3] (утверждения 11, 12) для любого решения $\Phi \in M$ существует конечное число ортопроекторов $P_0, P_1, \dots, P_n$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ такие, что $P_0 = 0$ и

$$\Phi = e^{i\theta}(I - 2P_0)(I - 2P_1) \dots (I - 2P_n), \quad (2.6)$$

где P_j – унитар для решения $e^{i\theta}(I - 2P_0)(I - 2P_1) \dots (I - 2P_{j-1})$ и $\dim \operatorname{im} P_j < \infty$ для всех $j = 1, \dots, n$. При этом $e(\Phi) = \sum_{j=0}^n \dim \operatorname{im} P_j$. Разложение (2.6) решения Φ в виде произведения конечного числа отражений вида $I - 2P_j$, где $P_0, P_1, \dots, P_j$ удовлетворяют условиям, сформулированным выше, назовем *унитарной факторизацией* решения Φ . Отметим, что представление (2.6) решения Φ не является единственным. *Минимальным унитарным числом* $u(\Phi)$ назовем наименьшее число $n \in \{0, 1, \dots\}$, для которого справедливо разложение (2.6).

Пусть решение $\Phi \in M$ и ортопроекторы $P_0, P_1, \dots, P_n$ удовлетворяют соотношению (2.6). Операторнозначный многочлен

$$\Phi(\lambda) = \prod_{j=0}^n (P_j^\perp + \lambda P_j)$$

называется *петлевым поднятием* решения Φ . В работе [5] показано, что петлевое поднятие решения Φ не зависит от выбора унитарной факторизации (2.6) этого решения и минимальное унитарное число решения Φ равно степени многочлена $\Phi(\lambda)$.

Рассмотрим более подробно решения $\Psi \in M$ с унитарным числом 0 или 1. Согласно формулам (2.6) и (2.3) решение Ψ эквивалентно отражению $\Phi = I - 2P$, где $V = \operatorname{im} P$ – конечномерное подпространство в D_∞ , удовлетворяющее условию $a(V) \subset V$. При этом $P = 0$, если и только если $u(\Psi) = 0$. Определенное выше отражение Φ называется *BPS-решением*¹⁾, а $V = \operatorname{im} P$ называется *BPS-подпространством*. Строение BPS-решений описано в работе [4] (утверждение 1): для каждого BPS-решения $\Phi = I - 2P$ с соответствующим BPS-подпространством $V = \operatorname{im} P$ существует единственный комплекснозначный многочлен $\Pi(z)$ со старшим членом, равным единице, такой, что $V = \ker \Pi(a)$. Верно и обратное: для каждого комплекснозначного многочлена $\Pi(z)$ со старшим членом, равным единице, множество

¹⁾BPS-решения – решения Богомольного–Прасада–Зоммерфельда.

$V = \ker \Pi(a)$ является BPS-подпространством. Для более детального описания BPS-подпространств введем векторы

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\sqrt{j!}} e_j, \quad R_\lambda^q = (a^* - \bar{\lambda}I)^q R_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad q = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

Любой конечный набор векторов $R_{\lambda_j}^{q_j}$ линейно независим. Они удовлетворяют соотношениям (где угловые скобки означают линейную оболочку)

$$\ker(a - \lambda I) = \langle R_\lambda \rangle, \quad \ker(a - \lambda I)^k = \langle R_\lambda, R_\lambda^1, \dots, R_\lambda^{k-1} \rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Разложим $\Pi(z)$ на множители: $\Pi(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_r)^{k_r}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда справедливо представление

$$V = \langle R_{\lambda_j}^{q_j} \mid 1 \leq j \leq r, 0 \leq q_j \leq k_j - 1 \rangle. \quad (2.8)$$

При этом

$$e(\Phi) = \dim V = k_1 + \dots + k_r = \deg \Pi, \quad r(\Phi) = r. \quad (2.9)$$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\Phi = e^{i\theta} \prod_{j=0}^n (I - 2P_j)$ – унитарная факторизация решения Φ , $\Phi_l = \prod_{j=0}^l (I - 2P_j)$, $1 \leq l \leq n$. Тогда

$$\Phi_{l-} = 2 \sum_{j=1}^l [a, P_j], \quad \Phi_- = 2 \sum_{j=1}^n [a, P_j].$$

Доказательство получается из (2.4) индукцией по n .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях утверждения 1 соотношения (2.2) и (2.3) принимают вид

$$P_k[a, P_1 + \dots + P_{k-1}]P_k^\perp = 0, \quad 2 \leq k \leq n, \quad (3.1)$$

$$P_k^\perp([a, P_1 + \dots + P_{k-1}] + a)P_k = 0, \quad 2 \leq k \leq n, \quad P_1^\perp a P_1 = 0. \quad (3.2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\Phi_j = I - 2P_j$, $j = 1, 2$, – два BPS-решения такие, что подпространства $V_j = \text{im } P_j$ удовлетворяют включениям $V_2 \subset V_1$, $a^* V_2 \subset V_1$. Тогда $r(\Phi_1) \geq r(\Phi_2)$ и $\dim V_1 \geq r(\Phi_1) + \dim V_2$.

Доказательство. Пусть $\Pi_j(z)$ – многочлен со старшим коэффициентом, равным единице, такой, что $V_j = \ker \Pi_j(a)$, $j = 1, 2$. Разложим $\Pi_2(z)$ на множители:

$$\Pi_2(z) = \prod_{j=1}^{r(\Phi_2)} (z - \lambda_j)^{k_j}.$$

Согласно формулам (2.7)–(2.9)

$$V_2 = \langle R_{\lambda_j}^{q_j} \mid 1 \leq j \leq r(\Phi_2), 0 \leq q_j \leq k_j - 1 \rangle.$$

Справедливо равенство $a^* R_{\lambda_j}^{q_j} = R_{\lambda_j}^{q_j+1} + \bar{\lambda}_j R_{\lambda_j}^{q_j}$, и по условию $V_2 + a^* V_2 \subset V_1$, отсюда $R_{\lambda_j}^{k_j} \subset V_1$, следовательно, BPS-подпространство

$$\langle R_{\lambda_j}^{q_j} \mid 1 \leq j \leq r(\Phi_2), 0 \leq q_j \leq k_j \rangle \subset V_1.$$

Поэтому многочлен $\Pi_1(z)$ делится на произведение $\Pi_2(z) \prod_{j=1}^{r(\Phi_2)} (z - \lambda_j)$. Таким образом, число различных корней многочлена Π_1 не меньше числа различных корней многочлена Π_2 , т. е. $r(\Phi_1) \geq r(\Phi_2)$ и $\deg \Pi_1 \geq r(\Phi_1) + \deg \Pi_2$. Остается учесть, что $\deg \Pi_j = \dim V_j$, $j = 1, 2$. Утверждение доказано.

4. ПРИМЕР, ОБОБЩАЮЩИЙ ДИАГОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В следующей теореме строится класс решений, содержащий диагональные решения, которые изучались в работах [3], [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha_1 \supset \dots \supset \alpha_n$ – BPS-подпространства такие, что $\alpha_n \neq \{0\}$ и $a^* \alpha_{j+1} \subset \alpha_j$ при $1 \leq j \leq n-1$. Рассмотрим ортопроекторы P_j , $1 \leq j \leq n$, для которых $\text{im } P_j = \alpha_j$. Положим $r_j = r(I - 2P_j)$. Тогда оператор $\Phi = \prod_{j=1}^n (I - 2P_j)$ является решением, удовлетворяющим соотношениям

$$u(\Phi) = n, \quad e(\Phi) = \sum_{j=1}^n \dim \alpha_j, \quad r(\Phi) = \sum_{j=1}^n r_j. \quad (4.1)$$

При этом

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n, \quad e(\Phi) \geq \frac{n(n-1)}{2} + r(\Phi). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Phi_0 = I$, $\Phi_j = \prod_{k=1}^j (I - 2P_k)$ для $1 \leq j \leq n$. Индукцией по j убедимся, что Φ_j – решение, причем P_j – унитар для Φ_{j-1} .

Поскольку α_1 – BPS-подпространство, $\Phi_1 = I - 2P_1$ – BPS-решение и P_1 – унитар для Φ_0 , следовательно, при $j = 1$ утверждение справедливо.

Предположим, что утверждение индукции справедливо при $j < k \leq n$. Покажем, что оно верно и при $j = k$. Достаточно проверить, что P_k – унитар для Φ_{k-1} , т. е. ортопроекторы $P_1, \dots, P_k$ удовлетворяют соотношениям (3.1) и (3.2). Покажем, что

$$\left[a^*, \sum_{l=1}^{k-1} P_l \right] P_k = 0$$

и тем самым выполнено равенство (3.1). Действительно, α_l – BPS-подпространство, следовательно, $P_l a^* P_l^\perp = 0$ и $[a^*, P_l] = P_l^\perp a^* P_l$. При $l < k$ имеют место включения $\alpha_k \subset \alpha_l$ и $a^* \alpha_k \subset \alpha_l$, поэтому $P_l P_k = P_k$ и $P_l^\perp a^* P_k = 0$. Таким образом,

$$\left[a^*, \sum_{l=1}^{k-1} P_l \right] P_k = \left(\sum_{l=1}^{k-1} P_l^\perp a^* P_l \right) P_k = \sum_{l=1}^{k-1} P_l^\perp a^* P_k = 0.$$

Покажем, что справедливы соотношения (3.2). Рассуждая, как выше, получаем, что $[a, P_l] = -P_l a P_l^\perp$ при $l \leq n$ и $P_l^\perp P_k = 0$ при $l < k$. Отсюда

$$P_k^\perp \left(\left[a, \sum_{l=1}^{k-1} P_l \right] + a \right) P_k = P_k^\perp a P_k = 0,$$

так как α_k – BPS-подпространство.

Мы показали, что P_k является унитаром для Φ_{k-1} , следовательно, Φ – решение и $\Phi = \prod_{j=0}^n (I - 2P_j)$ – унитарная факторизация решения Φ (мы, как и прежде, считаем, что $P_0 = 0$).

Докажем равенства (4.1). Согласно сказанному выше $\Phi(\lambda) = \prod_{j=1}^n (P_j^\perp + \lambda P_j)$ является петлевым поднятием решения Φ . Поскольку $\prod_{j=1}^n P_j = P_n \neq 0$, мы имеем $\deg \Phi(\lambda) = n$, и из теоремы 3.7 работы [5] следует, что $u = n$. Из утверждения 12 работы [3] следует, что $e = \sum_{j=1}^n \dim \alpha_j$. Покажем, что $r = \sum_{j=1}^n r_j$. При $n = 1$ это равенство очевидно. Пусть $n > 1$. По определению $r = \dim \operatorname{im} \Phi_- = \dim \operatorname{im} \Phi_+$. Так как α_j – BPS-подпространство,

$$\Phi_+ = 2 \sum_{j=1}^n P_j^\perp a^* P_j.$$

Положим

$$\frac{1}{2} \Phi_+ = A + B, \quad A = P_1^\perp a^* P_1, \quad B = \sum_{j=2}^n P_j^\perp a^* P_j.$$

Имеем

$$A(\alpha_2) = 0, \quad B(\alpha_2^\perp) = 0, \quad \operatorname{im} B \subset \alpha_1, \quad \operatorname{im} A \subset \alpha_1^\perp.$$

Следовательно,

$$\operatorname{im}(A + B) = A\alpha_2^\perp \oplus B\alpha_2 = \operatorname{im} A \oplus \operatorname{im} B.$$

Таким образом, $\dim \operatorname{im}(A + B) = \dim \operatorname{im} A + \dim \operatorname{im} B$. Применяя аналогичные соображения, получаем

$$r = \dim \operatorname{im} P_1^\perp a^* P_1 + \dots + \dim \operatorname{im} P_n^\perp a^* P_n.$$

Так как $r_j = \dim \operatorname{im}(I - 2P_j)_+ = \dim \operatorname{im} P_j^\perp a^* P_j$, мы имеем $r = \sum_{j=1}^n r_j$. Итак, мы доказали равенства (4.1).

Проверим справедливость неравенств (4.2). Согласно утверждению 2 мы имеем $r_j \geq r_{j+1}$ и $\dim \alpha_j \geq \dim \alpha_{j+1} + r_j$ для $1 \leq j \leq n-1$. Учитывая, что $\dim \alpha_n \geq r_n$, последовательно получаем $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ и $\dim \alpha_j \geq \sum_{k=j}^n r_k$. Таким образом,

$$e = \sum_{j=1}^n \dim \alpha_j \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n r_k = \sum_{k=1}^n k r_k \geq \sum_{k=1}^n r_k + \sum_{k=1}^n (k-1) = r(\Phi) + \frac{n(n-1)}{2},$$

что доказывает неравенства (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ортопроекторы $P_1, \dots, P_n$, которые удовлетворяют условиям теоремы 1, попарно коммутируют, так как $P_i P_j = P_j P_i = P_{\max(i,j)}$. Поэтому решение $\Phi = \prod_{j=0}^n (I - 2P_j)$ удовлетворяет соотношению $\Phi^2 = \Phi$. Следовательно, Φ является отражением, т. е. имеет вид $\Phi = I - 2P$ для некоторого ортопроектора P . Такие решения называются грассмановыми.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть e, r, n – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$r \geq n, \quad e \geq r + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (4.3)$$

Тогда существует решение $\Phi \in M_0$ такое, что $e(\Phi) = e$, $r(\Phi) = r$, $u(\Phi) = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то согласно соотношениям (2.9) всегда существует BPS-решение Φ , для которого $e(\Phi) = e$, $r(\Phi) = r$, где $e \geq r \geq 1$.

Пусть $n \geq 2$. Положим

$$r_1 = r - n + 1, \quad k_1 = e - \frac{n(n-1)}{2} - r_1 + 1.$$

В силу неравенств (4.3) $1 \leq r_1 < r$ и $k_1 \geq n$. Рассмотрим многочлен

$$\Pi(z) = z^{k_1} \prod_{j=1}^{r_1-1} (z - j)$$

(если $r_1 = 1$, то $\Pi(z) = z^{k_1}$). В силу формул (2.8) и (2.9) многочлену $\Pi(z)$ отвечает BPS-решение $I - 2P_1$ с соответствующим подпространством $\alpha_1 = \text{im } P_1 = \ker \Pi(a)$. При этом

$$\alpha_1 \supset \langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle, \quad \dim \alpha_1 = \deg \Pi(z) = e - \frac{n(n-1)}{2}, \quad r(I - 2P_1) = r_1.$$

Возьмем теперь ортопроекторы P_j , $2 \leq j \leq n$, у которых $\text{im } P_j = \alpha_j = \langle e_0, \dots, e_{n-j} \rangle$. По теореме 1 оператор $\Phi = \prod_{j=1}^n (I - 2P_j)$ является решением, нормированная энергия и канонический ранг которого равны

$$e(\Phi) = \sum_{j=1}^n \dim \alpha_j = e, \quad r(\Phi) = r_1 + \sum_{j=2}^n 1 = r,$$

поэтому построенное Φ и есть искомое решение.

5. КАНОНИЧЕСКАЯ УНИТОННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

В этом разделе мы будем рассуждать по аналогии с работами [6], [7].

Поскольку такие целочисленные характеристики решения $\Phi \in M$, как нормированная энергия, канонический ранг и минимальное унитарное число, не меняются при умножении Φ на константу, равную по модулю единице, мы считаем далее, что $\Phi \in M_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi \in M_0$ – решение, $n = u(\Phi)$ – его минимальное унитарное число. Тогда существует единственный набор ортопроекторов $P_0, P_1, \dots, P_n$ таких, что:

- а) $\Phi = \prod_{k=0}^n (I - 2P_k)$ – унитарная факторизация решения Φ ,
- б) если $u(\Phi) \neq 0$, то ортопроекторы $P_0, P_1, \dots, P_n$ удовлетворяют накрывающим условиям

$$\text{im } P_j P_{j-1} \dots P_1 = \text{im } P_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (5.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\alpha_j = \text{im } P_j$, $1 \leq j \leq n$. Тогда условия (5.1) эквивалентны равенствам

$$\alpha_j^\perp \cap \alpha_{j+1} = 0, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $n = 0$ теорема, очевидно, справедлива. Далее мы считаем, что $n \geq 1$.

Докажем существование ортопроекторов $P_0, P_1, \dots, P_n$. Положим $\Phi_n = \Phi$, $P_0 = 0$. Пусть

$$\Phi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n T_k^n \lambda^k$$

– петлевое поднятие решения Φ_n , P_n – ортопроектор такой, что $\text{im } P_n = \text{im}(T_n^n)^*$. Из леммы 3.6 работы [5] следует, что $\dim \text{im } P_n < \infty$, $P_n^\perp$ – унитар для решения Φ_n и степень петлевого поднятия $\Phi_{n-1}(\lambda)$ решения $\Phi_{n-1} = -\Phi(I - 2P_n^\perp)$ равна $n - 1$. Имеем $\Phi = \Phi_{n-1}(I - 2P_n)$.

Применяя индукцию, последовательно получаем решения

$$\Phi_{n-1}, \Phi_{n-2}, \dots, \Phi_0 \in M_0$$

с петлевыми поднятиями $\Phi_j(\lambda) = \sum_{k=0}^j T_k^j \lambda^k$, удовлетворяющими условию $T_j^j \neq 0$, и набор ортопроекторов $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$, удовлетворяющих для всех $j = 1, \dots, n$ соотношениям

$$\text{im } P_j = \text{im}(T_j^j)^*, \quad \dim \text{im } P_j < \infty. \quad (5.3)$$

При этом ортопроектор P_j является унитаром решения Φ_{j-1} и $\Phi_j = \Phi_{j-1}(I - 2P_j)$ для $1 \leq j \leq n$. Так как $\Phi_0 \in M_0$, справедливо равенство $\Phi_0 = I = I - 2P_0$, следовательно, $\Phi = \prod_{k=0}^n (I - 2P_k)$ – унитарная факторизация решения Φ , как сказано в утверждении “а”.

Проверим, что построенные ортопроекторы удовлетворяют равенствам (5.1). Поскольку

$$\Phi_j(\lambda) = \prod_{k=0}^j (P_k^\perp + \lambda P_k) = \sum_{k=0}^j T_k^j \lambda^k,$$

мы имеем $T_j^j = \prod_{k=1}^j P_k$ при $1 \leq j \leq n$. Применив соотношения (5.3), получаем

$$\text{im } P_j = \text{im}(T_j^j)^* = \text{im} \prod_{k=0}^{j-1} P_{j-k},$$

то есть имеет место формула (5.1).

Покажем, что набор ортопроекторов, удовлетворяющих условиям “а” и “б” теоремы, единствен. Пусть $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ – некоторый набор ортопроекторов, удовлетворяющих условиям “а” и “б”. Покажем, что $\pi_j = P_j$ для всех $j = 0, 1, \dots, n$. Очевидно, $\pi_0 = P_0 = 0$. Согласно условию “а” $\Phi(\lambda) = \prod_{k=0}^n (\pi_k^\perp + \lambda \pi_k)$, поэтому $T_n^n = \prod_{k=1}^n \pi_k$. В силу (5.3) ортопроектор P_n удовлетворяет соотношениям

$$\text{im } P_n = \text{im}(T_n^n)^* = \text{im} \prod_{k=0}^{n-1} \pi_{n-k} = \text{im } \pi_n$$

(последнее равенство справедливо, поскольку ортопроекторы $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ удовлетворяют условию “б”, а значит, и условиям (5.1)). Таким образом, мы показали, что $P_n = \pi_n$.

Применяя индукцию, последовательно получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{n-1}(\lambda) &= \prod_{k=0}^{n-1} (\pi_k^\perp + \lambda \pi_k), & \pi_{n-1} &= P_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Phi_1(\lambda) &= \pi_1^\perp + \lambda \pi_1, & \pi_1 &= P_1.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Phi \in M_0$ и $P_0, P_1, \dots, P_n$ – набор унитаров, удовлетворяющих условиям теоремы 2. Тогда представление $\Phi = \prod_{j=0}^n (I - 2P_j)$ назовем *канонической унитарной факторизацией решения* Φ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi = \prod_{j=0}^n (I - 2P_j)$ – каноническая унитарная факторизация решения $\Phi \in M_0$. Тогда для всех $j = 1, \dots, n$ справедливы равенства

$$P_j \left[a, \sum_{k=0}^{j-1} P_k \right] = 0, \quad (5.4)$$

$$\left[a, \sum_{k=1}^j P_k \right] = \left[a, \sum_{k=1}^j P_k \right] P_j^\perp. \quad (5.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (5.4) эквивалентно $P_j(\Phi_{j-1})_- = 0$, где, как и раньше, $\Phi_{j-1} = \prod_{k=0}^{j-1} (I - 2P_k)$. Поэтому унитар P_j является базовым для Φ_{j-1} (см. работу [3], определение 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим, как раньше, для $1 \leq j \leq n$

$$\alpha_j = \text{im } P_j, \quad \Phi_{j-1} = \prod_{k=0}^{j-1} (I - 2P_k).$$

Применим индукцию по j . При $j = 1$ равенство (5.4) справедливо, ибо $P_0 = 0$. Так как P_1 является унитаром для $\Phi_0 = I$, согласно формуле (2.3) $P_1^\perp a P_1 = 0$, следовательно, $[a, P_1] = -P_1 a P_1^\perp = [a, P_1] P_1^\perp$, т. е. равенство (5.5) также справедливо.

Предположим, что равенства (5.4) и (5.5) выполнены при $j \leq l < n$. Покажем, что эти соотношения справедливы при $j = l + 1$.

Ортопроектор P_{l+1} – унитар для Φ_l и при $j = l$ справедливо (5.5), поэтому равенство (3.1) влечет

$$0 = P_{l+1} \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_{l+1}^\perp = P_{l+1} \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_l^\perp P_{l+1}^\perp,$$

что эквивалентно

$$P_{l+1}^\perp P_l^\perp \left(\left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] \right)^* P_{l+1} = 0.$$

Учитывая соотношение (5.2), получаем

$$\text{im } P_l^\perp \left(\left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] \right)^* P_{l+1} \subset \alpha_{l+1} \cap \alpha_l^\perp = 0.$$

Переходя к сопряженному равенству, имеем $P_{l+1}[a, \sum_{k=1}^l P_k]P_l^\perp = 0$. Вновь применив (5.5) при $j = l$, получаем $P_{l+1}[a, \sum_{k=1}^l P_k] = 0$, следовательно, равенство (5.4) справедливо при $j = l + 1$.

Докажем соотношение (5.5) при $j = l + 1$. В силу (3.2)

$$P_{l+1}^\perp \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_{l+1} = -P_{l+1}^\perp a P_{l+1}. \quad (5.6)$$

Равенство (5.4) при $j = l + 1$ эквивалентно

$$\left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] = P_{l+1}^\perp \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right]. \quad (5.7)$$

Используя формулы (5.6) и (5.7), получаем

$$\begin{aligned} \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] &= P_{l+1}^\perp \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] = P_{l+1}^\perp \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_{l+1} + P_{l+1}^\perp \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_{l+1}^\perp = \\ &= -P_{l+1}^\perp a P_{l+1} + P_{l+1}^\perp \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_{l+1}^\perp = -P_{l+1}^\perp a P_{l+1} + \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_{l+1}^\perp. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Добавляя $[a, P_{l+1}]$ к левой и правой частям равенства (5.8) и учитывая, что

$$-P_{l+1}^\perp a P_{l+1} = -[a, P_{l+1}] P_{l+1},$$

окончательно получаем

$$\left[a, \sum_{k=1}^{l+1} P_k \right] = \left[a, \sum_{k=1}^l P_k \right] P_{l+1}^\perp - [a, P_{l+1}] P_{l+1} + [a, P_{l+1}] = \left[a, \sum_{k=1}^{l+1} P_k \right] P_{l+1}^\perp,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 1. Пусть $\Phi = \prod_{j=0}^n (I - 2P_j)$ – каноническая унитарная факторизация решения $\Phi \in M_0$ и $n \geq 2$. Тогда

$$P_{j-2} P_{j-1} a^* P_j = P_{j-2} a^* P_{j-1} P_j, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $j = 2$ утверждение очевидно. Пусть $j > 2$. Имеем

$$P_{j-1} a^* P_j = a^* P_{j-1} P_j - [a^*, P_{j-1}] P_j = a^* P_{j-1} P_j - \left[a^*, \sum_{k=0}^{j-1} P_k \right] P_j + \left[a^*, \sum_{k=0}^{j-2} P_k \right] P_j.$$

Учитывая равенства (5.4) и (5.5), получаем

$$P_{j-1} a^* P_j = a^* P_{j-1} P_j + P_{j-2}^\perp \left[a^*, \sum_{k=0}^{j-2} P_k \right] P_j. \quad (5.10)$$

Остается применить к обеим частям этого равенства ортопроектор P_{j-2} , и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Phi = \prod_{j=0}^n (I - 2P_j)$ – каноническая унитарная факторизация решения $\Phi \in M_0$ и $n \geq 1$. Положим $\beta_j = \text{im } P_1 \dots P_j$, $1 \leq j \leq n$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- а) $a^* \beta_j \subset \beta_{j-1}$ для всех $j = 2, \dots, n$,
- б) β_j – BPS-подпространство для всех $j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение “а”. Мы имеем $[a^*, P_1]P_2 = 0$ в силу равенства (5.4), отсюда

$$a^* P_1 P_2 = [a^*, P_1]P_2 + P_1 a^* P_2 = P_1 a^* P_2, \quad (5.11)$$

поэтому $a^* \beta_2 \subset \beta_1$. Пусть теперь $j \geq 3$. Применив соотношение (5.9), последовательно получаем $P_1 a^* P_2 P_3 = P_1 P_2 a^* P_3$, $P_2 a^* P_3 P_4 = P_2 P_3 a^* P_4$ и т. д. В силу (5.11)

$$a^* \prod_{l=1}^j P_l = P_1 a^* \prod_{l=2}^j P_l = P_1 P_2 a^* \prod_{l=3}^j P_l = \dots = \left(\prod_{l=1}^{j-1} P_l \right) a^* P_j. \quad (5.12)$$

Отсюда $a^* \beta_j \subset \beta_{j-1}$.

Докажем утверждение “б”. Положим, как и прежде, $\alpha_j = \text{im } P_j$. Если $j = 1$, то согласно (3.2) $\beta_1 = \alpha_1$ – BPS-подпространство. Пусть $j > 1$. Покажем по индукции, что для $1 \leq k \leq j - 1$

$$P_{j-k} a P_{j-k} P_{j-k+1} \dots P_{j-1} \alpha_j \subset P_{j-k} P_{j-k+1} \dots P_{j-1} \alpha_j. \quad (5.13)$$

Проверим сначала справедливость условия (5.13) при $k = 1$. Из равенства (5.4) следует, что

$$P_l \left[a, \sum_{q=1}^l P_q \right] = P_l [a, P_l], \quad 1 \leq l \leq n. \quad (5.14)$$

Запишем условие (3.2) в виде

$$\left(a + \left[a, \sum_{q=1}^{j-1} P_q \right] \right) \alpha_j \subset \alpha_j.$$

Применяя ортопроектор P_{j-1} к обеим частям этого соотношения и учитывая равенство (5.14) при $l = j - 1$, получаем

$$P_{j-1} a P_{j-1} \alpha_j \subset P_{j-1} \alpha_j,$$

другими словами, включение (5.13) выполнено при $k = 1$.

Допустим, что включение (5.13) справедливо при $1 \leq k \leq k_0 < j - 1$. Проверим, что оно имеет место и при $k = k_0 + 1$. В силу (3.2) и (5.4)

$$\left(\left[a, \sum_{q=1}^{j-k_0-1} P_q \right] + P_{j-k_0}^\perp a \right) P_{j-k_0} = 0,$$

в частности

$$\left(\left[a, \sum_{q=1}^{j-k_0-1} P_q \right] + P_{j-k_0}^\perp a \right) P_{j-k_0} P_{j-k_0+1} \dots P_{j-1} \alpha_j = 0.$$

Добавим к этому равенству включение (5.13), взятое при $k = k_0$: имеем

$$\left(\left[a, \sum_{q=1}^{j-k_0-1} P_q \right] + a \right) P_{j-k_0} P_{j-k_0+1} \dots P_{j-1} \alpha_j \subset P_{j-k_0} P_{j-k_0+1} \dots P_{j-1} \alpha_j.$$

Применяя к обеим частям данного соотношения ортопроектор P_{j-k_0-1} и используя равенство (5.14), взятое при $l = j - k_0 - 1$, получаем искомое включение (5.13) при $k = k_0 + 1$.

Итак, мы показали, что включение (5.13) справедливо при всех $k = 1, \dots, j - 1$. При $k = j - 1$ оно имеет вид

$$P_1 a P_1 \dots P_{j-1} \alpha_j \subset P_1 \dots P_{j-1} \alpha_j.$$

В соответствии с формулой (3.2) $P_1 a P_1 = a P_1$, поэтому $a \beta_j \subset \beta_j$, т.е. β_j является BPS-подпространством. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Phi \in M_0$ – решение, $n = u(\Phi) \geq 1$, подпространства $\beta_1, \dots, \beta_n$ определены, как в теореме 4, и $\pi_1, \dots, \pi_n$ – отвечающие им ортопроекторы (т.е. $\text{im } \pi_j = \beta_j$ для $1 \leq j \leq n$). Оператор $\tilde{\Phi} = \prod_{j=1}^n (I - 2\pi_j)$ назовем *плоским решением*, отвечающим решению Φ ²⁾.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\Phi \in M_0$ – решение, $u(\Phi) \geq 1$, $\tilde{\Phi}$ – плоское решение, отвечающее Φ . Тогда

$$u(\tilde{\Phi}) = u(\Phi), \quad e(\tilde{\Phi}) = e(\Phi), \quad r(\tilde{\Phi}) \leq r(\Phi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = u(\Phi)$, $\Phi = \prod_{k=0}^n (I - 2P_k)$ – каноническая унитарная факторизация решения Φ , $\alpha_j = \text{im } P_j$, $\tilde{\Phi} = \prod_{j=1}^n (I - 2\pi_j)$ – плоское решение, отвечающее Φ . Так как $P_j \neq 0$, в силу накрывающих условий (5.1) $\beta_j \neq 0$, следовательно, $u(\tilde{\Phi}) = n$ по теореме 1.

Так как

$$e(\Phi) = \sum_{j=1}^n \dim \alpha_j, \quad e(\tilde{\Phi}) = \sum_{j=1}^n \dim \beta_j,$$

равенство $e(\tilde{\Phi}) = e(\Phi)$ будет следовать из того, что

$$\dim \alpha_j = \dim \beta_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (5.15)$$

Имеем $\alpha_1 = \beta_1$ и $\beta_j = P_1 \dots P_{j-1} \alpha_j$ при $j > 1$. Поэтому равенство (5.15) верно при $j = 1$, а для $j > 1$ нам достаточно показать, что оператор $P_1 \dots P_{j-1}$ является взаимно однозначным на α_j . Допустим, что $P_1 \dots P_{j-1} x = 0$ для некоторого $x \in \alpha_j$. Тогда в силу соотношений (5.2) при $j = 2$ имеем $x \in \alpha_2 \cap \alpha_1^\perp = 0$, а при $j > 2$ имеем $P_2 \dots P_{j-1} x \in \alpha_2 \cap \alpha_1^\perp = 0$. С помощью аналогичных рассуждений получаем, что $x \in \alpha_3 \cap \alpha_2^\perp = 0$ при $j = 3$ и $P_3 \dots P_{j-1} x \in \alpha_3 \cap \alpha_2^\perp = 0$ и т.д. В результате получаем, что $x \in \alpha_j \cap \alpha_{j-1}^\perp = 0$.

Докажем, что $r(\tilde{\Phi}) \leq r(\Phi)$. Для каждого $j = 1, \dots, n$ положим, как и раньше, $\Phi_j = \prod_{k=1}^j (I - 2P_k)$. Тогда $\tilde{\Phi}_j = \prod_{k=1}^j (I - 2\pi_k)$ – плоское решение, отвечающее Φ_j .

²⁾ Оператор $\tilde{\Phi}$ является решением по теореме 1.

Покажем, что $r(\Phi_j) \geq r(\tilde{\Phi}_j)$ для всех $j = 1, \dots, n$. Так как $\alpha_1 = \beta_1$, то $\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1$, тем самым $r(\Phi_1) = r(\tilde{\Phi}_1)$. Предположим, что $r(\tilde{\Phi}_j) \leq r(\Phi_j)$ при $1 \leq j < l$. Покажем, что $r(\tilde{\Phi}_l) \leq r(\Phi_l)$.

Пусть $r_l = r(I - 2\pi_l)$. Поскольку β_l – BPS-подпространство, в силу (2.8) мы имеем

$$\beta_l = \langle R_{\lambda_j}^{q_j-1} \mid 1 \leq j \leq r_l, 1 \leq q_j \leq k_j \rangle$$

для некоторых попарно различных комплексных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_l}$ и некоторых натуральных $k_1, \dots, k_{r_l}$.

В силу доказанного выше оператор $P_1 \dots P_{l-1}: \alpha_l \rightarrow \beta_l$ обратим, и поэтому при $1 \leq j \leq r_l$ существует единственный вектор $x_j \in \alpha_l$ такой, что $P_1 \dots P_{l-1}x_j = R_{\lambda_j}^{k_j-1}$. Векторы $x_1, \dots, x_{r_l}$ линейно независимы. Рассмотрим подпространство

$$\mathcal{L} = \alpha_l^\perp + \langle x_1, \dots, x_{r_l} \rangle.$$

Согласно соотношению (2.5) $r(\Phi_l) = \dim \operatorname{im} \Phi_{l+} \geq \dim \Phi_{l+}\mathcal{L}$. В силу (5.5)

$$\frac{1}{2}\Phi_{l+} = \left[a^*, \sum_{j=1}^l P_j \right] = P_l^\perp \left[a^*, \sum_{j=1}^l P_j \right] = P_l^\perp \left(\left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] + a^* P_l \right). \quad (5.16)$$

Сначала докажем включение $\ker \Phi_{l+} \cap \mathcal{L} \subset \alpha_l^\perp$, из которого следует неравенство $r(\Phi_l) \geq \dim \Phi_{l+}\alpha_l^\perp + r_l$. Возьмем $x \in \ker \Phi_{l+} \cap \mathcal{L}$. Из соотношения (5.16) имеем

$$\left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] x + a^* P_l x \in \alpha_l. \quad (5.17)$$

Согласно равенству (5.5) $[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j]x \in \alpha_{l-1}^\perp$, поэтому, применив к обеим частям (5.17) суперпозицию $P_1 \dots P_{l-1}$, получим

$$P_1 \dots P_{l-1} a^* P_l x \subset P_1 \dots P_{l-1} \alpha_l = \beta_l.$$

Учитывая формулу (5.12), заключаем, что $a^* P_1 \dots P_l x \in \beta_l$.

Так как $x \in \mathcal{L}$,

$$P_l x \in \langle x_1, \dots, x_{r_l} \rangle, \quad P_1 \dots P_l x \in \langle R_{\lambda_j}^{k_j-1} \mid 1 \leq j \leq r_l \rangle,$$

в частности, $P_1 \dots P_l x = 0$ тогда и только тогда, когда $P_l x = 0$. Имеем

$$a^* \prod_{j=1}^l P_j x \in \left\langle a^* \prod_{j=1}^l P_j x_q \mid 1 \leq q \leq r_l \right\rangle.$$

Из соотношений

$$a^* \prod_{i=1}^l P_i x_q = a^* R_{\lambda_q}^{k_q-1} = R_{\lambda_q}^{k_q} + \bar{\lambda}_q R_{\lambda_q}^{k_q-1}, \quad a^* \prod_{i=1}^l P_i x \in \beta_l$$

вытекает $a^* \prod_{i=1}^l P_i x = 0$, следовательно, $\prod_{i=1}^l P_i x = 0$ и $P_l x = 0$, т. е. $x \in \alpha_l^\perp$.

Далее, покажем, что $\dim \Phi_{l+} \alpha_l^\perp = r(\Phi_{l-1})$. Тогда по предположению индукции и с учетом доказанного выше получим, что

$$r(\Phi_l) \geq r_l + r(\Phi_{l-1}) \geq r_l + r(\tilde{\Phi}_{l-1}) = r(\tilde{\Phi}_l)$$

(последнее равенство следует из теоремы 1).

Согласно (5.4)

$$\left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] \alpha_l^\perp = \operatorname{im} \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right].$$

Применяя формулу (5.16), получаем

$$\frac{1}{2} \Phi_{l+} \alpha_l^\perp = P_l^\perp \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] \alpha_l^\perp = \operatorname{im} P_l^\perp \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right].$$

Поскольку

$$r(\Phi_{l-1}) = \dim \operatorname{im}(\Phi_{l-1})_+ = \dim \operatorname{im} \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] \geq \dim \operatorname{im} P_l^\perp \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right],$$

достаточно показать, что

$$\ker P_l^\perp \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] = \ker \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right].$$

Последнее вытекает из условий (5.2):

$$P_l^\perp \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] z = 0 \implies \left[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j \right] z \in \alpha_l.$$

Но $\operatorname{im} [a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j] \subset \alpha_{l-1}^\perp$, следовательно, $[a^*, \sum_{j=1}^{l-1} P_j] z \in \alpha_l \cap \alpha_{l-1}^\perp = 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Phi \in M_0$ – решение. Тогда

$$r(\Phi) \geq u(\Phi), \quad e(\Phi) \geq \frac{u(\Phi)(u(\Phi) + 1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u(\Phi) = 0$, то $\Phi = I$ и $r(\Phi) = e(\Phi) = 0$. Теперь пусть $n = u(\Phi) \geq 1$. Рассмотрим плоское решение $\tilde{\Phi}$, отвечающее Φ . По теореме 5 мы имеем $r(\Phi) \geq r(\tilde{\Phi})$, $e(\Phi) = e(\tilde{\Phi})$, $u(\Phi) = u(\tilde{\Phi}) = n$.

Решение $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, откуда получаем неравенства

$$r(\tilde{\Phi}) \geq n, \quad e(\tilde{\Phi}) \geq \frac{n(n-1)}{2} + r(\tilde{\Phi}) \geq \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следовательно, $r(\Phi) \geq n$ и $e(\Phi) \geq n(n+1)/2$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00495_а).

Список литературы

- [1] O. Lechtenfeld, A. D. Popov, *JHEP*, **11** (2001), 40, 32 pp., arXiv: hep-th/0106213.
- [2] A. V. Domrin, O. Lechtenfeld, S. Petersen, *JHEP*, **03** (2005), 045, 34 pp., arXiv: hep-th/0412001.
- [3] А. В. Домрин, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 220–239.
- [4] А. В. Домрин, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 307–327.
- [5] А. В. Домрина, *Тр. МИАН*, **279** (2012), 72–80.
- [6] M. J. Ferreira, B. A. Simões, J. C. Wood, *Math. Z.*, **266**:4 (2010), 953–978.
- [7] K. Uhlenbeck, *J. Differential Geom.*, **30**:1 (1989), 1–50.

Поступила в редакцию 10.09.2013