Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Козлов, Вычисление спектральной зависимости критерия локализации Андерсона в одномерной системе при коррелированном диагональном беспорядке, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 1, 134–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:41:17

© 2014 г.

Г. Г. Козлов*

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КРИТЕРИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ АНДЕРСОНА В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ КОРРЕЛИРОВАННОМ ДИАГОНАЛЬНОМ БЕСПОРЯДКЕ

Рассмотрена задача о вычислении критерия Андерсона для одномерной разупорядоченной цепочки с коррелированным беспорядком. Для решения указанной задачи развита теория возмущений, в которой малым параметром является обратный радиус корреляции. Показано, что, кроме естественного уменьшения степени локализации в коррелированной системе, имеет место значительное отличие ее спектральной зависимости от спектральной зависимости для некоррелированных цепочек. В расчетах используется метод построения совместной статистики функций Грина, примененный ранее для анализа некоррелированных одномерных систем. Теоретические расчеты иллюстрируются численным экспериментом.

Ключевые слова: локализация Андерсона, коррелированный беспорядок, функция Грина.

DOI: 10.4213/tmf8598

1. ВВЕДЕНИЕ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Среди математических моделей пространственно-однородных разупорядоченных систем наиболее популярными являются модели, в которых беспорядок представляется некоторым дельта-коррелированным случайным полем. Такие модели являются простейшими, и один из возможных шагов на пути их усложнения состоит в введении корреляций. Вопрос о влиянии корреляций является тем более актуальным, что в реальных системах следует ожидать коррелированного беспорядка. К тому же, как было показано в работах [1]–[3], важнейшее свойство случайных

*Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: gkozlov@photonics.phys.spbu.ru

систем – локализация собственных состояний – может существенно зависеть от наличия корреляций.

Для описания локализации в некоррелированных низкоразмерных случайных системах широко используется понятие длины локализации [4]. То же можно сказать и о коррелированных системах [5]–[8]. Несмотря на высокий информативный потенциал понятия длины локализации, применение подобных понятий не всегда позволяет исчерпывающим образом судить о характере (локализованный–делокализованный) собственных состояний случайной системы [9], [10] (см. также работу [5]). По этой причине дополнительное исследование локализации в случайных системах (как коррелированных, так и некоррелированных) с помощью базового критерия Андерсона [4], [11] представляется необходимым.

В настоящей работе мы исследуем локализацию собственных состояний в одномерной коррелированной цепочке, применяя для анализа метод, предложенный Дайсоном [12]. Развитие этого метода дало возможность получить ряд результатов, касающихся как спектральных [13], [14], так и локализационных [15]–[18] свойств одномерных разупорядоченных систем. В указанных работах исследовались некоррелированные случайные цепочки, известным исключением можно считать работу [16], где была проанализирована случайная цепочка со сложной структурной единицей, эта цепочка может (правда, довольно искусственно) рассматриваться как коррелированная.

В настоящей работе для простейшей диагонально разупорядоченной коррелированной одномерной цепочки выполнен расчет спектральной зависимости степени локализации в смысле критерия Андерсона и продемонстрировано существенное отличие указанной зависимости от случая некоррелированной цепочки. Для расчета используется предложенный в работах [15]–[17] метод, основанный на построении совместной статистики опережающей и запаздывающей функций Грина. В приводимом ниже расчете параметром малости является обратный радиус корреляции, и полученные формулы работают при значительной (по отношению к невозмущенному гамильтониану) величине разупорядочения, когда обычная квантово-механическая теория возмущений неприменима. Поэтому полученные результаты еще раз демонстрируют эффективность и универсальность предложенного в работах [15]–[17] метода совместной статистики функций Грина, который позволяет проанализировать целый ряд задач, некоторые из них (например, задача Ллойда [17]) являются квантовомеханически непертурбативными.

Перейдем к постановке задачи. Матрица гамильтониана разупорядоченной цепочки длины N , которую мы предполагаем исследовать, имеет в узельном представлении стандартный вид [4] (диагональный беспорядок)

$$H_{n,n'} = \delta_{n,n'}\varepsilon_n + \delta_{n,n'+1} + \delta_{n,n'-1}, \quad n, n' = 1, \dots, N, \quad (1)$$

однако, в отличие от традиционной постановки задачи, случайные узельные энергии ε_n образуют теперь коррелированную последовательность со следующим простейшим механизмом корреляции, сходным с описанным, например, в работе [5]. Сопоставим каждому узлу n нашей цепочки некоторую вспомогательную случайную величину ξ_n , причем величины ξ_n , $n = 1, \dots, N$, будем считать взаимно независимыми и имеющими заданную плотность распределения $P(x)$. С помощью этих

величин построим узельные энергии ε_n следующим образом:

$$\varepsilon_n = (1 - e^{-\alpha}) \sum_{m \leq n} e^{\alpha(m-n)} \xi_m, \quad \alpha > 0.$$

При таком построении величины ε_n , $n = 1, \dots, N$, будут коррелированы, причем корреляционная функция $\langle \varepsilon_n \varepsilon_{n'} \rangle$ имеет экспоненциальный вид:

$$\langle \varepsilon_n \varepsilon_{n'} \rangle = \langle \xi^2 \rangle \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{1 + e^{-\alpha}} \right) e^{-\alpha|n-n'|} = \langle \xi^2 \rangle \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \beta^{|n-n'|}, \quad \beta \equiv e^{-\alpha}, \quad \beta \in [0, 1],$$

с характерным радиусом корреляции $R = 1/\alpha$. Отметим, что последовательность ε_n , $n = 1, \dots, N$, причинно коррелирована, т. е. случайная величина ε_n зависит только от тех ξ_m , у которых $m \leq n$. Для дальнейших рассуждений существенным является следующее проверяемое прямым расчетом соотношение:

$$\varepsilon_{n+1} = \beta \varepsilon_n + (1 - \beta) \xi_{n+1}. \quad (2)$$

Ниже мы будем считать плотность распределения вспомогательных независимых величин ξ_n гауссовой,

$$P(x) = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x/\Delta)^2}. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться в том, что в этом случае плотность распределения $\mathcal{P}(z)$ узельных энергий ε_n также будет гауссовой,

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\bar{\Delta}} e^{-(z/\bar{\Delta})^2}, \quad \text{где} \quad \bar{\Delta} \equiv \Delta \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (4)$$

Для такой цепочки с коррелированным диагональным беспорядком рассмотрим стандартные [4], [15]–[17] задачи вычисления критерия Андерсона D – остаточной плотности возбуждения на краевом узле цепочки (о связи параметра D с областью локализации см. работу [18]) – и нахождения спектральной зависимости степени локализации $W(U)$ [15]. Указанные величины выражаются через собственные числа E_λ и краевые компоненты собственных векторов Ψ^λ матрицы (1) следующим образом:

$$W(U) dU = \left\langle \sum_{E_\lambda \in [U, U+dU]} |\Psi_N^\lambda|^4 \right\rangle, \quad D = \int W(U) dU. \quad (5)$$

В соответствии с методикой, предложенной в работах [15]–[17], для решения поставленной задачи необходимо знать совместную статистику двух краевых функций Грина (КФГ) $g_N(\Omega_1)$ и $g_N(\Omega_2)$ при разных (комплексных) энергиях $\Omega_1 = U_1 + iV_1$ и $\Omega_2 = U_2 - iV_2$, причем $V_{1,2} > 0$. Правила вычисления критерия Андерсона D и функции $W(U)$ с помощью этой статистики описаны в работах [15]–[17]. Ниже получены соответствующие формулы, учитывающие коррелированный характер узельных энергий. Сразу отметим, что, в отличие от задач, проанализированных в работах [15]–[17], в рассматриваемом случае коррелированного беспорядка мы можем получить замкнутое уравнение только для совместной статистики двух краевых функций Грина $g_N(\Omega_{1,2})$ и энергии краевого узла ε_N . Указанная статистика

представляет собой функцию $\rho(z_1, z_2, \varepsilon)$ двух комплексных и одного вещественного аргументов и определяется так, что величина $\rho(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \varepsilon) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 d\varepsilon$ равна вероятности совместного наступления событий

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g_N(\Omega_1) &\in [x_1, x_1 + dx_1], & \operatorname{Im} g_N(\Omega_1) &\in [y_1, y_1 + dy_1], \\ \operatorname{Re} g_N(\Omega_2) &\in [x_2, x_2 + dx_2], & \operatorname{Im} g_N(\Omega_2) &\in [y_2, y_2 + dy_2], \\ \varepsilon_N &\in [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]. \end{aligned}$$

Наша первая задача – вывод замкнутого уравнения для функции $\rho(z_1, z_2, \varepsilon)$. Для этого мы, как и в работах [15]–[17], используем известное (см., например, книгу [4]) соотношение, позволяющее выразить КФГ $g_{N+1}(\Omega)$ цепочки с одним добавленным узлом через КФГ $g_N(\Omega)$ исходной цепочки:

$$g_{N+1}(\Omega) = \frac{1}{\Omega - \varepsilon_{N+1} - g_N(\Omega)}. \quad (6)$$

Для компактификации расчетов нам будет удобно использовать следующее определение дельта-функции, аргументом которой является аналитическая функция $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексной переменной $z = x + iy$:

$$\delta[F(z)] \equiv \delta[u(x, y)]\delta[v(x, y)]. \quad (7)$$

Такая дельта-функция всегда вещественна и может быть преобразована следующим образом. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ есть корень функции $F(z)$. Тогда прямой расчет с использованием соотношений Коши–Римана для функции $F(z)$ показывает, что

$$\delta[F(z)] = \frac{\delta[z - z_0]}{|F'(z_0)|^2}, \quad F(z_0) = 0, \quad (8)$$

причем стоящая в числителе дельта-функция комплексной функции $z - z_0$ понимается в смысле (7).

Также для сокращения записи мы обозначим символом $\int_R dz$ следующие интегралы от функций (необязательно аналитических) $f(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ комплексной переменной $z = x + iy$:

$$\int_R f(z) dz \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)] dx dy.$$

Вернемся к выводу уравнения для совместной статистики $\rho(z_1, z_2, \varepsilon)$ и добавим к нашей цепочке из N узлов еще один узел: $N \rightarrow N + 1$. Если обозначить через $\tilde{\rho}(z_1, z_2, \varepsilon)$ функцию, аналогичную ρ , только описывающую совместную статистику КФГ цепочки с добавленным узлом, то с учетом введенных определений и соотношений (2) и (6) для нее можно написать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(z_1, z_2, \varepsilon) &= \\ &= \left\langle \delta\left(z_1 - \frac{1}{\Omega_1 - \varepsilon_{N+1} - g_N(\Omega_1)}\right) \delta\left(z_2 - \frac{1}{\Omega_2 - \varepsilon_{N+1} - g_N(\Omega_2)}\right) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{N+1}) \right\rangle = \\ &= \left\langle \delta\left(z_1 - \frac{1}{\Omega_1 - \varepsilon - g_N(\Omega_1)}\right) \delta\left(z_2 - \frac{1}{\Omega_2 - \varepsilon - g_N(\Omega_2)}\right) \delta(\varepsilon - \beta\varepsilon_N - (1 - \beta)\xi_{N+1}) \right\rangle = \end{aligned}$$

$$= \int_R dz'_1 dz'_2 \int P(x) \rho(z'_1 z'_2, \varepsilon') \times \\ \times \delta\left(z_1 - \frac{1}{\Omega_1 - \varepsilon - z'_1}\right) \delta\left(z_2 - \frac{1}{\Omega_2 - \varepsilon - z'_2}\right) \delta(\varepsilon - \beta\varepsilon' - (1 - \beta)x) d\varepsilon' dx.$$

Как обычно, при $N \rightarrow \infty$ (термодинамический предел) должно выполняться равенство $\rho = \tilde{\rho}$ (условие стационарности статистики). Используя формулу (8), проведем интегрирование с дельта-функциями и получим для стационарной совместной функции распределения $\rho(z_1, z_2, \varepsilon)$ следующее замкнутое уравнение:

$$\beta|z_1|^4|z_2|^4\rho(z_1, z_2, \varepsilon) = \int P(x)\rho\left(\Omega_1 - \varepsilon - \frac{1}{z_1}, \Omega_2 - \varepsilon - \frac{1}{z_2}, \frac{\varepsilon - (1 - \beta)x}{\beta}\right) dx.$$

Для вычисления остаточной плотности D и функции $W(U)$ требуются функции Грина с предельно малыми и имеющими разные знаки мнимыми частями энергетических аргументов. В полной аналогии с тем, как это было сделано в работах [15]–[17], данное обстоятельство можно использовать для сведения задачи к анализу уравнения для совместной статистики вещественных КФГ и энергии крайнего узла, которое имеет вид

$$\beta x_1^2 x_2^2 \sigma(x_1, x_2, \varepsilon) = \int P(x) \sigma\left(U_1 - \varepsilon - \frac{1}{x_1}, U_2 - \varepsilon - \frac{1}{x_2}, \frac{\varepsilon - (1 - \beta)x}{\beta}\right) dx. \quad (9)$$

Дальнейшие вычисления также производятся путем прямого обобщения результатов и формул работ [15]–[17], в которых показано, что для вычисления функции $W(U)$ необходима только сингулярная по разности энергетических аргументов $U_2 - U_1 \equiv \omega$ часть функции $\sigma(x_1, x_2, \varepsilon)$, причем эта сингулярность имеет вид полюса. Таким образом, при малых ω функция $\sigma(x_1, x_2, \varepsilon) \approx \text{sing } \sigma(x_1, x_2, \varepsilon)$, где $\text{sing } \sigma(x_1, x_2, \varepsilon)$ может быть записана в виде

$$\text{sing } \sigma(x_1, x_2, \varepsilon) = \frac{1}{\omega} \mathcal{F}_U(x_1, x_2, \varepsilon). \quad (10)$$

Здесь мы сделали переобозначение $U_1 \rightarrow U$. Если известна функция $\mathcal{F}_U(x_1, x_2, \varepsilon)$, то функция $W(U)$ и критерий Андерсона D могут быть рассчитаны по формулам

$$W(U) = \lim_{a \rightarrow \infty} a^2 \int \mathcal{F}_U(x, a, \varepsilon) dx d\varepsilon, \quad D = \int W(U) dU. \quad (11)$$

Вывод формул (9)–(11) полностью аналогичен выводу соответствующих формул из работ [15]–[17].

Таким образом, задача сводится к нахождению сингулярной части $\mathcal{F}(x_1, x_2, \varepsilon)/\omega$ решения уравнения (9). В следующем разделе для решения этой задачи будет развита теория возмущений, в которой параметром малости является обратный радиус корреляции $1/R = -\ln \beta$, и получены следующие выражения для спектральной зависимости степени локализации $W(U)$ и критерия Андерсона D :

$$W(U) = \frac{\bar{\Delta}^2}{4\pi R} \text{Re} \int \frac{\mathcal{P}(\varepsilon)}{\sqrt{4 - (U - \varepsilon)^2}} d\varepsilon + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ D = \int W(U) dU = \frac{\bar{\Delta}^2}{4R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right). \quad (12)$$

Эти выражения применимы для коррелированной диагонально разупорядоченной цепочки при больших радиусах корреляции $R \gg 1$. Обратим внимание на то, что эти формулы могут работать и тогда, когда $\bar{\Delta} > 1$, т. е. при значительных величинах беспорядка.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ БОЛЬШИХ РАДИУСОВ КОРРЕЛЯЦИИ

Пусть радиус корреляции $R \gg 1$ и, следовательно, $\beta \approx 1$. Чтобы найти приближенное решение уравнения (9), построим теорию возмущений по малому параметру $y \equiv 1 - \beta > 0$ ($y \approx 1/R$). Будем считать, что плотность распределения энергий узлов имеет вид (4), причем $\bar{\Delta}$ фиксировано и необязательно мало. Это означает, что ширина Δ распределения (3) вспомогательных величин ξ_n будет увеличиваться при $\beta \rightarrow 1$. Таким образом, плотность распределения $P(x)$ вспомогательных величин ξ_n зависит от β и имеет вид (3), где

$$\Delta = \bar{\Delta} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (13)$$

Для дальнейших рассуждений удобно перейти в уравнении (9) к новой функции $\mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon)$ по формуле

$$\mathcal{R}(U_1 - \varepsilon - x_1, U_2 - \varepsilon - x_2, \beta\varepsilon) \equiv \sigma(x_1, x_2, \varepsilon). \quad (14)$$

Тогда из (9) для функции $\mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon)$ получается следующее уравнение:

$$\beta \frac{\mathcal{R}(U_1 - \varepsilon - 1/x_1, U_2 - \varepsilon - 1/x_2, \beta\varepsilon)}{x_1^2 x_2^2} = \int P(x) \mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon - yx) dx. \quad (15)$$

Рассмотрим интеграл в правой части этого уравнения. Функция $P(x)$ существенно отлична от нуля при $x \in [-\Delta, \Delta]$, а размер соответствующей области, в которой меняется фигурирующая в (15) величина yx , оценивается как

$$\Delta y = \bar{\Delta} \sqrt{1 - \beta^2} \approx \bar{\Delta} \sqrt{2y} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \beta \rightarrow 1.$$

Поэтому при малом y функцию $\mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon - yx)$ в правой части (15) можно разложить в степенной ряд до второго члена (первый член отсутствует, поскольку первый момент функции $P(x)$ равен нулю):

$$\beta \frac{\mathcal{R}(U_1 - \varepsilon - 1/x_1, U_2 - \varepsilon - 1/x_2, \beta\varepsilon)}{x_1^2 x_2^2} = \mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon) + \frac{\partial^2 \mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \frac{y^2 \Delta^2}{4}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для функции (3) $\int x^2 P(x) dx = \Delta^2/2$. Подставляя Δ из (13) и учитывая, что $\beta \approx 1$, получаем

$$\beta \frac{\mathcal{R}(U_1 - \varepsilon - 1/x_1, U_2 - \varepsilon - 1/x_2, \beta\varepsilon)}{x_1^2 x_2^2} = \mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon) + \frac{\partial^2 \mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \frac{y \bar{\Delta}^2}{2}. \quad (16)$$

Теперь примем во внимание, что функция $\mathcal{R}$ непосредственно зависит от y . В линейном приближении эта зависимость имеет вид

$$\mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon) = \mathcal{R}_0(x_1, x_2, \varepsilon) + y \mathcal{R}_1(x_1, x_2, \varepsilon) + \dots$$

Подставим это выражение в (16) и приравняем коэффициенты при равных степенях y . Приравнивание коэффициентов при y^0 дает

$$\frac{\mathcal{R}_0(U_1 - \varepsilon - 1/x_1, U_2 - \varepsilon - 1/x_2, \varepsilon)}{x_1^2 x_2^2} = \mathcal{R}_0(x_1, x_2, \varepsilon). \quad (17)$$

Учитывая это уравнение и приравнявая коэффициенты при y , получаем

$$[\mathcal{H}_{U_1-\varepsilon}(x_1)\mathcal{H}_{U_2-\varepsilon}(x_2) - 1]\mathcal{R}_1(x_1, x_2, \varepsilon) = \mathcal{A}, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{R}_0(x_1, x_2, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{x_1^2 x_2^2} \frac{\partial \mathcal{R}_0(U_1 - \varepsilon - 1/x_1, U_2 - \varepsilon - 1/x_2, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\varepsilon} + \mathcal{R}_0(x_1, x_2, \varepsilon). \quad (19)$$

В уравнении (18) мы обозначили через $\mathcal{A}$ правую часть уравнения для $\mathcal{R}_1$ и ввели функциональный оператор $\mathcal{H}_U(x)$ [15], [19], действующий на произвольную функцию $f(x)$ по следующему правилу: $\mathcal{H}_U(x)f(x) \equiv f(U - 1/x)/x^2$. Известно [15], [19], что собственная функция этого оператора, соответствующая единичному собственному числу, есть лоренциан $\mathcal{L}_U(x)$, явное выражение для которого приведено ниже (см. формулы (24)). Имея это в виду, нетрудно убедиться в том, что решение $\mathcal{R}_0$ уравнения (17) имеет следующий вид:

$$\mathcal{R}_0(x_1, x_2, \varepsilon) = \mathcal{L}_{U_1-\varepsilon}(x_1)\mathcal{L}_{U_2-\varepsilon}(x_2)\mathcal{P}(\varepsilon), \quad (20)$$

где $\mathcal{P}(\varepsilon)$ есть плотность распределения узельных энергий в форме (4).

Чтобы решить функциональное уравнение (18) для первой неисчезающей поправки $\mathcal{R}_1$, разложим правую и левую части этого уравнения по собственным функциям $\sigma_{U_1-\varepsilon}^n(x_1)\sigma_{U_2-\varepsilon}^m(x_2)$ оператора $\mathcal{H}_{U_1-\varepsilon}(x_1)\mathcal{H}_{U_2-\varepsilon}(x_2)$, как это сделано в работах [15]–[17], и приравняем соответствующие коэффициенты. Разложение для $\mathcal{R}_1$ имеет вид

$$\mathcal{R}_1(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{m,n} C_{nm} \sigma_{U_1-\varepsilon}^n(x_1) \sigma_{U_2-\varepsilon}^m(x_2); \quad (21)$$

коэффициенты C_{nm} следует определить, разложив по функциям $\sigma_{U_1-\varepsilon}^n(x_1)\sigma_{U_2-\varepsilon}^m(x_2)$ известную правую часть уравнения (18) и приравняв соответствующие коэффициенты. Чтобы это сделать, напомним полученные в статье [19] явные выражения для собственных функций $\sigma_U^n(x)$ и собственных значений λ_n оператора $\mathcal{H}_U(x)$ при $|U| < 2$:

$$\sigma_U^n(x) = \mathcal{L}_U(x) \left(\frac{R_U^* - x}{R_U - x} \right)^n \equiv \mathcal{L}_U(x) G_U^n(x), \quad (22)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{U + i\sqrt{4 - U^2}}{U - i\sqrt{4 - U^2}} \right)^n, \quad |\lambda_n| = 1, \quad (23)$$

где

$$G_U(x) \equiv \frac{R_U^* - x}{R_U - x}, \quad R_U \equiv \frac{U + i\sqrt{4 - U^2}}{2}, \quad (24)$$

$$\mathcal{L}_U(x) \equiv \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - R_U} - \frac{1}{x - R_U^*} \right).$$

Напомним также правило проецирования на систему функций (22), которое заключается в том, что произвольная функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \sigma_U^n(x), \quad \text{где} \quad A_n = \int \frac{f(x)}{G_U^n(x)} dx.$$

Из уравнения (18) следует, что $\int \mathcal{A} dx_1 dx_2 = 0$. Это приводит к тому, что функция $\mathcal{P}(\varepsilon)$ (4) должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\bar{\Delta}^2}{2} \frac{d^2 \mathcal{P}}{d\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{d\mathcal{P}}{d\varepsilon} + \mathcal{P}(\varepsilon) = 0, \quad (25)$$

которое получается из правой части уравнения (18), если в нее подставить $\mathcal{R}_0$ в форме (20) и проинтегрировать по x_1 и x_2 . Прямая проверка показывает, что уравнение (25) действительно выполняется.

Имея все это в виду, получаем для коэффициентов C_{nm} (кроме C_{00} , который определяется нормировкой и не является сингулярным) в формуле (21) следующие выражения:

$$C_{nm} = \frac{A_{nm}}{\lambda_n(U_1 - \varepsilon) \lambda_m(U_2 - \varepsilon) - 1}, \quad A_{nm} = \int \frac{\mathcal{A}(x_1, x_2)}{G_{U_1 - \varepsilon}^n(x_1) G_{U_2 - \varepsilon}^m(x_2)} dx_1 dx_2. \quad (26)$$

Вспомним теперь, что нам необходима лишь сингулярная по $\omega = U_2 - U_1$ часть оператора $\mathcal{R}_1$, которой соответствуют члены разложения с $n = -m$ [15]: именно у этих членов в коэффициентах (26) знаменатель обращается в нуль при $U_1 = U_2$. Для малых ω справедливо разложение

$$1 - \lambda_n(U_1 - \varepsilon) \lambda_{-n}(U_1 + \omega - \varepsilon) = -\frac{2in\omega}{\sqrt{4 - (U_1 - \varepsilon)^2}} + O(\omega^2).$$

В интересующую нас сингулярную часть дает вклад только первое слагаемое в выражении (19) для $\mathcal{A}$, и мы приведем расчет только для этого слагаемого¹⁾. Введем обозначение $a_n \equiv A_{n, -n}$ для соответствующих коэффициентов разложения. На этом этапе расчета уже можно приравнять энергетические аргументы, $U_1 = U_2 \equiv U$, поскольку сингулярность определяется только знаменателем коэффициентов (26) с $n = -m$. Имеем

$$a_n = \frac{\bar{\Delta}^2}{2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\int \frac{\mathcal{R}_0(x_1, x_2, \theta)}{G_{U - \varepsilon}^n(x_1) G_{U - \varepsilon}^{-n}(x_2)} dx_1 dx_2 \right) \Big|_{\theta=\varepsilon}.$$

Как и в работах [15]–[17], определим величины $J_n(\theta)$ следующим образом:

$$J_n(\theta) \equiv \int \frac{\mathcal{L}_{U - \theta}(x)}{G_{U - \varepsilon}^n(x)} dx, \quad J_{-n}(\theta) = J_n^*(\theta), \quad J_n(\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 0.$$

Используя выражения (23) и интегрируя с помощью теоремы о вычетах, можно показать, что

$$J_n(\theta) = \left(\frac{R_{U - \varepsilon} - R_{U - \theta}}{R_{U - \varepsilon}^* - R_{U - \theta}} \right)^n, \quad n > 0. \quad (27)$$

¹⁾Проведя расчеты по приведенной ниже схеме, можно убедиться в том, что остальные слагаемые в выражении (19) не дают вклада.

Тогда

$$a_n = \frac{\bar{\Delta}^2}{2} \frac{d^2(|J_n(\theta)|^2 \mathcal{P}(\theta))}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\varepsilon}, \quad (28)$$

и для сингулярной части функции $\sigma(x_1, x_2, \varepsilon)$ (обозначим ее символом “sing”) получаем выражение вида (10)²⁾

$$\text{sing } \sigma(x_1, x_2, \varepsilon) = \frac{1}{\omega} \mathcal{F}_U(x_1, x_2, \varepsilon), \quad (29)$$

где

$$\mathcal{F}_U(x_1, x_2, \varepsilon) = -\frac{iy}{2} \sqrt{4 - (U - \varepsilon)^2} \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} \sigma_{U-\varepsilon}^n(U - \varepsilon - x_1) \sigma_{U-\varepsilon}^{-n}(U - \varepsilon - x_2) \quad (30)$$

и величины a_n определяются формулой (28). Отличием β от единицы в функциях σ и в коэффициентах $A_{n,-n} = a_n$ можно пренебречь (они зависят от ε , следовательно, надо взять их значения в точке $\beta\varepsilon$ при переходе от $\mathcal{R}(x_1, x_2, \varepsilon)$ к $\sigma(x_1, x_2, \varepsilon)$ по формуле (14)). Прямой расчет показывает, что ненулевыми будут только члены суммы (30) с $n = \pm 1$. Используя соотношения (28) и (29), получаем для $a_1 = a_{-1}$ следующее выражение:

$$a_1 = \mathcal{P}(\varepsilon) \frac{\bar{\Delta}^2}{[4 - (U - \varepsilon)^2]^2}.$$

Используя доказанные в статье [15] свойства функций (22)

$$\int \sigma_U^n(x) x dx = \frac{i}{2} \frac{n}{|n|} \sqrt{4 - U^2}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \sigma_U^{-n}(a) a^2 = \frac{\sqrt{4 - U^2}}{2\pi}$$

и вспоминая, что $y = 1/R$ (где R – радиус корреляции, который мы предполагаем большим), с помощью формул (11) получаем для $W(U)$ и остаточной плотности D выражения (12).

Численная проверка формул (12) с помощью соотношений (5) несколько затрудняется тем, что при больших радиусах корреляции R размеры случайных матриц (1) следует брать примерно в R раз большими, чем при проверке аналогичных формул из работ [15], [17]. Результаты численной проверки приведены на рис. 1. Рис. 1а получен при следующих значениях параметров: $\bar{\Delta} = 0.5$ и $R = 5$. Вследствие небольшого значения радиуса корреляции рис. 1а демонстрирует лишь качественное соответствие между теорией и численным экспериментом. Из рис. 1б, который получен при $\bar{\Delta} = 5$ и $R = 50$, видно, что увеличение радиуса корреляции приводит к улучшению согласия теоретической и численной зависимостей, так как формулы (12) получены в приближении больших значений радиуса корреляции.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе продемонстрировано, что предложенный в работах [15]–[17] метод анализа локализации в одномерных системах, использующий построение совместной статистики опережающей и запаздывающей функций Грина, может быть обобщен на случай коррелированных низкоразмерных разупорядоченных систем.

²⁾Эта часть связана с сингулярной частью функции $\mathcal{R}$ заменой переменных (14).

Рис. 1. Спектральные зависимости степени локализации в одномерных коррелированных цепочках при различных значениях степени разупорядочения и радиусов корреляции: при $\bar{\Delta} = 0.5$ и $R = 5$ для 3000 реализаций (а) и при $\bar{\Delta} = 5$ и $R = 50$ для 200 реализаций (б). Размер случайной матрицы во всех случаях выбирался равным 2000. Зашумленные графики соответствуют компьютерному эксперименту, гладкие получены с помощью формулы (12) без какой-либо подгонки. При увеличении радиуса корреляции согласие теории и эксперимента улучшается, несмотря на рост степени разупорядочения.

В рамках этого метода оказалось возможным построить простую теорию возмущений для статистики функций Грина, в которой параметром малости является обратный радиус корреляции $1/R$, и показать, что остаточная плотность D в краевом узле (критерий Андерсона) уменьшается в R раз по сравнению со своим значением для некоррелированной цепочки [15]. Этот результат представляется естественным: исходно созданное возбуждение на краевом узле заведомо рассосредотачивается в области, размер которой имеет порядок радиуса корреляции.

Более неожиданным представляется второй результат работы, заключающийся в том, что спектральная зависимость $W(U)$ степени локализации, заданная в (12), существенно отличается от спектральной зависимости для некоррелированных цепочек [15] и представляет собой сглаженную плотность состояний упорядоченной цепочки.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (контракт № 11.G34.31.0067 с Санкт-Петербургским государственным университетом и ведущим ученым А. В. Кавокиным).

Список литературы

- [1] V. A. Malyshev, A. Rodriguez, F. Dominguez-Adame, *Phys. Rev. B*, **60**:20 (1999), 14140–14146.
- [2] F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:17 (1998), 3735–3738.
- [3] D. H. Dunlap, H.-L. Wu, P. W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.*, **65**:1 (1990), 88–91.
- [4] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, М., 1982.
- [5] F. M. Izrailev, A. A. Krokhin, N. M. Makarov, *Phys. Rep.*, **512**:3 (2012), 125–254, arXiv: 1110.1762.
- [6] M. Titov, H. Schomerus, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:12 (2005), 126602, 4 pp.
- [7] L. I. Deych, M. V. Erementchouk, A. A. Lisyansky, *Physica B*, **338**:1–4 (2003), 79–81.
- [8] A. Croy, P. Cain, M. Schreiber, *Europ. Phys. J. B*, **82**:2 (2011), 107–112.
- [9] G. Theodorou, M. H. Cohen, *Phys. Rev. B*, **13**:10 (1976), 4597–4601.
- [10] G. G. Kozlov, *The watching operators method in the theory of Frenkel exciton. Novel criterion of localization and its exact calculation for the non diagonal disordered 1D chain's zero-state*, arXiv:cond-mat/9909335.
- [11] P. W. Anderson, *Phys. Rev.*, **109**:5 (1958), 1492–1505.
- [12] F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **92**:6 (1953), 1331–1338.
- [13] H. Schmidt, *Phys. Rev.*, **105**:2 (1957), 425–441.
- [14] Г. Г. Козлов, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 337–352.
- [15] Г. Г. Козлов, *ТМФ*, **162**:2 (2010), 285–303.
- [16] G. G. Kozlov, *Appl. Math.*, **2**:8 (2011), 965–974.
- [17] Г. Г. Козлов, *ТМФ*, **171**:1 (2012), 124–134.
- [18] G. G. Kozlov, *Spectral dependence of degree of localization of eigenfunctions of the 1D Schrodinger equation with a piecewise-constant random potential*, arXiv: 1105.2678.
- [19] G. G. Kozlov, *Spectrum and eigen functions of the operator $H_U f(x) \equiv f(U - 1/x)/x^2$ and strange attractor's density for the mapping $x_{n+1} = 1/(U - x_n)$* , arXiv: 0803.1920.

Поступила в редакцию 23.09.2013