Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Хакимов, Локализация трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей Поттса и “solid-on-solid” на дереве Кэли, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 1, 24–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:19:47

© 2014 г.

Р. М. Хакимов*

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ПОТТСА И “SOLID-ON-SOLID” НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучаются модели Поттса и “solid-on-solid” с $q \geq 2$ состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$. Для модели Поттса при любых значениях параметра q , а также для модели “solid-on-solid” при $q \leq 6$ найдены множества, в которых лежат все трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, мера Гиббса, модель Поттса, модель “solid-on-solid”, периодические меры, трансляционно-инвариантные меры.

DOI: 10.4231/tmf8599

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели Поттса и “solid-on-solid” (SOS) являются обобщением модели Изинга, которая хорошо изучена на решетке $\mathbb{Z}^d$. Понятие меры Гиббса для таких моделей на дереве Кэли вводится обычным образом (см. монографии [1]–[4]).

Приведем обзор известных результатов. В работе [5] рассмотрена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и доказано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ найдутся три трансляционно-инвариантные меры Гиббса и несчетное число мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными. В работе [6] обобщены результаты работы [5] для модели Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка. В работе [7] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [8] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса. Для ознакомления с другими свойствами модели Поттса на дереве Кэли см., например, монографию [4] и статьи [9]–[12]. Несмотря на многочисленность работ, посвященных модели Поттса на дереве Кэли, она изучена мало по сравнению с моделью Изинга.

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: rustam-7102@rambler.ru

В случае кубической решетки модель SOS изучалась в статье [13], где рассматривался аналог так называемой теории Динабурга–Мазеля–Синая. С другими результатами, полученными для модели SOS, можно ознакомиться в монографии [4] и статье [14].

Настоящая работа посвящена изучению трансляционно-инвариантных мер Гиббса моделей Поттса и SOS на дереве Кэли. Содержание работы состоит в следующем: в разделе 2 приведены основные определения и известные теоремы; в разделе 3 при любых значениях параметров для модели Поттса найдены инвариантные множества, в которых лежат все трансляционно-инвариантные меры Гиббса; в разделе 4 при некоторых условиях на параметры найдены аналогичные множества для модели SOS.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли $\mathcal{T}^k$ порядка $k \geq 1$ – это бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\mathcal{T}^k = (V, L, r)$, где V – множество вершин графа $\mathcal{T}^k$, L – множество его ребер и r – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $s \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $r(s) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями*; это обозначается как $s = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$ между вершинами $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется как минимальное значение d такое, что найдутся вершины $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$, последовательно являющиеся ближайшими соседями, т.е. $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – ребра дерева Кэли.

Для фиксированного $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n = \{s = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

Мы рассмотрим модель, в которой спинные переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, \dots, q\}$, $q \geq 2$, и расположены в вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ – ближайшие соседи, а δ_{ij} – символ Кронекера.

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x} \right\}, \quad (2)$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура, Z_n^{-1} – нормировочный множитель,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

и

$$\{h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q,x}) \in \mathbb{R}^q, x \in V\}.$$

– совокупность векторов. Говорят, что вероятностное распределение (2) согласованное, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}).$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной мерой Гиббса, соответствующей гамильтониану (1) и векторнозначной функции h_x , $x \in V$.

В следующем утверждении [7] дается условие на функцию h_x , обеспечивающее согласованность меры $\mu_n(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 1. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, заданное формулой (2), является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее равенство:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (3)$$

где $\theta = e^{J\beta}$, $S(x)$ – множество прямых потомков точки x ,

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} \mid d(x, y) = 1\},$$

функция

$$F: h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \mapsto F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$$

задается формулами

$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \quad i = 1, \dots, q-1.$$

Пусть $\hat{G}_k$ – подгруппа группы G_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для всех $x \in G_k$, $y \in \hat{G}_k$. G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера μ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если она соответствует $\hat{G}_k$ -периодической совокупности векторов h .

Следующая теорема доказана в работе [15].

ТЕОРЕМА 2. Пусть K – нормальный делитель конечного индекса в группе G_k . Тогда для модели Поттса все K -периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$ -периодическими, либо трансляционно-инвариантными.

Помимо модели Поттса, мы рассмотрим модель SOS, в которой спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 2$, и расположены в вершинах дерева, а гамильтониан определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|,$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ – ближайшие соседи, $\sigma(x) \in \Phi$ для любых $x \in V$.

Пусть $h: x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, \dots, h_{m,x}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ – векторнозначная функция переменной $x \in V \setminus \{x^0\}$. В следующем утверждении [14] дается условие на функцию h_x , обеспечивающее согласованность меры $\mu_n(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 3. Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, заданное формулой (2), является согласованным тогда и только тогда, когда для любой вершины $x \neq x^0$ имеет место равенство

$$h_x^* = \sum_{y \in S(x)} F(h_y^*, m, \theta), \quad (4)$$

где $\theta = e^{J\beta}$, $h_x^* = (h_{0,x} - h_{m,x}, h_{1,x} - h_{m,x}, \dots, h_{m-1,x} - h_{m,x})$ и функция

$$F(\cdot, m, \theta): \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m, \quad F(h, \theta, m) = (F_0(h, m, \theta), F_1(h, m, \theta), \dots, F_{m-1}(h, m, \theta)),$$

определяется формулами

$$F_i(h, m, \theta) = \ln \left(\frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|} e^{h_j} + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} e^{h_j} + 1} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$h = (h_0, h_1, \dots, h_{m-1}).$$

Заметим, что аналог теоремы 2 также справедлив для модели SOS (см. монографию [4], глава 6).

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА

Рассмотрим трансляционно-инвариантные меры Гиббса, т.е. предположим, что $h_x = h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ для любого $x \in V$. Тогда из уравнения (3) получим $h = kF(h, \theta)$, т.е.

$$h_i = k \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (5)$$

Вводя обозначение $z_i = e^{h_i}$, $i = 1, \dots, q-1$, из (5) имеем

$$z_i = \left(\frac{(\theta - 1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right)^k, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (6)$$

Пусть $I \subset \{1, \dots, q-1\}$. Введем обозначение

$$M_I = \{z = (z_1, \dots, z_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \mid z_i = 1 \text{ для } i \in I, \ z_j = z_k \text{ для } j, k \notin I\}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *При любых q и k все решения системы уравнений (6) с необходимостью принадлежат множеству M_I , где $I \subset \{1, \dots, q-1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что $z_i = 1, i = 1, \dots, q-1$, является решением системы (6).

Пусть $z_i = 1$ для всех $i \in I$. Не нарушая общности, можно предполагать, что $I = \emptyset$. Положим $\sqrt[k]{z_i} = x_i, i = 1, \dots, q-1$. Тогда уравнения (6) запишутся следующим образом:

$$x_i = \frac{(\theta - 1)x_i^k + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j^k + \theta}, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (7)$$

Пусть $x_i \neq 1$ для всех $i = 1, \dots, q-1$. Из каждого уравнения (7) выразим θ и после некоторых преобразований получим

$$\theta = \frac{\sum_{r=0}^k x_i^r + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k - x_i^k}{\sum_{r=1}^{k-1} x_i^r}, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (8)$$

Докажем, что $x_i = x_{i+1}$ для любых $i = 1, \dots, q-2$. В самом деле, из i -го и $(i+1)$ -го уравнений (8) имеем

$$\left(\sum_{r=0}^k x_i^r + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k - x_i^k \right) \sum_{r=1}^{k-1} x_{i+1}^r = \left(\sum_{r=0}^k x_{i+1}^r + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k - x_{i+1}^k \right) \sum_{r=1}^{k-1} x_i^r$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{r=0}^k x_i^r + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k - x_i^k \right) \sum_{r=1}^{k-1} x_{i+1}^r - \left(\sum_{r=0}^k x_{i+1}^r + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k - x_{i+1}^k \right) \sum_{r=1}^{k-1} x_i^r + \\ & + \left(\sum_{r=0}^k x_{i+1}^r + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k - x_{i+1}^k \right) \sum_{r=1}^{k-1} x_{i+1}^r - \left(\sum_{r=0}^k x_{i+1}^r + \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k - x_{i+1}^k \right) \sum_{r=1}^{k-1} x_i^r = \\ & = (x_i - x_{i+1}) \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{r=0}^s x_i^r x_{i+1}^{s-r} \left(-1 - \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что $x_i = x_{i+1}$, так как $x_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, q-1$. Следовательно, все решения системы (6) принадлежат множествам M_I . Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Все трансляционно-инвариантные меры Гиббса модели Поттса соответствуют решениям системы (6), которые лежат в инвариантных множествах M_I .*

4. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ SOS

Рассмотрим трансляционно-инвариантные меры Гиббса. Положив $z_i = e^{h_i}$, из соотношения (4) получим

$$z_i = \left(\frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|} z_j + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} z_j + 1} \right)^k, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (9)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для модели SOS при $\theta > 1$ и $k \geq 2$ справедливо следующее утверждение. При $m = 2, 3, 4, 5, 6$ все решения системы уравнений (9) с необходимостью принадлежат множествам*

$$\begin{aligned} M_1 &= \{z = (z_0, z_1) \in \mathbb{R}^2: z_0 = 1, 0 < z_1 < 1\}, \\ M_2 &= \{z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^3: z_0 = 1, z_1 = z_2\}, \\ M_3 &= \{z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^4: z_0 = 1, z_1 = z_3\}, \\ M_4 &= \{z = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^5: z_0 = 1, z_1 = z_4, z_2 = z_3\}, \\ M_5 &= \{z = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{R}^6: z_0 = 1, z_1 = z_5, z_2 = z_4\} \end{aligned}$$

соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим каждое из значений $m = 2, 3, 4, 5, 6$ в отдельности.

1. Случай $m = 2$, $k \geq 2$. Из уравнений (9) имеем

$$z_0 = \left(\frac{z_0 + \theta z_1 + \theta^2}{\theta^2 z_0 + \theta z_1 + 1} \right)^k, \quad z_1 = \left(\frac{\theta z_0 + z_1 + \theta}{\theta^2 z_0 + \theta z_1 + 1} \right)^k. \quad (10)$$

Введя обозначения $\sqrt[k]{z_0} = x$, $\sqrt[k]{z_1} = y$, после некоторых преобразований из (10) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (x-1) \left((\theta^2-1) \sum_{r=1}^{k-1} x^r + \theta^2 x^k + \theta y^k + 1 \right) &= 0, \\ \theta^2 x^k y + \theta(y^{k+1} - x^k - 1) + y - y^k &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из первого уравнения этой системы имеем $x = 1$, следовательно, $z_0 = 1$. Тогда из второго уравнения системы (11) получим квадратное уравнение относительно θ :

$$\theta^2 y + \theta(y^{k+1} - 2) + y - y^k = 0, \quad (12)$$

причем его дискриминант

$$D(y) = (y^{k+1} - 2)^2 - 4y(y - y^k) = y^{2k+2} - 4y^2 + 4$$

положителен. Действительно, $D(0) = 4 > 0$. Найдем точку минимума дискриминанта. Имеем $D'(y) = 2y[(k+1)y^{2k} - 4] = 0$, откуда

$$y_{\min} = \sqrt[k]{\frac{4}{k+1}}, \quad D(y_{\min}) = \left(\frac{4}{k+1} \right)^{(k+1)/k} - \left(\frac{4}{k+1} \right)^{1/k} + 4 > 0$$

при любом $k \geq 2$.

Далее, рассмотрим решения уравнения (12):

$$\theta_{1,2} = \frac{2 - y^{k+1} \pm \sqrt{y^{2k+2} - 4y^2 + 4}}{2y} > 1.$$

Следовательно, $y^{k+1} + 2y - 2 < \pm \sqrt{y^{2k+2} - 4y^2 + 4}$.

Рассмотрим два случая. Пусть

$$y^{k+1} + 2y - 2 < \sqrt{y^{2k+2} - 4y^2 + 4}. \quad (13)$$

Тогда, поскольку функция $\alpha(y) = y^{k+1} + 2y - 2$ возрастает при $y > 0$ и $\alpha(0) = -2$, $\alpha(1) = 1$, $\alpha''(y) > 0$, при $y^{k+1} + 2y - 2 \leq 0$ получим решение $0 < y \leq y^* < 1$, где y^* – корень уравнения $\alpha(y) = 0$. Если же $y^{k+1} + 2y - 2 > 0$, то, возведя обе части неравенства (13) в квадрат, получим систему неравенств

$$y^{k+1} + 2y - 2 > 0, \quad (y - 1)(4y^{k+1} + 8y) < 0.$$

Ее решением является интервал $(y^*, 1)$, т. е. при выполнении условия (13) мы получим в качестве решения интервал $(0, 1)$.

Пусть теперь

$$y^{k+1} + 2y - 2 < -\sqrt{y^{2k+2} - 4y^2 + 4}. \quad (14)$$

Тогда, возведя в квадрат это неравенство при $y^{k+1} + 2y - 2 < 0$, будем иметь систему неравенств

$$y^{k+1} + 2y - 2 < 0, \quad (y - 1)(4y^{k+1} + 8y) > 0,$$

которая не имеет решения, так как первое неравенство этой системы выполнено при $y \in (0, y^*)$, где $y^* < 1$, а второе – при $y > 1$.

Таким образом, мы имеем $z_1 \in (0, 1)$. При условии $z_1 \in (0, 1)$ верно и второе уравнение системы (10):

$$z_1 = \left(\frac{\theta z_0 + z_1 + \theta}{\theta^2 z_0 + \theta z_1 + 1} \right)^k < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\theta - 1)(\theta z_0 + z_1 - 1) > 0.$$

Последнее неравенство верно при $z_0 = 1$, $\theta > 1$.

Итак, система уравнений (10) имеет решение вида $z_0 = 1$, $z_1 \in (0, 1)$, следовательно, в случае $m = 2$, $k \geq 2$ все решения системы (9) лежат в инвариантном множестве M_1 .

2. Случай $m = 3$, $k \geq 2$. Система уравнений (9) после введения обозначений $\sqrt[k]{z_0} = x_0$, $\sqrt[k]{z_1} = x_1$, $\sqrt[k]{z_2} = x_2$ принимает вид

$$\begin{aligned} x_0(\theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + 1) &= x_0^k + \theta x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta^3, \\ x_1(\theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + 1) &= \theta x_0^k + x_1^k + \theta x_2^k + \theta^2, \\ x_2(\theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + 1) &= \theta^2 x_0^k + \theta x_1^k + x_2^k + \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

В первом уравнении системы (15) правую часть перенесем в левую и после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}
 & \theta^3(x_0^{k+1} - 1) + x_0 - x_0^k + \theta^2 x_0 x_1^k + \theta x_0 x_2^k - \theta x_1^k - \theta^2 x_2^k = \\
 & = \left[\theta^3 \sum_{r=0}^k x_0^r - \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r + 1 \right] (x_0 - 1) + \\
 & + \theta^2 (x_0 x_1^k - x_1^k + x_1^k - x_2^k) + \theta (x_0 x_2^k - x_2^k + x_2^k - x_1^k) = \\
 & = \left[(\theta^3 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r + \theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + 1 \right] (x_0 - 1) + \\
 & + (\theta^2 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_2^s (x_1 - x_2) = 0.
 \end{aligned}$$

Далее, из второго уравнения системы (15) вычтем третье:

$$(x_1 - x_2)(\theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + 1) = (x_0^k - 1)(\theta - \theta^2) + (1 - \theta)(x_1^k - x_2^k)$$

или, эквивалентно,

$$(\theta^2 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r (x_0 - 1) + \left[\theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + 1 + (\theta - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_2^s \right] (x_1 - x_2) = 0.$$

В итоге получим однородную систему уравнений относительно $x_1 - x_2$ и $x_0 - 1$:

$$\begin{aligned}
 & \left[L + (\theta^3 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \right] (x_0 - 1) + (\theta^2 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_2^s (x_1 - x_2) = 0, \\
 & (\theta^2 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r (x_0 - 1) + \left[L + (\theta - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_2^s \right] (x_1 - x_2) = 0.
 \end{aligned}$$

Ее определитель

$$\left[L + (\theta^3 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \right] \left[L + (\theta - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_2^s \right] - (\theta^2 - \theta)^2 \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_2^s \cdot \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r$$

отличен от нуля при $\theta > 1$, так как

$$(\theta - 1)(\theta^3 - 1) - (\theta^2 - \theta)^2 = (\theta - 1)^2(\theta + 1) > 0.$$

Здесь $L = \theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + 1$. Таким образом, в случае $m = 3$, $k \geq 2$ все решения системы (9) лежат в множестве M_2 .

3. Случай $m = 4$, $k \geq 2$. Введя обозначения $\sqrt[k]{z_j} = x_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, перепишем систему уравнений (9) в виде

$$\begin{aligned}
 x_0(\theta^4 x_0^k + \theta^3 x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta x_3^k + 1) &= x_0^k + \theta x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta^3 x_3^k + \theta^4, \\
 x_1(\theta^4 x_0^k + \theta^3 x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta x_3^k + 1) &= \theta x_0^k + x_1^k + \theta x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta^3, \\
 x_2(\theta^4 x_0^k + \theta^3 x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta x_3^k + 1) &= \theta^2 x_0^k + \theta x_1^k + x_2^k + \theta x_3^k + \theta^2, \\
 x_3(\theta^4 x_0^k + \theta^3 x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta x_3^k + 1) &= \theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + x_3^k + \theta.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Преобразуем первое уравнение этой системы, как в предыдущем случае, а из второго уравнения вычтем четвертое. В результате получим однородную систему уравнений относительно $x_0 - 1$ и $x_1 - x_3$:

$$\begin{aligned} \left[L_1 + (\theta^4 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \right] (x_0 - 1) + (\theta^3 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_3^s (x_1 - x_3) &= 0, \\ (\theta^3 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r (x_0 - 1) + \left[L_1 + (\theta^2 - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_3^s \right] (x_1 - x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} L_1 + (\theta^4 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r & (\theta^3 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_3^s \\ (\theta^3 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r & L_1 + (\theta^2 - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_3^s \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при $\theta > 1$, а точнее, строго больше нуля, так как

$$(\theta^4 - 1)(\theta^2 - 1) - (\theta^3 - \theta)^2 = (\theta^2 - 1)^2 > 0.$$

Здесь $L_1 = \theta^4 x_0^k + \theta^3 x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta x_3^k + 1$. Следовательно, в случае $m = 4$, $k \geq 2$ система уравнений (9) имеет только решения вида $z_0 = 1$, $z_1 = z_3$, т. е. все решения лежат в инвариантном множестве M_3 .

4. Случай $m = 5$, $k \geq 2$. Аналогично предыдущему случаю, введя обозначения $\sqrt[k]{z_j} = x_j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, перепишем систему уравнений (9) как

$$\begin{aligned} x_0(\theta^5 x_0^k + \theta^4 x_1^k + \theta^3 x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta x_4^k + 1) &= x_0^k + \theta x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta^3 x_3^k + \theta^4 x_4^k + \theta^5, \\ x_1(\theta^5 x_0^k + \theta^4 x_1^k + \theta^3 x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta x_4^k + 1) &= \theta x_0^k + x_1^k + \theta x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta^3 x_4^k + \theta^4, \\ x_2(\theta^5 x_0^k + \theta^4 x_1^k + \theta^3 x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta x_4^k + 1) &= \theta^2 x_0^k + \theta x_1^k + x_2^k + \theta x_3^k + \theta^2 x_4^k + \theta^3, \\ x_3(\theta^5 x_0^k + \theta^4 x_1^k + \theta^3 x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta x_4^k + 1) &= \theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + x_3^k + \theta x_4^k + \theta^2, \\ x_4(\theta^5 x_0^k + \theta^4 x_1^k + \theta^3 x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta x_4^k + 1) &= \theta^4 x_0^k + \theta^3 x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta x_3^k + x_4^k + \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

В первом уравнении этой системы правую часть перенесем в левую и сделаем некоторые преобразования, получим

$$\begin{aligned} &\theta^5(x_0^{k+1} - 1) + x_0 - x_0^k + \theta^4(x_0 x_1^k - x_4^k) + \\ &\quad + \theta^3(x_0 x_2^k - x_3^k) + \theta^2(x_0 x_3^k - x_2^k) + \theta(x_0 x_4^k - x_1^k) = \\ &= \left[\theta^5 \sum_{r=0}^k x_0^r - x_0 \sum_{r=0}^{k-2} x_0^r \right] (x_0 - 1) + \theta^4(x_0 x_1^k - x_1^k + x_1^k - x_4^k) + \\ &\quad + \theta^3(x_0 x_2^k - x_2^k + x_2^k - x_3^k) + \theta^2(x_0 x_3^k - x_3^k + x_3^k - x_2^k) + \theta(x_0 x_4^k - x_4^k + x_4^k - x_1^k) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\theta^5 x_0^k + (\theta^5 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r + 1 \right] (x_0 - 1) + \theta^4 \left[x_1^k (x_0 - 1) + (x_1 - x_4) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s \right] + \\
 &+ \theta^3 \left[x_2^k (x_0 - 1) + (x_2 - x_3) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s \right] + \\
 &+ \theta^2 \left[x_3^k (x_0 - 1) + (x_3 - x_2) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s \right] + \\
 &+ \theta \left[x_4^k (x_0 - 1) + (x_4 - x_1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s \right] = 0
 \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned}
 &\left[L_2 + (\theta^5 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \right] (x_0 - 1) + (\theta^4 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s (x_1 - x_4) + \\
 &+ (\theta^3 - \theta^2) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s (x_2 - x_3) = 0,
 \end{aligned}$$

где $L_2 = \theta^5 x_0^k + \theta^4 x_1^k + \theta^3 x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta x_4^k + 1$. Далее, из второго уравнения системы (17) вычтем пятое, из третьего – четвертое и в результате получим однородную систему уравнений относительно $x_0 - 1$, $x_1 - x_4$ и $x_2 - x_3$:

$$\begin{aligned}
 &\left[L_2 + (\theta^5 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \right] (x_0 - 1) + (\theta^4 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s (x_1 - x_4) + \\
 &+ (\theta^3 - \theta^2) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s (x_2 - x_3) = 0, \\
 &(\theta^4 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r (x_0 - 1) + \left[L_2 + (\theta^3 - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s \right] (x_1 - x_4) + \\
 &+ (\theta^2 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s (x_2 - x_3) = 0, \\
 &(\theta^3 - \theta^2) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r (x_0 - 1) + (\theta^2 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s (x_1 - x_4) + \\
 &+ \left[L_2 + (\theta - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s \right] (x_2 - x_3) = 0.
 \end{aligned}$$

Легко проверить, что определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}
 L_2 + (\theta^5 - 1) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r & (\theta^4 - \theta) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s & (\theta^3 - \theta^2) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s \\
 (\theta^4 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r & L_2 + (\theta^3 - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s & (\theta^2 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s \\
 (\theta^3 - \theta^2) \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r & (\theta^2 - \theta) \sum_{r=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s & L_2 + (\theta - 1) \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s
 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при $\theta > 1$, так как коэффициент при $L_2 \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \cdot \sum_{s=0}^{k-1} x_2^{k-1-s} x_3^s$ равен

$$(\theta^5 - 1)(\theta - 1) - (\theta^3 - \theta^2)^2 = (\theta - 1)^2(\theta^3 + \theta^2 + \theta + 1) > 0,$$

коэффициент при $L_2 \sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \cdot \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s$ равен

$$(\theta^3 - 1)(\theta^5 - 1) - (\theta^4 - \theta)^2 = (\theta - 1)^2(\theta^2 + \theta + 1)(\theta^4 + \theta^3 + \theta + 1) > 0,$$

коэффициент при $L_2 \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s \cdot \sum_{l=0}^{k-1} x_2^{k-1-l} x_3^l$ равен

$$(\theta^3 - 1)(\theta - 1) - (\theta^2 - \theta)^2 = (\theta - 1)^2 > 0,$$

и наконец, коэффициент при $\sum_{r=0}^{k-1} x_0^r \cdot \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_4^s \cdot \sum_{l=0}^{k-1} x_2^{k-1-l} x_3^l$ равен

$$(\theta - 1)(\theta^3 - 1)(\theta^5 - 1) + 2(\theta^2 - \theta)(\theta^3 - \theta^2)(\theta^4 - \theta) - (\theta^3 - \theta)(\theta^3 - \theta^2)^2 - \\ - (\theta - 1)(\theta^4 - \theta)^2 - (\theta^5 - 1)(\theta^2 - \theta)^2 = (\theta - 1)^3(\theta^4 + \theta^2 + 2\theta + 1) > 0,$$

а остальные слагаемые положительны. Итак, в случае $m = 5$, $k \geq 2$ система уравнений (9) имеет только решения вида $z_0 = 1$, $z_1 = z_4$, $z_2 = z_3$.

5. Случай $m = 6$, $k \geq 2$. Введя обозначения $\sqrt[k]{z_j} = x_j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, перепишем систему уравнений (9) как

$$\begin{aligned} x_0(\theta^6 x_0^k + \theta^5 x_1^k + \dots + \theta x_5^k + 1) &= x_0^k + \theta x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta^3 x_3^k + \theta^4 x_4^k + \theta^5 x_5^k + \theta^6, \\ x_1(\theta^6 x_0^k + \theta^5 x_1^k + \dots + \theta x_5^k + 1) &= \theta x_0^k + x_1^k + \theta x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta^3 x_4^k + \theta^4 x_5^k + \theta^5, \\ x_2(\theta^6 x_0^k + \theta^5 x_1^k + \dots + \theta x_5^k + 1) &= \theta^2 x_0^k + \theta x_1^k + x_2^k + \theta x_3^k + \theta^2 x_4^k + \theta^3 x_5^k + \theta^4, \\ x_3(\theta^6 x_0^k + \theta^5 x_1^k + \dots + \theta x_5^k + 1) &= \theta^3 x_0^k + \theta^2 x_1^k + \theta x_2^k + x_3^k + \theta x_4^k + \theta^2 x_5^k + \theta^3, \\ x_4(\theta^6 x_0^k + \theta^5 x_1^k + \dots + \theta x_5^k + 1) &= \theta^4 x_0^k + \theta^3 x_1^k + \theta^2 x_2^k + \theta x_3^k + x_4^k + \theta x_5^k + \theta^2, \\ x_5(\theta^6 x_0^k + \theta^5 x_1^k + \dots + \theta x_5^k + 1) &= \theta^5 x_0^k + \theta^4 x_1^k + \theta^3 x_2^k + \theta^2 x_3^k + \theta x_4^k + x_5^k + \theta. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим случаям в этой системе уравнений преобразуем первое уравнение и вычтем из второго уравнения шестое, а из третьего – пятое. В результате получим однородную систему уравнений относительно $x_0 - 1$, $x_1 - x_5$ и $x_2 - x_4$, определитель которой имеет вид

$$\begin{vmatrix} L_3 + (\theta^6 - 1)a & (\theta^5 - \theta)b & (\theta^4 - \theta^2)c \\ (\theta^5 - \theta)a & L_3 + (\theta^4 - 1)b & (\theta^3 - \theta)c \\ (\theta^4 - \theta^2)a & (\theta^3 - \theta)b & L_3 + (\theta^2 - 1)c \end{vmatrix},$$

где

$$a = \sum_{r=1}^{k-1} x_0^r, \quad b = \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-1-s} x_5^s, \quad c = \sum_{l=0}^{k-1} x_2^{k-1-l} x_4^l$$

и $L_3 = \theta^6 x_0^k + \theta^5 x_1^k + \dots + \theta x_5^k + 1$. Легко проверить, что этот определитель больше нуля при $\theta > 1$. Следовательно, в случае $m = 6$, $k \geq 2$ система уравнений (9) имеет решения, которые лежат в инвариантном множестве M_5 . Теорема доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $m = 2, 3, 4, 5, 6$ все трансляционно-инвариантные меры Гиббса модели SOS соответствуют решениям системы (9), которые лежат в инвариантных множествах M_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, соответственно.

Благодарности. Автор благодарит профессора У.А. Розикова за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] C. J. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, *ДАН РУз*, **6–7** (1992), 4–7.
- [7] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [8] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.
- [9] F. S. de Aguiar, F. A. Bosco, A. S. Martinez, R. S. Goulart, Jr., *J. Statist. Phys.*, **58**:5–6 (1990), 1231–1238.
- [10] F. S. de Aguiar, L. B. Bernardes, R. S. Goulart, Jr., *J. Statist. Phys.*, **64**:3–4 (1991), 673–682.
- [11] А. В. Бакаев, А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов, *Докл. АН СССР*, **299**:3 (1988), 603–606.
- [12] F. Wagner, D. Gensburg, J. Heide, *J. Phys. A*, **34**:50 (2001), 11261–11272.
- [13] А. Е. Мазел, Ю. М. Сухов, *J. Statist. Phys.*, **64**:1–2 (1991), 111–134.
- [14] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:3 (2006), 471–488.
- [15] У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, *ТМФ*, **175**:2 (2013), 300–312.

Поступила в редакцию 2.10.2013