Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Агуайо, М. Сааведра, М. Валлас, Притягивающие и отталкивающие точки аналитических динамических систем нескольких переменных в неархимедовой постановке, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 2, 329–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:12:43

© 2004 г. Х. Агуайо*, М. Сааведра*, М. Валлас*

ПРЯТЯГИВАЮЩИЕ И ОТТАЛКИВАЮЩИЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В НЕАРХИМЕДОВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Изучаются дискретные аналитические динамические системы нескольких переменных над полным неархимедовым полем с нетривиальной нормой. Получены достаточные условия того, что неподвижная точка является притягивающей, отталкивающей или нейтральной точкой.

Ключевые слова: p -адические числа, неархимедовы динамические системы, неподвижная точка, притягивающая точка (аттрактор), отталкивающая точка, диск Зигеля.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

С начала XX века математики развили ряд теорий над полями, отличными от системы вещественных чисел. Нормы в таких полях не удовлетворяют аксиоме Архимеда, т.е. множество натуральных чисел в них является ограниченным.

Одной из новых теорий над неархимедовыми полями является теория p -адических динамических систем и хаоса. В настоящее время уже имеется ряд исследований в этом направлении. Наиболее раннее исследование на данную тему появилось в 1983 г. и принадлежит Херману и Йоккозу [1]. Поведение p -адических динамических систем резко отличается от поведения соответствующих динамических систем над полем вещественных чисел. Помимо обычных структур, таких как притягивающие множества (аттракторы), отталкивающие множества, центры дисков Зигеля и циклы, появляются существенно новые объекты, такие как нечеткие циклы.

Математическая теория p -адических динамических систем применяется в биологии, экономике, физике и т.д. В биологии, например, Хренников предложил p -адическую модель роста популяции, в которой конкурентная борьба отдельных групп популяции, имеющих экспоненциальный рост, приводит к ограниченному росту всей биологической популяции в целом [2]. Эта модель основана на свойствах равномерного распределения так называемых p -адических целых чисел (кольца $\mathbb{Z}_p$) в поле $\mathbb{Q}_p$.

*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, Concepción, Chile. E-mail: jaguayo@udec.cl

В работе [2] Хренников глубоко развил теорию дискретных p -адических динамических систем одной переменной. Он провел полное исследование мономиальных динамических систем над неархимедовым полем, указав условия существования притягивающих точек (аттракторов), отталкивающих точек, центров дисков Зигеля и циклов.

Настоящая работа посвящена распространению результатов Хренникова [2] на случай дискретной p -адической динамической системы нескольких переменных.

Основное утверждение настоящей работы представлено в разделе 2 и заключается в классификации неподвижных точек дискретной динамической системы нескольких переменных на притягивающие, нейтральные и отталкивающие точки. Полученный результат иллюстрируется несколькими примерами.

Основные обозначения и свойства неархимедовых полей можно найти в книге [3]. Обозначим через $\mathbb{K}$ неархимедово поле с нетривиальной нормой, которое является полным

в метрике, индуцированной этой нормой $|\cdot|$. Множество $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}^n$ есть неархимедово банахово пространство с неархимедовой нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Топология, индуцированная нормой $\|\cdot\|$, является нульмерной топологией. Это означает, что данная топология имеет базу открыто-замкнутых множеств. Под открыто-замкнутыми множествами понимаются такие множества, которые являются открытыми и замкнутыми одновременно.

Для заданной точки $a \in \mathbb{K}^n$ через $U_R^-(a) = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x - a\| < R\}$ обозначим открытый шар с центром в a радиуса R , через $U_R(a) = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x - a\| \leq R\}$ — замкнутый шар с центром в a радиуса R и через $S_R(a) = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x - a\| = R\}$ — сферу с центром в a радиуса R . Все эти множества являются открыто-замкнутыми в $\mathbb{K}^n$. Мы будем рассматривать только шары радиуса R , где R принадлежит множеству $\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$.

Если U — замкнутый шар в $\mathbb{K}^n$, то функция $f: U \rightarrow \mathbb{K}$ называется *аналитической*, если существуют $a \in U$ и $c_\alpha(a) = c_\alpha \in \mathbb{K}$ такие, что для любого $x \in U$

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(a)(x - a)^{\alpha},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, причем ряд сходится на U равномерно.

Хорошо известно, что ряд $\sum_n a_n$ сходится безусловно, т.е. ряд вида $\sum_n a_{\sigma(n)}$, где σ — некоторая перестановка $\mathbb{N}$, сходится к той же сумме. Кроме того, функция f может быть представлена рядом вида

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}(b)(x - b)^{\alpha},$$

где b — произвольная точка U [4].

В настоящей работе рассматривается дискретная динамическая система:

$$U \rightarrow U, \quad x \mapsto F(x),$$

где U — замкнутый шар в $\mathbb{K}^n$ радиуса R и $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — функция (отображение), аналитическая на U , т.е. по определению все функции f_i являются аналитическими.

Пусть $a \in U$ и для $j = 1, \dots, n$

$$f_j(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^j (x - a)^{\alpha}, \quad x \in U,$$

где $\{c_{\alpha}^j\}$ — последовательность в $\mathbb{K}$.

Обозначим через $JF(a)$ матрицу Якоби отображения F в точке a и определим

$$\|JF(a)\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right|,$$

где $\partial f_j / \partial x_i|_a = c_{\alpha}(a)$ и $\alpha = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_i, 0, \dots)$.

Мы будем использовать принятую в теории динамических систем терминологию. Точка $a \in U$ называется *неподвижной точкой* отображения F , если $F(a) = a$. Неподвижная точка a отображения F называется *притягивающей точкой* (*аттрактором*), если существует окрестность $V \subset U$ точки a такая, что все точки $x \in V$ притягиваются точкой a , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = a,$$

где $F^n = \overbrace{F \circ \dots \circ F}^n$. Область притяжения аттрактора a определяется следующим образом:

$$A(a) = \{x \in U: \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = a\}.$$

Неподвижная точка отображения F называется *отталкивающей точкой*, если существует окрестность $V \subset U$ точки a такая, что для всех точек $x \in V$, $x \neq a$,

$$\|F(x) - a\| > \|x - a\|.$$

Если a — неподвижная точка отображения F , то *диск Зигеля* отображения F в точке a есть содержащийся в U открытый шар $U_R^-(a)$ такой, что каждая сфера $S_{\rho}(a)$, $\rho < R$, является инвариантной относительно отображения F . Последнее означает, что если выбрать некоторую начальную точку на одной из сфер $S_{\rho}(a)$, то все итерации данной точки также будут лежать на этой сфере. Объединение всех дисков Зигеля с центром a называется *максимальным диском Зигеля*. Обозначим максимальный диск Зигеля через $SI(a)$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

ЛЕММА 1. Пусть $F: U \rightarrow U$ — аналитическая функция и $a \in U$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \max_{1 \leq j \leq n} \max_{|\alpha| \geq 2} |c_{\alpha}^j| r^{|\alpha|-1} = 0,$$

где c_α^j соответствуют представлению каждой функции f_j в виде ряда. Если при $\|JF(a)\| \neq 0$ для $r > 0$ выполнено неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} \max_{|\alpha| \geq 2} |c_\alpha^j| r^{|\alpha|-1} \leq \|JF(a)\|$$

и $U_r(a) \subset U$, то:

- 1) $\|F(x) - F(u)\| \leq \|JF(a)\| \|x - u\|$ для всех $x, u \in U_r(a)$;
- 2) $\|F(x) - F(u)\| = \|JF(a)\| \|x - u\|$ для всех $x, u \in U_r(a)$, когда $JF(a)$ удовлетворяет условию леммы 2 (см. приложение).

ТЕОРЕМА. Пусть $F: U \rightarrow U$ — аналитическая функция. Предположим, что $a \in U$ — неподвижная точка F . Имеют место следующие утверждения.

1. Если $\|JF(a)\| < 1$, то a является притягивающей точкой. Кроме того, если $r > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{1 \leq j \leq n} \max_{|\alpha| \geq 2} |c_\alpha^j| r^{|\alpha|-1} < 1 \quad (1)$$

и $U_r(a) \subset U$, то $U_r(a) \subset A(a)$.

2. Если $\|JF(a)\| = 1$ и $JF(a)$ удовлетворяет условиям леммы 2, то a является центром диска Зигеля. Если $r > 0$ удовлетворяет неравенству (1) и $U_r(a) \subset U$, то $U_r(a) \subset SI(a)$.

3. Если $\|JF(a)\| > 1$ и $JF(a)$ удовлетворяет условиям леммы 2, то a является отталкивающей точкой динамической системы F .

Следующие примеры иллюстрируют применение теоремы.

Пусть n, m — два заданных натуральных числа. Для простого числа $p \in \mathbb{N}$ определим дискретную динамическую систему

$$\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p, \quad (x, y) \rightarrow F(x, y) = (x^m, y^n).$$

Матрица Якоби отображения F в неподвижной точке $(0, 0)$ есть нулевая матрица. Поэтому точка $(0, 0)$ является притягивающей точкой отображения F .

Рассмотрим неподвижные точки (a, b) , где a и b суть корни из единицы степени $m - 1$ и $n - 1$, соответственно. Тогда

$$JF(a, b) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

и

$$\|JF(a, b)\| = \max\{|m|_p, |n|_p\}.$$

Если $(m, p) = 1$ и $(n, p) = 1$, то $JF(a, b)$ удовлетворяет условиям п. 2 теоремы и поэтому (a, b) является центром диска Зигеля. Между тем, если $(m, p) \neq 1$ и $(n, p) \neq 1$, то $JF(a, b)$ удовлетворяет условиям п. 1 теоремы и в этом случае (a, b) является притягивающей точкой.

Если рассмотреть теперь дискретную динамическую систему

$$\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p, \quad (x, y) \rightarrow G(x, y) = \left(x + \frac{1}{p}y, \frac{1}{p}x + y \right),$$

то единственной неподвижной точкой отображения G является точка $(0, 0)$ и матрица Якоби

$$JG(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1/p \\ 1/p & 1 \end{pmatrix}$$

такова, что $\|JG(0, 0)\| = p > 1$. Поэтому в силу п. 3 теоремы точка $(0, 0)$ является отталкивающей неподвижной точкой отображения G .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 1 И ТЕОРЕМЫ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Будем предполагать без потери общности, что $a = \theta$. Рассмотрим некоторую координатную функцию f_j отображения F . В таком случае $f_j(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^j x^{\alpha}$, $x \in U$. Положим

$$\sigma_j(r) = \max_{2 \leq |\alpha| < \infty} |c_{\alpha}^j| r^{|\alpha|-2}, \quad r > 0. \quad (2)$$

В силу аналитичности функции f_j на U имеем

$$\sigma_j(R) \leq \frac{\|f_j\|_R}{R^2} < \infty, \quad \|f_j\|_R = \max_{1 \leq |\alpha| < \infty} |c_{\alpha}^j| R^{|\alpha|}.$$

Поскольку $\sigma_j(r) \leq \sigma_j(R)$ при $r < R$, получаем

$$r\sigma_j(r) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0,$$

и первая часть леммы доказана.

Возьмем теперь $r > 0$ так, чтобы $U_r(\theta) \subset U$ и

$$\max_{1 \leq j \leq n} \max_{|\alpha| \geq 2} |c_{\alpha}^j| r^{|\alpha|-1} \leq \|JF(\theta)\|. \quad (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} f_j(x) - f_j(u) &= \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} c_{\alpha}^j [x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} - u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}] = \\ &= \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} c_{\alpha}^j \sum_{i=1}^n (x_i^{\alpha_i} - u_i^{\alpha_i}) u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_i-1} x_1^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n} = \\ &= \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} c_{\alpha}^j \sum_{i=1}^n (x_i - u_i) (x_i^{\alpha_i-1} + x_i^{\alpha_i-2} u_i + \dots + u_i^{\alpha_i-1}) \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{i-1} u_i^{\alpha_k} \prod_{k=i+1}^n x_i^{\alpha_k} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} c_{\alpha}^j (x_i^{\alpha_i-1} + x_i^{\alpha_i-2} u_i + \dots + u_i^{\alpha_i-1}) \prod_{k=1}^{i-1} u_i^{\alpha_k} \prod_{k=i+1}^n x_i^{\alpha_k} \right] (x_i - u_i).$$

Следовательно,

$$f_j(x) - f_j(u) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + T_{i,j}(x, u) \right] (x_i - u_i), \quad (4)$$

где

$$T_{i,j}(x, u) = \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} c_{\alpha}^j (x_i^{\alpha_i-1} + x_i^{\alpha_i-2} u_i + \dots + u_i^{\alpha_i-1}) \prod_{k=1}^{i-1} u_i^{\alpha_k} \prod_{k=i+1}^n x_i^{\alpha_k}.$$

Поэтому

$$|T_{i,j}(x, u)| \leq \max_{2 \leq |\alpha| < \infty} |c_{\alpha}^j| r^{|\alpha|-1} \quad \forall x, u \in U_r(\theta). \quad (5)$$

Следовательно, из (3) имеем

$$|T_{i,j}(x, u)| < \|JF(\theta)\| \quad (6)$$

для любых $x, u \in U_r(\theta)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(u)\| &= \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(x) - f_j(u)| = \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + T_{i,j}(x, u) \right] (x_i - u_i) \right| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + T_{i,j}(x, u) \right| |x_i - u_i| \right) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|JF(\theta)\| |x_i - u_i| = \|JF(\theta)\| \|x - u\| \end{aligned}$$

для всех $x, u \in U_r(\theta)$.

Предположим теперь, что $JF(\theta)$ удовлетворяет условиям леммы 2 (см. приложение). Возьмем $x, u \in U_r(\theta)$; мы знаем, что для $j = 1, \dots, n$ имеет место равенство (4). Положим

$$\widetilde{a_{i,j}} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + T_{i,j}(x, u).$$

Из (6) следует, что

$$\text{если } \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) \right| < \|JF(\theta)\|, \quad \text{то } |\widetilde{a_{i,j}}| = \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + T_{i,j}(x, u) \right| < \|JF(\theta)\|,$$

или

$$\text{если } \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) \right| = \|JF(\theta)\|, \quad \text{то } |\widetilde{a_{i,j}}| = \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + T_{i,j}(x, u) \right| = \|JF(\theta)\|.$$

Тогда, применяя лемму 2 к оператору $\tilde{A} = (\widetilde{a_{i,j}})$, получаем

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(u)\| &= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\theta) + T_{i,j}(x, u) \right] (x_i - u_i) \right| = \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^n \widetilde{a_{i,j}}(x_i - u_i) \right| = \|\tilde{A}(x - u)\| = \|Jf(\theta)\| \|x - u\|.\end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Положим $q = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{|\alpha| \geq 1} |c_\alpha^j| r^{|\alpha|-1}$. Имеем (см. (2))

$$q = \max_{1 \leq j \leq n} \{ \|JF(a)\|, |c_\alpha^j| r^{|\alpha|-1} : |\alpha| \geq 2 \} = \max_{1 \leq j \leq n} \{ \|JF(a)\|, r\sigma_j(r) \}.$$

Поскольку $\max_{1 \leq j \leq n} r\sigma_j(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, мы получаем $r > 0$, что удовлетворяет (1), т.е. $q < 1$ и $U_r(a) \subset U$. Если $x, u \in U_r(a)$, то, пользуясь соотношениями (4) и (5), получим

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(u)\| &= \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(x) - f_j(u)| = |f_{j_0}(x) - f_{j_0}(u)| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial f_{j_0}}{\partial x_i}(a) + T_{i,j_0}(x, u) \right| |x_i - u_i| \leq q \|x - u\|,\end{aligned}$$

где $j_0 \in \{1, \dots, n\}$. Если $u = a$, имеем

$$\|F^m(x) - a\| \leq q^m \|x - a\| \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N} \text{ и } x \in U_r(a).$$

Поэтому a является притягивающей точкой отображения F и $U_r(a) \subset A(a)$.

Второе и третье утверждения теоремы прямо следуют из леммы 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сформулируем и докажем лемму, использованную в разделе 3. Заметим, что если $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ и $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, то, используя типичные для неархимедова случая рассуждения, легко доказать следующие утверждения. Если существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $|a_j| < |a_i|$ и $|x_j| \leq |x_i|$ для всех $j \neq i$, то

$$|a_1 + \dots + a_n| = |a_i|$$

и

$$|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n| = |a_i x_i|.$$

ЛЕММА 2. Пусть $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ – линейное отображение и $A = (a_{ij})$ – матрица этого отображения в каноническом базисе. Пусть $\|A\| > 0$, а для некоторой перестановки σ чисел $\{1, \dots, n\}$

$$|a_{1\sigma(1)}| = |a_{2\sigma(2)}| = \dots = |a_{n\sigma(n)}| = \|A\|$$

и

$$|a_{ij}| < \|A\|$$

для $j \neq \sigma(i)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для любого $x \in \mathbb{K}^n$ справедливо равенство

$$\|Tx\| = \|A\| \|x\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $x \in \mathbb{K}^n$ и $\|x\| = 1$. Тогда

$$\|Tx\| = \|Ax\| = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n|}_{b_i} = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|.$$

Очевидно, $|b_i| \leq \|A\|$. Далее, существует $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\|x\| = |x_{j_0}| = 1$. С другой стороны, выберем $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\sigma(i_0) = j_0$; следовательно, согласно предположениям,

$$|a_{i_0 j_0} x_{j_0}| = |a_{i_0 \sigma(i_0)} x_{j_0}| = \|A\|$$

и

$$|a_{i_0 j} x_j| < \|A\|$$

для $j \neq j_0$. Поэтому можно сделать заключение, что

$$|b_{i_0}| = |a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + \dots + a_{i_0 n}x_n| = \|A\|.$$

Если $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{\theta\}$, то $\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = |x_{i_0}|$; следовательно, $y = x/x_{i_0}$ такое, что $\|y\| = 1$, и тогда

$$\|A\| = \|Ty\| = \left\| T\left(\frac{1}{x_{i_0}}x\right) \right\|,$$

откуда следует

$$\|Tx\| = \|A\| \|x\|.$$

Благодарности. Мы благодарны профессору А. Хренникову, который предложил нам эту задачу во время посещения университета города Консепсьон. Работа была поддержана Proyecto DIUC № 202015017-1.0, Universidad de Concepción.

Список литературы

- [1] *M. R. Herman, J.-C. Yoccoz.* Generalizations of some theorems of small divisors to non-archimedean fields. In: Geometric Dynamics. Proc. of the Intern. Symp. (Rio de Janeiro, 1981). Lect. Notes in Math. V. 1007. Ed. J. Palis, Jr. Berlin–New York: Springer, 1983. P. 408–447.
- [2] *A. Yu. Khrennikov (ed.).* Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [3] *W. H. Schikhof.* Ultrametric Calculus. An Introduction to p -Adic Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [4] *A. Yu. Khrennikov.* p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer, 1994.

Поступила в редакцию 29.X.2003 г.