Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зенчук, Решения многомерных уравнений в частных производных, представимых в виде одномерного потока, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 3, 346–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:49:42

© 2014 г.

А. И. Зенчук*

РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА

Предложен алгоритм, с помощью которого $(M + 1)$ -мерное нелинейное уравнение в частных производных, представимое в виде одномерного потока, $u_t + w_{x_1}(u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0$ (где w – произвольная локальная функция от u и ее производных по x_i , $i = 1, \dots, M$), сводится к семейству M -мерных нелинейных уравнений в частных производных $F(u, w) = 0$, где F – общее (или частное) решение некоторого двумерного нелинейного уравнения в частных производных второго порядка. В частности, M -мерное уравнение может оказаться обыкновенным дифференциальным уравнением, которое в некоторых случаях может быть проинтегрировано с получением явных решений исходного $(M + 1)$ -мерного уравнения. Кроме того, можно ввести спектральный параметр в функцию F , что приводит к линейному спектральному уравнению, связанному с исходным уравнением. Представлены простейшие примеры нелинейных уравнений в частных производных вместе с их явными решениями.

Ключевые слова: метод характеристик, теория интегрируемости, граничные условия, частные решения, редукции низшей размерности.

DOI: 10.4231/tmf8597

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что метод характеристик [1] позволяет интегрировать уравнения в частных производных первого порядка произвольной размерности. Этот метод оказался полезным и при изучении $(1+1)$ -мерных систем гидродинамического типа, для которых была разработана модификация этого метода (обобщенный метод годографа) [2]–[5]. Однако введение производных более высокого порядка в нелинейное уравнение либо разрушает интегрируемость, либо требуется другой метод интегрирования. Например, $(1+1)$ -мерное уравнение Бюргерса без вязкости представляет собой простейшее нелинейное уравнение, полностью интегрируемое методом характеристик:

$$u_t - uu_x = 0. \quad (1)$$

*Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия.
E-mail: zenchuk@itp.ac.ru

Добавляя производную второго порядка в это уравнение, получим хорошо известное $(1+1)$ -мерное уравнение Бюргерса с вязкостью:

$$u_t + u_{xx} - uu_x = 0. \quad (2)$$

Это уравнение также полностью интегрируемо, хотя требует применения другого подхода. А именно, оно линеаризуется подстановкой Хопфа–Кола [6]–[8]. Однако уравнение Бюргерса с вязкостью более высокой размерности не может быть полностью проинтегрировано с помощью линеаризации, так что для его исследования необходим другой подход. Например, его решения, разрушающиеся за конечный промежуток времени, изучались методом ренормализационных групп в работах [9], [10]. Далее, вводя производную третьего порядка в уравнение (1), получим уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t + u_{xxx} - uu_x = 0, \quad (3)$$

интегрируемое методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [11]–[16], который является еще одним плодотворным методом интегрирования большого класса нелинейных уравнений в частных производных.

В работе [17] показано, что, деформируя характеристику $(1+1)$ -мерного уравнения (1), можно получить семейство частных решений для большого класса $(M+1)$ -мерных нелинейных эволюционных уравнений высокого порядка с нелинейностью типа нелинейности уравнения КдФ, которое описывается M - или $(M-1)$ -мерным нелинейным уравнением. В частности, существует класс $(2+1)$ -мерных уравнений в частных производных, решения которых удовлетворяют соответствующим обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), которые, в свою очередь, могут иметь явные решения.

В настоящей работе мы обобщаем алгоритм, предложенный в статье [17], на уравнения, представимые в виде одномерного потока:

$$u_t + w_{x_1}(u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (4)$$

где w – произвольная локальная функция u и ее производных по x_i , $i = 1, \dots, M$, M – число переменных x_i в списке $x = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$. Мы покажем, что это уравнение обладает большим многообразием решений, описываемых уравнением $F(u, w) = 0$ (или $F(x_1 + ut, w) = 0$), где F удовлетворяет некоторому двумерному уравнению в частных производных второго порядка. Это уравнение справедливо для любого нелинейного $(M+1)$ -мерного уравнения, представимого в виде (4). Мы приведем простейшие примеры уравнений вместе с их решениями.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 рассматривается нелинейное уравнение (4) с $w = -u^2/2 + f(u_x, u_{xx}, \dots)$, частные решения которого зависят от характеристики уравнения (1). Уравнение (4) с произвольным w рассматривается в разделе 3. В этом случае решения уравнения не зависят от характеристики уравнения (1). Уравнение в частных производных второго порядка для функции F обсуждается в разделе 4. Спектральное уравнение для нелинейного уравнения (4) получено в разделе 5, где также обсуждается полнота пространства решений. Частные случаи уравнения $F = 0$, имеющего явные решения, представлены в разделе 6. Выводы приводятся в разделе 7.

2. УРАВНЕНИЕ $u_t - uu_{x_1} + f(u_x, u_{xx}, \dots) = 0$

В этом разделе предложен алгоритм построения семейства M -мерных редукций для нелинейного уравнения, представимого в виде (4) с функцией w , имеющей частный вид

$$w = -\frac{1}{2}u^2 + f(u_x, u_{xx}, \dots), \quad (5)$$

что обобщает уравнения, рассмотренные в работе [17]. Здесь f – произвольная функция от производных u любого порядка по x_i , $i = 1, \dots, M$, но не зависящая от u . Заметим, что полную частную производную w_{x_1} можно представить в виде

$$w_{x_1} = Qu_{x_1}, \quad (6)$$

где Q – дифференциальный оператор

$$Q = -u + \sum_{i=1}^M f_{u_{x_i}} \partial_{x_i} + \sum_{i_1, i_2=1}^M f_{u_{x_{i_1} x_{i_2}}} \partial_{x_{i_1} x_{i_2}} + \dots \quad (7)$$

Это позволяет представить уравнение (4) в виде

$$E(u) = u_t + Qu_{x_1} = 0. \quad (8)$$

Важно, что функция w удовлетворяет линейному уравнению

$$E(w) = w_t + Qw_{x_1} = 0, \quad (9)$$

которое можно вывести непосредственно. В дальнейшем нам понадобится следующее очевидное соотношение между $E(u)$ и $E(w)$:

$$E(w) = QE(u), \quad (10)$$

которое можно вывести, применив оператор Q к уравнению (8) и используя соотношение (6) вместе с $Qu_t = w_t$. Семейство M -мерных редукций уравнения (4) с w в виде (5) строится с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция u является решением нелинейного M -мерного уравнения

$$F(\xi, w) = 0, \quad \xi = x_1 + tu, \quad (11)$$

где функция $F(\xi, w)$ удовлетворяет двумерному уравнению второго порядка

$$F_{\xi\xi} + F_{ww} \frac{F_{\xi}^2}{F_w^2} - 2F_{\xi w} \frac{F_{\xi}}{F_w} = M(F, \xi, w), \quad \xi = tu + x_1, \quad F_w|_{F=0} \neq 0. \quad (12)$$

Здесь M – некоторая функция от F , ξ , w , удовлетворяющая условию

$$M(F, \xi, w)|_{F=0} = 0. \quad (13)$$

Тогда функция ψ ,

$$\psi \equiv E(u) = u_t + w_{x_1}, \quad (14)$$

является решением линейного уравнения

$$(F_\xi t + F_w Q)\psi = 0. \quad (15)$$

Если, кроме того, функция ψ удовлетворяет нулевым граничным условиям, то функция ψ является решением нелинейного уравнения (4) с w вида (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы вывести нелинейное уравнение (4) из уравнения (11), мы, прежде всего, продифференцируем уравнение (11) по x_i и t :

$$E_{x_1} := F_\xi(1 + tu_{x_1}) + F_w w_{x_1} = 0, \quad (16)$$

$$E_{x_i} := F_\xi(tu_{x_i}) + F_w w_{x_i} = 0, \quad i > 1, \quad (17)$$

$$E_t := F_\xi(u + tu_t) + F_w w_t = 0. \quad (18)$$

Если $F_\xi|_{F=0} = F_w|_{F=0} = 0$, то уравнения (16)–(18) становятся тождествами. Предположим, что $F_w|_{F=0} \neq 0$ (случай $F_\xi|_{F=0} \neq 0$ может быть рассмотрен аналогичным образом). Тогда, решая уравнения (16) и (17) относительно w_{x_1} и w_{x_i} ($i > 1$) соответственно, получим:

$$w_{x_i} = -\frac{F_\xi}{F_w}(\delta_{1i} + tu_{x_i}), \quad i \geq 1. \quad (19)$$

Рассмотрим вторые производные уравнения (11) по произвольным парам x_i, x_j и подставим выражение (19) для производных w_{x_i} , $i \geq 1$:

$$F_\xi tu_{x_i x_j} + F_w w_{x_i x_j} + (\delta_{1i} + tu_{x_i})(\delta_{1j} + tu_{x_j}) \left(F_{\xi\xi} + F_{ww} \frac{F_\xi^2}{F_w^2} - 2F_{\xi w} \frac{F_\xi}{F_w} \right) = 0. \quad (20)$$

Если F удовлетворяет нелинейному уравнению (12), то последний член в уравнении (20) исчезает, в результате уравнение (20) сводится к виду

$$F_\xi tu_{x_i x_j} + F_w w_{x_i x_j} = 0. \quad (21)$$

Решая это уравнение относительно $w_{x_i x_j}$, получим связь между вторыми производными функций w и u :

$$w_{x_i x_j} = -\frac{F_\xi}{F_w} tu_{x_i x_j}. \quad (22)$$

По индукции получим для производной любого порядка $D = \prod_{i=1}^M \partial_{x_i}^{n_i}$ (где n_i – произвольные целые числа) следующее соотношение:

$$F_\xi t Du + F_w Dw = 0. \quad (23)$$

Следовательно, для дифференциального оператора $\tilde{Q} = Q + u$ (с оператором Q вида (7)) можно написать

$$E_{\tilde{Q}} := F_\xi t \tilde{Q} u_{x_1} + F_w \tilde{Q} w_{x_1} = 0. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим следующую комбинацию уравнений (16), (18), (24):

$$E_t - u E_{x_1} + E_{\tilde{Q}} = 0, \quad (25)$$

имеющую вид

$$F_{\xi} t E(u) + F_w E(w) = 0. \quad (26)$$

В силу соотношения (10) можно переписать уравнение (26) в виде уравнения (15) с функцией ψ вида (14). Если ψ удовлетворяет нулевым граничным условиям, то $\psi \equiv E(u) \equiv 0$, что эквивалентно уравнению (4) с функцией w , заданной выражением (5). Теорема доказана.

Теперь следует сделать несколько замечаний.

1. Область определения переменных x_i , $i = 1, \dots, M$, может быть как ограниченной, так и неограниченной.

2. Для частного выбора функции F ,

$$F(\xi, w) = \xi + w, \quad (27)$$

уравнение (11) преобразуется к виду, рассмотренному в работе [17].

3. Если функция u является решением системы (4), (5) и (11), причем $F_w|_{F=0} \neq 0$, то она удовлетворяет уравнению

$$u_t - \frac{F_{\xi}}{F_w}(1 + tu_{x_1}) = 0. \quad (28)$$

В частности, если функция F берется в виде (27), то уравнение (28) принимает вид

$$u_t = tu_{x_1} + 1, \quad (29)$$

полученный в работе [17]. Для вывода уравнения (28) нужно продифференцировать уравнение (11) по x_1 , решить полученное уравнение относительно w_{x_1} и подставить в уравнение (4).

4. Поскольку дифференциальный оператор Q (7) зависит от функции f в выражении (5) для функции w , нулевые граничные условия, налагаемые на функцию ψ (14), полностью определяются вышеупомянутой функцией f и не зависят от частного вида функции $F(\xi, w)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в качестве примера нелинейное уравнение

$$u_t + u_{x_1 x_2} - uu_{x_1} + \alpha(u_{x_2}^2)_{x_1} = 0, \quad (30)$$

которое можно считать деформацией уравнения

$$u_t + u_{x_1 x_2} - uu_{x_1} = 0, \quad (31)$$

рассмотренного в работе [17]. В этом случае

$$w = u_{x_2} - \frac{u^2}{2} + \alpha u_{x_2}^2. \quad (32)$$

Используя выражение (27) в качестве простого решения уравнения (12) с $M = 0$, перепишем уравнение (11) в виде

$$u_{x_2} + \alpha u_{x_2}^2 = \frac{u^2}{2} - tu - x_1. \quad (33)$$

Решая это уравнение относительно u_{x_2} , получим

$$u_{x_2} = -\frac{1}{2\alpha} (1 \pm \sqrt{1 + 2\alpha(u^2 - 2(tu + x_1))}). \quad (34)$$

Интегрирование этого ОДУ приводит к функции u в следующем неявном виде:

$$h_{\pm}(u, x_1, t) = C(x_1, t) + x_2, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} h_{\pm}(u, x_1, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \left(\ln \frac{\sqrt{\eta} - u + t}{\sqrt{\eta} + u - t} \pm \ln \frac{\sqrt{\eta} - u + t}{\sqrt{\eta} + u - t} \pm \right. \\ & \pm \ln \frac{2\alpha(\eta + \sqrt{\eta}(u - t)) - \sqrt{2\alpha(u - t)^2 - 2\alpha\eta + 1} - 1}{2\alpha(\eta - \sqrt{\eta}(u - t)) - \sqrt{2\alpha(u - t)^2 - 2\alpha\eta + 1} - 1} \Big) \pm \\ & \left. \pm \sqrt{2\alpha} \ln(\sqrt{2\alpha}(u - t) + \sqrt{2\alpha(u - t)^2 - 2\alpha\eta + 1}), \right. \end{aligned} \quad (36)$$

при этом

$$\eta = t^2 + 2x_1. \quad (37)$$

Здесь функция C не может быть произвольной, поскольку должна удовлетворять нулевому граничному условию для функции ψ ,

$$\psi = u_t + u_{x_1x_2} - uu_{x_1} + \alpha(u_{x_2}^2)_{x_1}, \quad (38)$$

рассматриваемой в качестве решения уравнения (15) с $F_{\xi} = F_w = 1$ и одномерным дифференциальным оператором первого порядка $Q = ((1 + 2\alpha u_{x_2})\partial_{x_2} - u)$. Таким образом, нам нужно одно граничное условие в точке, например $x_2 = 0$:

$$\psi|_{x_2=0} = 0, \quad \text{при этом} \quad u|_{x_2=0} = \chi(x_1, t). \quad (39)$$

Записав уравнение (29) в точке $x_2 = 0$, получим

$$\chi_t = t\chi_{x_1} + 1. \quad (40)$$

Таким образом,

$$\chi = A(\eta) + t. \quad (41)$$

Подставляя χ из (41) в (35), (36) с $x_2 = 0$, приходим к выводу, что C является функцией только от η . Это, в свою очередь, позволяет считать $C(\eta)$ произвольной функцией η в уравнении (35), а граничное условие (39) следует считать неявным определением функции $A(\eta)$ через функцию $C(\eta)$:

$$\begin{aligned} C(\eta) = h_{\pm}(A(\eta) + t, x_1, t) \Rightarrow \\ C(\eta) = & \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \left(\ln \frac{\sqrt{\eta} - A(\eta)}{\sqrt{\eta} + A(\eta)} \pm \ln \frac{\sqrt{\eta} - A(\eta)}{\sqrt{\eta} + A(\eta)} \pm \right. \\ & \pm \ln \frac{2\alpha(\eta + \sqrt{\eta}A(\eta)) - \sqrt{2\alpha A^2(\eta) - 2\alpha\eta + 1} - 1}{2\alpha(\eta - \sqrt{\eta}A(\eta)) - \sqrt{2\alpha A^2(\eta) - 2\alpha\eta + 1} - 1} \Big) \pm \\ & \left. \pm \sqrt{2\alpha} \ln(\sqrt{2\alpha}A(\eta) + \sqrt{2\alpha A^2(\eta) - 2\alpha\eta + 1}). \right. \end{aligned} \quad (42)$$

Если $\alpha \ll 1$, то разложение выражения (36) по степеням α (до линейного по α члена) имеет вид

$$h_+ = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \ln \frac{\sqrt{\eta} - u + t}{\sqrt{\eta} + u - t} + \sqrt{2\alpha} \ln 2 + \alpha(u - t) + o(\alpha), \quad (43)$$

$$h_- = -\alpha(u - t) - \sqrt{2\alpha} \ln 2 + o(\alpha). \quad (44)$$

Таким образом, решение u , соответствующее h_- в уравнении (35), становится сингулярным при $\alpha \rightarrow 0$. Решение u , соответствующее h_+ , можно представить в виде

$$u = u_1 + \frac{\alpha}{2}(C_2(\eta) - u_1)(u_1^2 - \eta) + o(\alpha), \quad (45)$$

где u_1 – решение уравнения (31), полученное в работе [17]:

$$u_1 = t + \sqrt{\eta} \frac{1 + \widehat{C}(\eta)e^{x_2\sqrt{\eta}}}{1 - \widehat{C}(\eta)e^{x_2\sqrt{\eta}}}, \quad \widehat{C}(\eta) = e^{(C_1(\eta) - \sqrt{2\alpha} \ln 2)\sqrt{\eta}}, \quad (46)$$

а произвольная функция $C(\eta)$ в выражении (35) представлена в виде $C(\eta) = C_1(\eta) + \alpha C_2(\eta)$. Рассматривая решения с конечными асимптотиками при $t \rightarrow \infty$, заметим, что $u_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, если $C_2(\eta) = \tilde{C}_2(\eta)/\eta$ и $\tilde{C}_2(\eta) \rightarrow c_2 = \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$, то $u \rightarrow -\alpha c_2/2$ при $t \rightarrow \infty$. Если же $C_2(\eta) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $u \rightarrow 0$ (вплоть до $o(\alpha)$).

3. УРАВНЕНИЕ (4) С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ w

Теперь изменим алгоритм, изложенный в разделе 2, с целью построения решений уравнения (4) более общего вида, в котором w – произвольная функция от u и ее производных по x_i , $i = 1, \dots, M$. Перепишем уравнение (4) в виде (8), в котором линейный дифференциальный оператор Q представлен выражением

$$Q = w_u + \sum_{i=1}^M w_{u_{x_i}} \partial_{x_i} + \sum_{i_1, i_2=1}^M w_{u_{x_{i_1} x_{i_2}}} \partial_{x_{i_1} x_{i_2}} + \dots \quad (47)$$

Важно, что функция w удовлетворяет линейному уравнению (9) с Q вида (47). Соотношение (10) также справедливо.

Семейство M -мерных редукций уравнения (4) можно построить с помощью следующей теоремы, аналогичной теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция u является решением нелинейного M -мерного уравнения

$$F(u, w) = 0, \quad (48)$$

где функция $F(u, w)$ удовлетворяет уравнению

$$F_{uu} + F_{ww} \frac{F_u^2}{F_w^2} - 2F_{uw} \frac{F_u}{F_w} = M(F, u, w), \quad F_w|_{F=0} \neq 0, \quad (49)$$

а M – некоторая функция от F , u , w , удовлетворяющая условию

$$M(F, u, w)|_{F=0} = 0. \quad (50)$$

Тогда функция ψ ,

$$\psi \equiv E(u) = u_t + w_{x_1}, \quad (51)$$

является решением линейного уравнения

$$(F_u + F_w Q)\psi = 0. \quad (52)$$

Если, кроме того, функция ψ удовлетворяет нулевым граничным условиям, тогда u – решение нелинейного уравнения (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 1. Чтобы вывести нелинейное уравнение (4) из уравнения (48), продифференцируем уравнение (48) по x_i и t :

$$E_{x_i} := F_u u_{x_i} + F_w w_{x_i} = 0, \quad i > 1, \quad (53)$$

$$E_t := F_u u_t + F_w w_t = 0. \quad (54)$$

Если $F_w|_{F=0} = F_u|_{F=0} = 0$, то уравнения (53), (54) становятся тождествами. Предположим, что $F_w|_{F=0} \neq 0$ (случай $F_u|_{F=0} \neq 0$ может быть рассмотрен аналогичным образом). Тогда из уравнения (53) получим

$$w_{x_i} = -\frac{F_u}{F_w} u_{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (55)$$

Рассмотрим вторые производные уравнения (48) по произвольным парам x_i, x_j и подставим выражение (55) для w_{x_i} , $i \geq 1$:

$$F_u u_{x_i x_j} + F_w w_{x_i x_j} + u_{x_i} u_{x_j} \left(F_{uu} + F_{ww} \frac{F_u^2}{F_w^2} - 2F_{uw} \frac{F_u}{F_w} \right) = 0. \quad (56)$$

Если F удовлетворяет нелинейному уравнению (49), тогда из уравнения (56) получим

$$F_u u_{x_i x_j} + F_w w_{x_i x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{x_i x_j} = -\frac{F_u}{F_w} u_{x_i x_j}. \quad (57)$$

По индукции для производной любого порядка $D = \prod_{i=1}^M \partial_{x_i}^{n_i}$, где n_i – произвольные целые числа, получим соотношение

$$F_u Du + F_w Dw = 0. \quad (58)$$

Следовательно, для дифференциального оператора Q (47) имеем

$$E_Q := F_u Qu_{x_1} + F_w Qw_{x_1} = 0. \quad (59)$$

Теперь рассмотрим следующую комбинацию уравнений (54), (59):

$$E_t + E_Q = 0, \quad (60)$$

имеющую вид

$$F_u E(u) + F_w E(w) = 0. \quad (61)$$

В силу соотношения (10) можно переписать уравнение (61) в виде (52), где функция ψ представлена выражением (51). Если, кроме того, ψ удовлетворяет нулевым граничным условиям, то $\psi \equiv E(u) \equiv 0$, что эквивалентно уравнению (4). Теорема доказана.

Теперь следует сделать несколько замечаний, аналогичных замечаниям раздела 2.

1. Область определения переменных x_i , $i = 1, \dots, M$, может быть как ограниченной, так и неограниченной.

2. Уравнение (49) эквивалентно уравнению (12) с точностью до переобозначений $\xi \leftrightarrow u$.

3. Если функция u удовлетворяет уравнениям (4) и (48), причем $F_w|_{F=0} \neq 0$, то она удовлетворяет уравнению

$$u_t - \frac{F_u}{F_w} u_{x_1} = 0. \quad (62)$$

В частности, если функцию F взять в виде $F = u + w$, то из уравнения (28) получим

$$u_t = u_{x_1}. \quad (63)$$

Чтобы получить уравнение (62), нужно продифференцировать уравнение (48) по x_1 , решить полученное уравнение относительно w_{x_1} и подставить полученное w_{x_1} в уравнение (4).

4. Поскольку дифференциальный оператор Q (47) определяется функцией w из уравнения (4), то нулевые граничные условия для функции ψ (51) полностью определяются указанной функцией w и не зависят от частного выбора функции $F(u, w)$.

ПРИМЕР 2. В качестве примера рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_t + u_{x_1 x_2} - (u^3)_{x_1} = 0. \quad (64)$$

В этом случае

$$w = u_{x_2} - u^3. \quad (65)$$

Уравнение (49) имеет простое решение ($M = 0$)

$$F(u, w) = w - \gamma_1 u - \gamma_0, \quad (66)$$

соответствующее редукции $u_t = -\gamma_1 u_{x_1}$ в уравнении (4). При этом уравнение (48) принимает вид

$$u_{x_2} = u^3 + \gamma_1 u + \gamma_0. \quad (67)$$

Интегрируя ОДУ (67), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \ln(u - u_1) + \frac{1}{(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)} \ln(u - u_2) + \\ & + \frac{1}{(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)} \ln(u - u_3) = x_2 + C(x_1, t), \end{aligned} \quad (68)$$

где u_1 , u_2 и u_3 — корни полиномиального уравнения

$$u^3 + \gamma_1 u + \gamma_0 = 0. \quad (69)$$

В частности, если $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = -1$, то, проинтегрировав уравнения (67), получим

$$u^2 = \frac{1}{1 + \tilde{C}(x_1, t)e^{2x_2}}. \quad (70)$$

Функция C (или $\tilde{C}$) не может быть произвольной, поскольку должна удовлетворять нулевому граничному условию для функции ψ ,

$$\psi = u_t + u_{x_1 x_2} - (u^3)_{x_1}, \quad (71)$$

рассматриваемой в качестве решения линейного уравнения первого порядка (52) с $F_u = -\gamma_1$, $F_w = 1$ и $Q = \partial_{x_2} - 3u^2$. Итак, существует единственное граничное условие в точке, например $x_2 = 0$:

$$\psi|_{x_2=0} = 0, \quad \text{при этом } u|_{x_2=0} = \chi(x_1, t). \quad (72)$$

Выпишем уравнение (62) с F в виде (66) в граничной точке $x_2 = 0$:

$$\chi_t + \gamma_1 \chi_{x_1} = 0. \quad (73)$$

Таким образом,

$$\chi = A(\eta), \quad (74)$$

где

$$\eta = x_1 - \gamma_1 t. \quad (75)$$

Подставляя χ из уравнения (74) в уравнения (68) и (70) при $x_2 = 0$, замечаем, что функции C и $\tilde{C}$ должны зависеть от одной переменной η . Итак, C и $\tilde{C}$ можно считать произвольными функциями переменной η в уравнениях (68) и (70), а граничное условие (72) следует считать определением функции $A(\eta)$ через $C(\eta)$ или $\tilde{C}(\eta)$:

$$C(\eta) = \frac{1}{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \ln(A(\eta) - u_1) + \frac{1}{(u_2 - u_2)(u_2 - u_3)} \ln(A(\eta) - u_2) + \\ + \frac{1}{(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)} \ln(A(\eta) - u_3) \quad (76)$$

и

$$A^2(\eta) = \frac{1}{1 + \tilde{C}(\eta)e^{2x_2}}. \quad (77)$$

Если $\tilde{C}$ – ограниченная положительная функция своего аргумента, то решение (70) – ограниченное решение уравнения (64).

4. О РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (12) И (49)

Итак, мы свели $(M + 1)$ -мерное уравнение (4) к M -мерному уравнению (11) (если w имеет вид (5)) или (48) (которое справедливо для любого w), где F удовлетворяет двумерному уравнению второго порядка, уравнению (12) или (49) соответственно. Уравнения (11), (12) эквивалентны уравнениям (48), (49) с точностью до переобозначений $\xi \leftrightarrow u$. Совместим их в следующей паре уравнений:

$$F(p, q) = 0 \quad (78)$$

и

$$F_{pp}F_q^2 + F_{qq}F_p^2 - 2F_{pq}F_pF_q = \mathcal{M}(F, p, q), \quad (79)$$

симметричной по отношению к переменным p и q . Переменную p возьмем вместо ξ или u , а переменную q – вместо w . Кроме того, функция $\mathcal{M}$ должна удовлетворять условию

$$\mathcal{M}(F, p, q)|_{F(p,q)=0} = 0. \quad (80)$$

Уравнение (79) можно считать условием совместности $(M+1)$ -мерного уравнения (4) и M -мерного уравнения (78). В разделах 2 и 3 рассмотрены примеры частных решений нелинейного уравнения (4), связанные с простейшим решением уравнения (79). Однако это уравнение обладает богатым многообразием решений, параметризованных двумя произвольными функциями одной переменной, и заслуживает подробного изучения, которое не проводится в настоящей статье. Отметим только, что уравнение (79) с $\mathcal{M} = 0$ линейризуется преобразованием Лежандра и его общее решение было найдено. Однако для такой функции F уравнение (78) всегда сводится к линейной зависимости между p и q (см. ниже пример 3) и не представляет для нас интереса. Общий случай $\mathcal{M} \neq 0$ остается более обещающим.

Ниже рассмотрены только три частных решения уравнения (79) в виде вырожденной функции переменных p и q

$$F(p, q) = \sum_i f_i(p)g_i(q). \quad (81)$$

ПРИМЕР 3. Простейшее решение имеет вид

$$F = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 q, \quad (82)$$

где α_i , $i = 0, 1, 2$, – произвольные постоянные параметры. Именно это решение используется в примере 1 ($\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) и примере 2 ($\alpha_0 = -\gamma_0$, $\alpha_1 = -\gamma_1$, $\alpha_2 = 1$). В этом случае $\mathcal{M} = 0$ в уравнении (79).

Отметим, что локальное линейное разложение функции $F(p, q)$ в окрестности фиксированной точки (p_0, q_0) имеет вид (предполагается существование первых производных функции F в этой точке)

$$F(p, q) \approx F(p_0, q_0) + F_p(p_0, q_0)(p - p_0) + F_q(p_0, q_0)(q - q_0), \quad (83)$$

что совпадает с выражением (82), если $\alpha_0 = F(p_0, q_0) - F_p(p_0, q_0)p_0 - F_q(p_0, q_0)q_0$, $\alpha_1 = F_p(p_0, q_0)$, $\alpha_2 = F_q(p_0, q_0)$. Следовательно, функция (82) отвечает за локальную разрешимость уравнения (4).

ПРИМЕР 4. В качестве следующего решения предлагается функция

$$F = e^{\alpha p} + c_2 e^{\beta p + c_1 q} + c_3 e^{\alpha c_1 q / (\alpha - \beta)}, \quad (84)$$

где α , β , c_i , $i = 1, 2, 3$, – произвольные параметры. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= a_1 F + a_2 F^2, \\ a_1 &= - \left(\frac{\alpha c_1}{\alpha - \beta} ((\alpha - \beta) c_2 e^{\beta p + c_1 q} + \alpha c_3 e^{\alpha c_1 q / (\alpha - \beta)}) \right)^2, \\ a_2 &= (\alpha c_1)^2 \left(c_2 e^{\beta p + c_1 q} + \frac{\alpha^2 c_3}{(\alpha - \beta)^2} e^{\alpha c_1 q / (\alpha - \beta)} \right). \end{aligned} \quad (85)$$

ПРИМЕР 5. Приведем еще один пример решения уравнения (79):

$$F = e^{2p} + 2e^{p+qc_1/2} \sqrt{c_2} \sin(qc_3 + c_4) + e^{qc_1} c_2, \quad (86)$$

где c_i , $i = 1, 2, 3, 4$, – произвольные параметры. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (a_1 + a_2 e^p) F + (a_3 + a_4 e^p) F^2, \\ a_1 &= -4e^{2qc_1} c_2^2 (c_1 \cos(qc_3 + c_4) - 2c_3 \sin(qc_3 + c_4))^2, \\ a_2 &= -2e^{3qc_1/2} c_2^{3/2} (4c_1 c_3 \cos(3(qc_3 + c_4)) + \\ &\quad + 2(c_1^2 + 2c_3^2 + (c_1^2 - 4c_3^2) \cos(2(qc_3 + c_4))) \sin(qc_3 + c_4)), \\ a_3 &= 4e^{qc_1} c_2 (c_1 \cos(qc_3 + c_4) - 2c_3 \sin(qc_3 + c_4))^2, \\ a_4 &= -2e^{qc_1/2} \sqrt{c_2} (4c_1 c_3 \cos(qc_3 + c_4) + (c_1^2 - 4c_3^2) \sin(qc_3 + c_4)). \end{aligned} \quad (87)$$

5. СПЕКТРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ (4)

Пространство решений можно расширить введением произвольных параметров (так называемых спектральных параметров) в функцию F , которые можно ввести с помощью функции $\mathcal{M}$ в правой части уравнения (79). Эти параметры появляются в решении (84) (параметры α , β , c_i , $i = 1, 2, 3$) и в решении (86) (параметры c_i , $i = 1, 2, 3, 4$). Кроме того, произвольные функции одной переменной (обозначим их $C_i(q)$, $i = 1, 2$) появляются в процессе интегрирования двумерного нелинейного уравнения второго порядка (79). Назовем векторным спектральным параметром λ набор всех произвольных параметров и используем его следующим образом.

Вместо переменной w (которая зависит от функции u и ее производных по x) в списке аргументов функции F будем использовать другую переменную $W(\lambda, C_1, C_2)$, связанную с w интегральным выражением

$$w(u, u_x, u_{xx}, \dots) = \int DC_1 DC_2 \int d\Omega(\lambda) W(\lambda, C_1, C_2), \quad (88)$$

где Ω – некоторая мера в пространстве векторного параметра λ , а $\int DC_1 DC_2$ означает функциональное интегрирование по отношению к функциям C_i , $i = 1, 2$. Это уравнение следует рассматривать как уравнение для функции u , не зависящей от λ . Теперь мы должны заменить уравнения (11) и (48) соответственно уравнениями

$$F(\xi, W(\lambda, C_1, C_2), \lambda) = 0, \quad (89)$$

$$F(u, W(\lambda, C_1, C_2), \lambda) = 0. \quad (90)$$

Эти уравнения нужно решить относительно W . Применяя алгоритм, использованный в разделах 2 и 3, выведем уравнения

$$F_\xi t E(u) + F_W E(W) = 0, \quad (91)$$

$$F_u E(u) + F_W E(W) = 0 \quad (92)$$

вместо уравнений (26) и (61) соответственно. Здесь

$$E(W) = W_t + QW_{x_1}. \quad (93)$$

Разделим уравнения (91) и (92) на F_W и применим оператор $\int DC_1 DC_2 \int d\Omega(\lambda)$. В силу соотношений (88) и (10) получим

$$\left(\int DC_1 DC_2 \int d\Omega(\lambda) \frac{F_{\xi t}}{F_W} + Q \right) \psi = 0, \quad (94)$$

$$\left(\int DC_1 DC_2 \int d\Omega(\lambda) \frac{F_u}{F_W} + Q \right) \psi = 0. \quad (95)$$

Заметим, что Q и ψ различны в уравнениях (94) и (95) (см. (7), (14) и (47), (51) соответственно). Теперь можно использовать нулевые граничные условия, о которых говорится в теоремах 1 и 2. Окончательно, решая уравнение (88) для функции u с указанными граничными условиями, мы получим решение исходного $(M+1)$ -мерного уравнения.

Вернемся теперь к уравнениям (91) и (92). Поскольку найденная функция u является решением исходного уравнения в частных производных, первые слагаемые в уравнениях (91) и (92) исчезают. Следовательно, поскольку $F_W \neq 0$, получим линейное уравнение для спектральной функции $W(\lambda)$:

$$W_t(\lambda, C_1, C_2) + QW_{x_1}(\lambda, C_1, C_2) = 0. \quad (96)$$

Это уравнение можно считать спектральным для нелинейного уравнения (4). Подчеркнем, что, в отличие от МОЗР, у нас есть только одно спектральное уравнение, связанное с данным нелинейным уравнением. Следовательно, уравнение (4) не является условием совместности для некоторой переопределенной системы линейных уравнений.

5.1. О полноте пространства решений $(M+1)$ -мерного уравнения (4). Богатство пространства решений $(M+1)$ -мерного уравнения (4) общего вида определяется двумя наборами произвольных функций. Первый набор состоит из двух произвольных функций одной переменной, которые появляются в общем решении двумерного уравнения второго порядка (79) с фиксированной функцией M . Функция M является произвольной функцией трех аргументов (ограниченной единственным условием (80)), которая, кроме того, может произвольным образом зависеть от спектрального параметра λ . Второй набор появляется в общем решении одного из уравнений (11), (48) или (88), которые являются M -мерными (в общем случае) нелинейными уравнениями, поскольку w — M -мерное дифференциальное выражение от u . Таким образом, его общее решение зависит от произвольных функций M переменных: $M-1$ переменных из набора x , дополненных переменной t . Однако эти функции удовлетворяют нулевым граничным условиям для функции $\psi = u_t + w_{x_1}$, о которых говорится в теоремах 1 и 2. Этот факт вносит дополнительные ограничения на указанные произвольные функции. Пока остается без ответа вопрос о возможности добиться полной интегрируемости нелинейного уравнения (4), комбинируя эти два набора произвольных функций вместе с произвольной функцией M и спектральным параметром. Эта проблема требует дальнейшего изучения. Роль функционального интегрирования в уравнении (88) также требует разъяснения.

6. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ (11) И (48)

После построения функции $F(p, q)$ нужно решить M -мерное уравнение (11) или (48) на функцию u . Таким образом, возникает проблема интегрирования этих уравнений. В качестве простого примера рассмотрим уравнение (48) с $F(u, w) = u + w$:

$$u + w = 0. \quad (97)$$

Это уравнение интегрируется, например, в следующих случаях.

6.1. Уравнение (97), интегрируемое с помощью МОЗР: уравнение коротких импульсов. Сначала рассмотрим случай уравнения (97), интегрируемого с помощью МОЗР. Например, пусть уравнение (97) имеет вид уравнения коротких импульсов [18], [19]

$$u_{x_2 x_3} + (u^3)_{x_2 x_2} + u = 0, \quad (98)$$

т. е.

$$w = u_{x_2 x_3} + (u^3)_{x_2 x_2}. \quad (99)$$

В этом случае уравнение (4) имеет вид

$$u_t + (u_{x_2 x_3} + (u^3)_{x_2 x_2})_{x_1} = 0 \quad (100)$$

и может считаться дополнительным коммутирующим потоком уравнения коротких импульсов (98). Напомним, что не любые решения уравнения коротких импульсов удовлетворяют уравнению (100), а только удовлетворяющие нулевым граничным условиям для функции

$$\psi = u_t + (u_{x_2 x_3} + (u^3)_{x_2 x_2})_{x_1}, \quad (101)$$

как решения двумерного уравнения (52), в котором $F_u = F_w = 1$ и дифференциальный оператор Q имеет вид

$$Q = 6(u_{x_2}^2 + uu_{x_2 x_2}) + 12uu_{x_2} \partial_{x_2} + 3u^2 \partial_{x_2 x_2} + \partial_{x_2 x_3}.$$

6.2. Линеаризуемое уравнение (97). Рассмотрим линеаризуемое уравнение (97). Например, если $w = -\ln(u_{x_3} + u_{x_2 x_2} - u_{x_2}^2)$, то уравнение (97) линеаризуется подстановкой $u = -\ln \varphi$, принимая вид

$$\ln(-\varphi_{x_3} - \varphi_{x_2 x_2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{x_3} + \varphi_{x_2 x_2} + 1 = 0. \quad (102)$$

Соответствующее уравнение (4) запишем в виде

$$u_t - \ln_{x_1}(u_{x_3} + u_{x_2 x_2} - u_{x_2}^2) = 0. \quad (103)$$

При этом функция $\psi = u_t - \ln_{x_1}(u_{x_3} + u_{x_2 x_2} - u_{x_2}^2)$ должна удовлетворять нулевым граничным условиям для уравнения (52) с $F_u = F_w = 1$ и $Q = -(\partial_{x_3} + \partial_{x_2 x_2} - 2u_{x_2} \partial_{x_2})/(u_{x_3} + u_{x_2 x_2} - u_{x_2}^2)$.

6.3. Уравнение (97), сводящееся к ОДУ. Рассмотрим случай, когда само уравнение (97) можно представить в виде (4):

$$u + w \equiv u_{x_1} + w_{x_2}^{(1)}(u, u_{y_1}, u_{y_1 y_1}, \dots) = 0 \quad (104)$$

с некоторой функцией $w^{(1)}$ от u и ее производных по x_i , $i = 2, 3, \dots, M$. Здесь мы используем наборы $y_i = \{x_{i+1}, \dots, x_M\}$, $i = 1, 2, \dots, M-1$, переменных x_i и функции $w^{(i)}(u, u_{y_i}, u_{y_i y_i}, \dots)$, зависящие от функции u и ее производных по $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_M$. Таким образом, уравнение (104) имеет решения, задаваемые уравнением вида (97):

$$u + w^{(1)} = 0. \quad (105)$$

В свою очередь, если уравнение (105) представимо в виде (4),

$$u + w^{(1)} \equiv u_{x_2} + w_{x_3}^{(2)}(u, u_{y_2}, u_{y_2 y_2}, \dots) = 0, \quad (106)$$

то оно имеет решения, задаваемые уравнением вида (97):

$$u + w^{(2)} = 0, \quad (107)$$

и т. д. Если этот процесс можно продолжить, то на i -м шаге получим уравнение

$$u + w^{(i-1)} \equiv u_{x_i} + w_{x_{i+1}}^{(i)}(u, u_{y_i}, u_{y_i y_i}, \dots) = 0, \quad (108)$$

обладающее решениями, задаваемыми уравнением вида (97):

$$u + w^{(i)} = 0. \quad (109)$$

На последнем шаге $y_{M-1} = x_M$, и мы приходим к ОДУ

$$u + w^{(M-1)}(u, u_{x_M}, u_{x_M x_M}, \dots) = 0. \quad (110)$$

На каждом шаге необходимо обеспечить выполнение нулевых граничных условий для функции $\psi^{(i)} = u_{x_i} + w_{x_{i+1}}^{(i)}$ как решения линейного дифференциального уравнения

$$(1 + Q^{(i)})\psi^{(i)} = 0$$

с дифференциальным оператором

$$Q^{(i)} = w_u^{(i)} + \sum_{j=1}^M w_{u_{x_j}}^{(i)} \partial_{x_j} + \sum_{j_1, j_2=1}^M w_{u_{x_{j_1} x_{j_2}}}^{(i)} \partial_{x_{j_1} x_{j_2}} + \dots$$

Напомним, что само уравнение (104) сопровождается нулевыми граничными условиями для функции $\psi = u_t + w_{x_1}$ как решения уравнения $(1 + Q)\psi = 0$ с оператором Q , заданным выражением (47).

Простейшим уравнением, решения которого можно строить описанным выше способом, является уравнение

$$u_t + (u_{x_1} - u + f_{x_2}(u))_{x_1} \equiv u_t - u_{x_1} + u_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_1}(u) = 0, \quad (111)$$

где f – произвольная функция от u .

7. ВЫВОДЫ

Построен алгоритм, сводящий большой класс $(M + 1)$ -мерных нелинейных эволюционных уравнений, представимых в виде одномерного потока (4), к семейству M -мерных нелинейных уравнений (48) (или (11) для w вида (5)). Совместность $(M + 1)$ -мерных и M -мерных уравнений приводит к двумерному уравнению второго порядка (79) для функции F . Важно то, что это уравнение справедливо для любого $(M + 1)$ -мерного уравнения вида (4). Кроме того, в уравнение для F можно ввести векторный спектральный параметр. Наличие такого параметра приводит к единственному линейному спектральному уравнению, связанному с исходным $(M + 1)$ -мерным уравнением. Однако второго спектрального уравнения, которое могло бы составить представление Лакса, не существует, в отличие от МОЗР. Разрешимость уравнения для F – первый непростой шаг при построении частных решений, поскольку это уравнение нелинейное. Этот вопрос будет изучаться в отдельной статье. В настоящей статье приведено несколько частных решений этого уравнения (см. раздел 4).

Другой проблемой является разрешимость M -мерного уравнения $F = 0$ относительно функции u , в которое входит функция w . Это уравнение следует изучать отдельно в каждом случае. В некоторых случаях можно свести $(M + 1)$ -мерное уравнение в частных производных к ОДУ, которое иногда допускает явные решения, как показано в приведенных выше примерах.

Очевидно существование большого многообразия нелинейных уравнений из описанного класса, имеющих физическое приложение. Можно обратиться к нелинейным уравнениям, рассмотренным в статье [17], которые также относятся к нашему случаю. В примере 1 рассмотрена деформация одного из этих уравнений.

Благодарности. Автор выражает благодарность А. Б. Шабату за важные замечания и Л. В. Богданову за полезное обсуждение. Работа финансировалась в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6170.2012.2).

Список литературы

- [1] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.
- [2] С. П. Царев, *Докл. АН СССР*, **282**:3 (1985), 534–537.
- [3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН*, **44**:6(270) (1989), 29–98.
- [4] С. П. Царев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [5] E. V. Ferapontov, *ТМФ*, **99**:2 (1994), 257–262.
- [6] E. Hopf, *Commun. Pure Appl. Math.*, **3**:3 (1950), 201–230.
- [7] J. D. Cole, *Quart. Appl. Math.*, **9** (1951), 225–236.
- [8] F. Calogero, “Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?”, *What is Integrability?*, ed. V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1991, 1–62.
- [9] D. Li, Ya. G. Sinai, “Complex singularities of the Burgers system and renormalization group method”, *Current Developments in Mathematics*, 2006, eds. D. Jerison, B. Mazur, T. Mrowka, W. Schmid, R. P. Stanley, S.-T. Yau, International Press, Somerville, MA, 2008, 181–210.
- [10] D. Li, Ya. G. Sinai, *J. Math. Phys.*, **51**:1 (2010), 015205, 16 pp.
- [11] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.

- [12] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [13] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [14] B. Konopel'chenko, *Solitons in Multidimensions. Inverse Spectral Transform Method*, World Sci., Singapore, 1993.
- [15] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [16] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.
- [17] A. I. Zenchuk, *Particular solutions to multidimensional PDEs with KdV-type nonlinearity*, arXiv: 1304.6864.
- [18] T. Schäfer, C. E. Wayne, *Phys. D*, **196**:1–2 (2004), 90–105.
- [19] A. Sakovich, S. Sakovich, *J. Phys. Soc. Japan*, **74**:1 (2005), 239–241, arXiv: nlin/0409034.

Поступила в редакцию 19.09.2013