Общероссийский математический портал

Н. В. Зверев, А. А. Славнов, Нелокальные решеточные модели фермионов на
двумерном торе, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 1, 93–105

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf860>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 09:07:47

НЕЛОКАЛЬНЫЕ РЕШЕТОЧНЫЕ МОДЕЛИ ФЕРМИОНОВ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

Рассмотрены абелевы фермионные модели на двумерной конечной решетке, описываемые SLAC-действием. Показано, что модификация векторных $U(1)$ -моделей посредством введения дополнительной регуляризации Паули–Вилларса подавляет нелокальные эффекты и обеспечивает согласие с результатами непрерывной теории. В случае киральных фермионов фаза решеточного детерминанта отличается от фазы в непрерывной теории.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно в работе [1] были рассмотрены решеточные фермионные модели на двумерной конечной решетке, описываемые вильсоновским действием с дополнительной регуляризацией Паули–Вилларса (ПВ). Было показано, что эффекты нарушения киральной симметрии при конечном шаге решетки a оказываются подавленными регуляризацией ПВ, что обеспечивает хорошее согласие решеточных моделей с непрерывными теориями как в пертурбативной, так и в непертурбативной областях. В то же время из-за отсутствия киральной симметрии для достижения хорошего согласия с непрерывной теорией в случае сильных внешних полей необходимо большое число узлов решетки. Поэтому желательно иметь такую формулировку решеточных моделей, которая сохраняла бы киральную симметрию в случае конечного шага решетки.

Согласно “no-go”-теореме [2] невозможна какая-либо локальная формулировка, сохраняющая киральную симметрию. Поэтому мы рассмотрим нелокальную SLAC-модель, впервые предложенную в работе [3]. Известно, что исходная формулировка этой модели требует введения нелокальных контрчленов [4, 5], что делает ее неудобной для практических вычислений. Однако данная модель может быть усовершенствована так же, как это уже было сделано для вильсоновского действия путем введения дополнительной калибровочно-инвариантной регуляризации, которая подавляет вклад импульсов вблизи границы зоны Бриллюэна. Было показано [6], что для неаномальных моделей на бесконечной решетке в рамках теории возмущений таким образом могут быть

* Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

подавлены все нелокальные эффекты, что обеспечивает кирально-инвариантную формулировку модели.

Целью данной работы является проверка результатов работы [6] для моделей на двумерной конечной решетке как в пертурбативной, так и в непертурбативной областях. В случае векторных моделей рассматриваемый подход приводит к разумному согласию с непрерывными результатами. В то же время для киральных фермионов, даже когда пертурбативная аномалия отсутствует, наблюдается несоответствие значений фазы решеточного и непрерывного детерминантов. Причина такого различия обсуждается.

2. ВЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ НА РЕШЕТКЕ

В данном разделе мы рассмотрим векторную модель, описываемую действием [3]

$$I_{VS} = \sum_{x,y,\mu} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu(x-y) \exp \left[i \sum_{z_\mu=x_\mu}^{y_\mu} A_\mu(z) \right] \psi(y), \quad (1)$$

здесь $-N/2 + 1 \leq x_\mu \leq N/2$, $\mu = 0, 1$. Шаг решетки a выбран равным 1. Ограничимся случаем постоянного внешнего поля

$$A_\mu = \frac{2\pi}{N} h_\mu, \quad h_\mu = \text{const.}$$

Фермионное поле ψ удовлетворяет антипериодическим граничным условиям. $\mathcal{D}_\mu(x)$ – решеточная (SLAC) производная:

$$\mathcal{D}_\mu(x) = \frac{1}{N^2} \sum_{p=-N/2+1}^{N/2} i \mathcal{P}_\mu(p) \exp \left[\frac{2\pi i}{N} \left(p - \frac{1}{2} \right) x \right],$$

где

$$\mathcal{P}_\mu(p) = \frac{2\pi}{N} \left(p_\mu - \frac{1}{2} \right), \quad -N/2 + 1 \leq p_\mu - mN \leq N/2, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Действие (1) калибровочно-инвариантно, но нелокально.

Прямые вычисления дают следующее выражение для векторного фермионного детерминанта, нормированного на 1 при $h = 0$:

$$D_{VS} = \prod_{p=-N/2+1}^{N/2} \frac{B^2(p, h)}{B^2(p, 0)}, \quad (2)$$

где

$$B^2(p, h) = \sum_{\mu=0}^1 B_\mu^2(p, h),$$

Рис. 1

B_μ – фурье-образ ковариантной производной:

$$B_\mu(p, h) = \frac{\pi}{N} \sum_{\substack{z=-N/2+1 \\ z \neq 0}}^{N/2} (-1)^{z+1} \frac{\sin \left[\frac{2\pi}{N} \left(p_\mu - h_\mu - \frac{1}{2} \right) z \right]}{\sin \frac{\pi z}{N}}. \quad (3)$$

Зависимость $B_\mu/2\pi$ от $(p_\mu - h_\mu - 1/2)/N$ при $N = 16$ (пунктирная линия) и $N = 160$ (сплошная линия) представлена на рис. 1. Видно, что на конечной решетке пилообразная форма SLAC-производной сглажена и в отличие от случая бесконечной решетки может быть аппроксимирована непрерывной кривой. Этот факт нам будет важен в дальнейшем.

Решеточный детерминант (2) будем сравнивать с детерминантом в непрерывной теории [7–9]

$$D_{\text{VC}} = e^{-2\pi h_1^2} \prod_{n=1}^{\infty} |F[n, h] F[n, -h]|^2, \quad (4)$$

где

$$F[n, h] = \frac{1 + e^{-2\pi(n-1/2)+2\pi i(h_0+i h_1)}}{1 + e^{-2\pi(n-1/2)}}.$$

Детерминанты (2), (4) удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$D[h_0, h_1] = D[h_1, h_0] = D[-h_0, h_1] = D[h_0 + n_0, h_1 + n_1],$$

где $n_0, n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Поэтому поля h_μ достаточно рассмотреть в диапазоне $0 \leq h_0 \leq h_1 \leq 1/2$.

Рис. 2

С помощью соотношения (2) можно легко выписать выражение для диаграмм с двумя и более внешними h -линиями. Оно выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial h_\mu \partial h_\nu} \ln D_{VS} = \sum_{p=-N/2+1}^{N/2} \left\{ 2\delta_{\mu\nu} \frac{B'_\mu{}^2(p, h) + B_\mu(p, h)B''_\mu(p, h)}{B^2(p, h)} - \frac{4B_\mu(p, h)B'_\mu(p, h)B_\nu(p, h)B'_\nu(p, h)}{B^4(p, h)} \right\}, \quad (5)$$

где $'$ означает дифференцирование по h . Мы хотим исследовать поведение различных диаграмм в пределе $N \rightarrow \infty$. С использованием соотношений (3) и (5) были выполнены компьютерные вычисления диаграмм второго и четвертого порядков в зависимости от N при внешнем импульсе $k = 0$. Полученные результаты представлены на рис. 2. Видно, что поляризационный оператор $\Pi_{VS}(0)$ (кривая 1) и диаграмма с четырьмя внешними линиями $\Gamma_{0000}(0)$ (кривая 2) расходятся пропорционально N . Кривая 3 отвечает диаграмме с четырьмя внешними линиями $\Gamma_{0101}(0)$. Данные вычисления показывают, что SLAC-действие не приводит к правильному непрерывному пределу. В отличие от непрерывной теории перенормировка массы недостаточна для устранения всех расходимостей, поскольку диаграммы с более чем двумя внешними линиями расходятся в пределе $N \rightarrow \infty$.

Попытаемся усовершенствовать модель, вводя дополнительную регуляризацию ПВ

Рис. 3

согласно работе [6]. Регуляризованное действие выглядит следующим образом:

$$I_{VR} = I_{VS} + I_{PV},$$

$$I_{PV} = \sum_r \left\{ \sum_{x,y,\mu} \bar{\phi}_r(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu(x-y) \exp \left[i \sum_{z_\mu=x_\mu}^{y_\mu} A_\mu(z) \right] \phi_r(y) + \right.$$

$$\left. + \sum_x M_r \bar{\phi}_r(x) \phi_r(x) \right\}.$$

Здесь ϕ_r — бозонные и фермионные поля ПВ, имеющие одинаковые с полем ψ спинорную и внутреннюю структуры.

Оценки асимптотического поведения различных диаграмм показывают, что если использовать одно поле ПВ, то диаграммы ведут себя асимптотически как $M^2 N^2$. Поэтому для подавления вклада импульсов, близких к границе зоны Бриллюэна и ответственных за нелокальные эффекты, надо выбрать $M \ll 1/N$. Такие малые величины масс полей ПВ неприемлемы, т.к. они сравнимы с массами физических частиц. Кроме того, как мы увидим из численных расчетов, модель с одним полем ПВ сильно зависит от конкретного выбора массы M и, следовательно, результаты нестабильны.

Для получения приемлемых результатов необходимо ввести по крайней мере три поля ПВ. В этом случае диаграммы имеют асимптотическое поведение $M^4 N^2$, и выбором $1/N \ll M \ll 1/\sqrt{N}$ можно подавить вклад импульсов вблизи границы зоны Бриллюэна.

Ниже представлены результаты численных расчетов для случаев одного и трех полей ПВ.

Регуляризованный детерминант имеет вид

$$D_{VR} = D_{VS}[h] D_{PV}[h], \quad (6)$$

где $D_{\text{VS}}[h]$ задан соотношением (2) и D_{PV} определен следующим образом:

$$D_{\text{PV}} = \prod_r \prod_{p=-N/2+1}^{N/2} \left(\frac{B^2(p, h) + M_r^2}{B^2(p, 0) + M_r^2} \right)^{c_r}.$$

Здесь $c_r = 1$ или -1 в зависимости от того, является ли соответствующее поле ПВ фермионом или бозоном.

Результаты вычислений представлены на рис. 3, где изображены векторные детерминанты D_V в зависимости от масс M при $h_0 = h_1 = 0.2$. Кривая 1 соответствует детерминанту D_{VC} на торе, кривые 2–4 – детерминантам D_{VR} с полями ПВ. Кривые 2 ($N = 32$) и 4 ($N = 160$) отвечают трем полям ПВ, кривая 3 ($N = 160$) – одному полю. Видно, что в случае одного поля ПВ согласие достигается для $N = 160$ только при одном определенном значении массы $M_0 = 0.026 - 0.033$. Даже небольшое изменение величины M приводит к значительному несогласию между решеточными и непрерывными результатами. В случае трех полей ПВ решеточные результаты согласуются с непрерывными в большем интервале величин масс полей ПВ. Для $N = 160$ согласие наблюдается при $M_1 = 0.04 \leq M \leq M_2 = 0.2$. Эти значения масс практически не зависят от h за исключением случая $h_\mu \rightarrow 0.5$. Сравнивая данные при $N = 32$ и $N = 160$, видно, что с ростом N величины масс убывают и наименьшее значение M_1 в случае трех полей ПВ ведет себя как $N^{-3/4}$.

Обсудим поведение решеточного детерминанта в случае трех полей ПВ более подробно. Вследствие того что ковариантная производная $B_\mu(p, h)$ резко спадает к нулю на границе зоны Бриллюэна, удобно разбить произведения в соотношениях (2) и (6) на три части:

$$D_{\text{VR}} = D_{\text{in}} D_{\text{b}} D_{\text{a}}. \quad (7)$$

Здесь D_{in} – произведение по всем p , кроме крайних точек зоны Бриллюэна, D_{b} – произведение по p , принадлежащим ребрам зоны Бриллюэна, и D_{a} – произведение по p , соответствующим вершинам этой зоны.

Рассмотрим сначала D_{in} . Как видно из рис. 1, внутри данной области различие между регуляризованными решеточными и непрерывными диаграммами имеет порядок $(MN)^{-1}$. Вблизи границы этой области величина $B_\mu(p, h)$ и ее производные имеют порядок 1. Это позволяет разложить соответствующие слагаемые регуляризованных диаграмм в ряды по M^2 . В случае трех полей ПВ первое не исчезающее слагаемое порядка M^4 приводит к асимптотическому поведению порядка $M^4 N^2$. Суммируя эти оценки, мы получаем, что

$$D_{\text{VR}} = D_{\text{VC}} \left(1 + O((MN)^{-1}) + O(M^4 N^2) \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (8)$$

когда $1/N \ll M \ll 1/\sqrt{N}$.

Для дальнейших оценок величин D_a и D_b , используя численные данные, представленные на рис. 1, мы аппроксимируем ковариантную производную $B_\mu(p, h)$ двумя прямыми (пренебрегая осцилляциями):

$$\begin{aligned} B_\mu(p, h) &\approx \frac{2\pi}{N}(p_\mu - h_\mu - 1/2), & p_\mu = -N/2 + 2, \dots, N/2 - 1; \\ B_\mu(p + N/2, h) &\approx -2\pi(p_\mu - h_\mu - 1/2), & p_\mu = 0, 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Величина D_a при $|h_\mu| \leq 1/2$ имеет вид, следующий из соотношений (6) и (9):

$$D_a = D_{a0}[h_0, h_1]D_{a0}[h_0, -h_1]D_{a0}[h_1, h_0]D_{a0}[h_1, -h_0]/D_{a0}^4[0, 0],$$

здесь

$$D_{a0}[h_0, h_1] = \frac{\left[\left(\frac{1}{2} - p\right)^2 + 2(M/2\pi)^2\right] \left(\frac{1}{2} - p\right)^2}{\left[\left(\frac{1}{2} - p\right)^2 + (M/2\pi)^2\right]^2},$$

где

$$\left(\frac{1}{2} - p\right)^2 = \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} - p_\mu\right)^2.$$

Видно, что при всех значениях h в области $|h_\mu| \leq 1/2$, кроме простейшего случая $|h_0| = |h_1| = 1/2$, когда $D_{VR} = D_{VC} = 0$,

$$D_a \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad M(N) \rightarrow 0. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь величину D_b . При $|h_\mu| \leq 1/2$ эта величина имеет вид

$$D_b = D_{b0}[h_0, h_1]D_{b0}[h_0, -h_1]D_{b0}[h_1, h_0]D_{b0}[h_1, -h_0]/D_{b0}^4[0, 0].$$

Здесь

$$D_{b0}[h_0, h_1] = \prod_{p_0 = -N/2+2}^{N/2-1} \frac{[G[p_0, h] + 2(M/2\pi)^2]G[p_0, h]}{[G[p_0, h] + (M/2\pi)^2]^2},$$

где

$$G[p_0, h] = \frac{1}{N^2} \left(p_0 - h_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - h_1\right)^2.$$

В последнем соотношении расширим интервал $-N/2 + 2 \leq p_0 \leq N/2 - 1$ до $-\infty < p_0 < \infty$. В дополнительной области $|p_0 - 1/2| \geq (N-1)/2$ величина D_{b0} имеет порядок

$$\sum_{|p_0 - \frac{1}{2}| \geq \frac{N-1}{2}} \ln \left(1 + \frac{2(M/2\pi)^2}{G[p_0, h]}\right) \lesssim \left(\frac{MN}{\pi}\right)^2 \sum_{p_0=N}^{\infty} \frac{1}{p_0^2} \lesssim M^2 N.$$

Рис. 4

Используя эту оценку, можно преобразовать D_{b0} к виду

$$D_{b0}[h_0, h_1] = \frac{H[h, M\sqrt{2}]H[h, 0]}{H^2[h, M]}(1 + O(M^2N)),$$

где

$$H[h, M] = \text{ch} \left[2\pi N \sqrt{\left(\frac{1}{2} - h_1\right)^2 + \left(\frac{M}{2\pi}\right)^2} \right] - \cos \left[2\pi \left(h_0 + \frac{1}{2}\right) \right].$$

Согласно этой формуле для величины D_b при $|1/2 - h_\mu| \gg M$ мы получим следующее выражение:

$$D_b = \exp \left\{ -\frac{M^4 N}{32\pi^3} \left[(1/2 - h_1)^{-3} + (1/2 + h_1)^{-3} + (1/2 - h_0)^{-3} + (1/2 + h_0)^{-3} - 32 \right] \right\}. \quad (11)$$

Из соотношений (7), (8), (10), (11) следует, что при $1/N \ll M \ll 1/\sqrt{N}$ регуляризованная решеточная модель согласуется с непрерывной теорией на торе для полей h_μ , лежащих в интервале $|1/2 \pm h_\mu| \gtrsim (M^4 N)^{1/3}$.

В области $(M^4 N)^{1/3} \gg |1/2 \pm h_\mu| \gg M$ решеточный детерминант резко спадает при $|h_\mu| \rightarrow 1/2$ и согласие с непрерывной теорией нарушается. Этот эффект связан с исчезновением ковариантной производной $B_\mu(p, h)$ на границе зоны Бриллюэна, что, как показывают наши расчеты, обусловлено вкладом ребер данной зоны.

Если мы обозначим значение h , при котором D_{VR} и D_{VC} начинают различаться более чем на 5% (т.е. когда $D_{VR}/D_{VC} = \xi = 0.95$) через h^* , то из формулы (11) следует, что

$$|h_\mu^*| = \frac{1}{2} - \left(\frac{M^4 N}{32\pi^3 \ln(\xi^{-1})} \right)^{1/3}.$$

Видно, что в пределе $N \rightarrow \infty$ решеточная регуляризованная модель согласуется с непрерывной теорией на торе во всем диапазоне значений h .

Эти аналитические результаты находятся в хорошем согласии с численными расчетами величин D_{VR} и D_{VC} по формулам (4), (6). На рис. 4 даны значения величин D_{VR} и D_{VC} , вычисленных для разных h и M . При этом рассмотрен случай $h_0 = 0.2$ и представлена зависимость векторных детерминантов от h_1 . Кривая 1 отвечает торе, кривые 2–5 – трем полям ПВ. Для кривой 2 имеем $N = 32$, $M = 0.15$; для кривой 3 – $N = 32$, $M = 0.4$; для кривой 4 – $N = 160$, $M = 0.04$; для кривой 5 – $N = 160$, $M = 0.15$. Видно, что для $N = 160$ три поля ПВ обеспечивают хорошее согласие с непрерывной теорией при $|h| < 0.4$.

3. ФАЗА КИРАЛЬНОГО ДЕТЕРМИНАНТА НА РЕШЕТКЕ

В данном разделе исследуется возможность использования SLAC-действия для регуляризации киральных $U(1)$ -моделей. Очевидно, такая регуляризация могла бы успешно работать только для неаномальных моделей, поскольку SLAC-действие кирально-инвариантно и, следовательно, не может воспроизвести аномалию. В то же время, как следует из предыдущего раздела, даже в случае, когда пертурбативные аномалии скомпенсированы, как в 11112-модели, эта регуляризация может оказаться неудачной. В самом деле, возможность подавления вклада импульсов вблизи границы зоны Бриллюэна для моделей, свободных от аномалий, путем введения калибровочно-инвариантного действия полей ПВ связана с тем фактом, что имеется конечное число расходящихся диаграмм, при суммировании которых слагаемые, нарушающие четность, компенсируются. Например, в двумерной $U(1)$ -модели с четырьмя положительно-киральными фермионами заряда 1 и одним отрицательно-киральным фермионом заряда 2 сумма аномальных диаграмм второго порядка чисто векторноподобна. Для ненулевых внешних импульсов все диаграммы высших порядков являются сходящимися и вклад импульсов, близких к π/a , пренебрежимо мал. Вот почему регуляризация ПВ была успешно применена к SLAC-действию на бесконечной решетке [6]. Однако, как было показано в предыдущем разделе, в торонной модели со SLAC-действием имеются расходящиеся диаграммы с более чем двумя внешними линиями. Это означает, что вклад импульсов $p_\mu \sim \pi/a$ важен не только для двухточечных, но также и для других диаграмм. Сумма диаграмм с более чем двумя внешними линиями не является векторноподобной и, значит, не может быть регуляризована векторными полями ПВ. С помощью регуляризации ПВ для модуля детерминанта можно легко получить согласие с непрерывной теорией. В то же время векторные поля ПВ не влияют на фазу детерминанта. Поэтому SLAC-действие может дать правильную фазу, только если каким-либо образом компенсируется вклад импульсов, близких к границе зоны Бриллюэна. Кроме того, несложно показать, что в торонной модели ненулевой вклад в фазу дают диаграммы с более чем двумя внешними линиями и, значит, сокращения аномалий недостаточно.

Таким образом, достаточно проверить фазу модели с одним положительно-киральным фермионом, описываемой стандартным действием (1), в котором поле ψ является

вейлевским фермионом:

$$\psi = \frac{1 + \gamma_3}{2} \psi.$$

Мы не вводим поля ПВ.

Простые вычисления приводят к выражению для решеточного детерминанта

$$D_{+S} = \prod_{p=-N/2+1}^{N/2} \frac{B_0(p, h) + iB_1(p, h)}{B_0(p, 0) + iB_1(p, 0)}, \quad (12)$$

где $B_\mu(p, h)$ — ковариантная производная, определенная согласно (3) (см. также рис. 1).

Соответствующее выражение для детерминанта в непрерывной теории на торе выглядит следующим образом [7–9]:

$$D_{+C} = e^{i\pi h_1(h_0 + i h_1)} \prod_{n=1}^{\infty} F[n, h] F[n, -h], \quad (13)$$

где функция $F[n, h]$ определена согласно (4).

Детерминанты (12), (13) удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$D_{+}[h_0, h_1] = D_{+}^*[h_1, h_0] = D_{+}^*[-h_0, h_1].$$

Вследствие киральной инвариантности SLAC-действия решеточный детерминант (13) периодичен по h , т.е.

$$D_{+S}[h_0, h_1] = D_{+S}[h_0 + n_0, h_1 + n_1], \quad n_0, n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Непрерывная теория является аномальной, и поэтому соответствующий детерминант удовлетворяет свойству

$$D_{+C}[h_0 + n_0, h_1 + n_1] = e^{i\pi(n_0 h_1 - n_1 h_0)} D_{+C}[h_0, h_1].$$

Отсюда следует, что согласия можно ожидать только для полей h_μ в диапазоне $|h_\mu| \leq 0.5$. Достаточно рассмотреть область $0 \leq h_0 \leq h_1 \leq 0.5$.

Сначала выполним аналитические оценки величины $\text{Arg } D_{+S}$. В предыдущем разделе было показано, что вследствие резкого убывания $B_\mu(p, h)$ на границе зоны Бриллюэна эта область дает заметный вклад, способный нарушить согласие с непрерывной теорией. По этой причине исследуем поведение $\text{Arg } D_{+S}$ внутри и на граничных участках зоны отдельно. Используя обозначения, введенные в предыдущем разделе, представим $\text{Arg } D_{+S}$ в виде суммы

$$\text{Arg } D_{+S} = \text{Arg } D_{+in} + \text{Arg } D_{+b} + \text{Arg } D_{+a} \quad \text{mod } 2\pi. \quad (14)$$

Для оценки отдельных слагаемых примем линейную аппроксимацию (9) ковариантной производной $B_\mu(p, h)$. Формула (12) приводит к следующему выражению для различных слагаемых:

$$\begin{aligned} \text{Arg } D_{+\text{in}} &= \sum_{p=-N/2+2}^{N/2-1} \arctg \frac{h_0(p_1 - \frac{1}{2}) - h_1(p_0 - \frac{1}{2})}{\sum_{\mu} (p_\mu - h_\mu - \frac{1}{2})(p_\mu - \frac{1}{2})} \mod 2\pi, \\ \text{Arg } D_{+\text{a}} &= \arctg \frac{16h_0h_1(h_0^2 - h_1^2)}{4(h_0^2 - h_1^2)^2 - 16h_0^2h_1^2 + 1}, \\ \text{Arg } D_{+\text{b}} &= \text{Arg } D_{+\text{b0}}[h_0, h_1] + \text{Arg } D_{+\text{b0}}[-h_0, -h_1] + \\ &\quad + \text{Arg } D_{+\text{b0}}[-h_1, h_0] + \text{Arg } D_{+\text{b0}}[h_1, -h_0] \mod 2\pi, \\ \text{Arg } D_{+\text{b0}}[h_0, h_1] &= \sum_{p_0=1}^{N/2-1} \arctg \frac{2h_0N(h_1 - \frac{1}{2})}{(p_0 - \frac{1}{2})^2 + N^2(h_1 - \frac{1}{2})^2 - h_0^2} \mod 2\pi. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу свойств симметрии детерминанта $D_{+\text{s}}$ только диаграммы с более чем двумя внешними линиями дают вклад в $\text{Arg } D_{+\text{in}}$. Эти решеточные диаграммы отличаются от соответствующих непрерывных диаграмм на слагаемые порядка $1/N$. Следовательно, для $|h_\mu| < 0.5$ мы имеем

$$\text{Arg } D_{+\text{in}} \rightarrow \text{Arg } D_{+\text{c}}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Для оценки $\text{Arg } D_{+\text{b0}}[h_0, h_1]$ мы разложим $\arctg x$ в ряд Тейлора. Оставляя только первое слагаемое ряда, заменим сумму интегралом и подставим полученное выражение в формулу для $\text{Arg } D_{+\text{b0}}$. В итоге имеем, что

$$\text{Arg } D_{+\text{b}} = 2h_1 \arctg \frac{2h_0}{1 - 2h_0^2} - 2h_0 \arctg \frac{2h_1}{1 - 2h_1^2}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Вычисления показывают, что для всех h в рассматриваемой области

$$|\text{Arg } D_{+\text{b}}| \ll |\text{Arg } D_{+\text{in}}|, \quad N \rightarrow \infty.$$

Наконец, вычисляя $\text{Arg } D_{+\text{a}}$ по формуле (16), мы получим, что

$$\text{Arg } D_{+\text{a}} = \text{Arg } D_{+\text{in}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Наши оценки показывают, что вклад ребер зоны Бриллюэна в $\text{Arg } D_{+\text{s}}$ является малым, но вклад вершин примерно равен вкладу внутренней части зоны, и их сумма в два раза больше непрерывного значения, т.е. $\text{Arg } D_{+\text{s}} = 2 \text{Arg } D_{+\text{c}}$.

Рис. 5

Таким образом, здесь мы имеем дело с некоторым видом явления удвоения, которое напоминает эффекты, наблюдавшиеся Бодвиным и Ковачем [10] в формулировке Рабина модели Швингера [11].

Приведенные выше аналитические оценки находятся в хорошем согласии с результатами численных расчетов, представленных на рис. 5, где изображены аргументы положительно-киральных детерминантов $\text{Arg } D_+$ в зависимости от h_1 при $h_0 = 0.4$. Кривая 1 отвечает тору, кривые 2 и 3 – решетке. При этом $\text{Arg } D_{+S}$ на кривой 2 вычислен по формуле (12) при $N = 32$ и $N = 160$, а $\text{Arg } D_{+S}$ на кривой 3 оценен по формулам (14)–(17) при $N \rightarrow \infty$. Для всех h величина $\text{Arg } D_{+S}$ в два раза больше, чем соответствующее непрерывное значение.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выполнено исследование $U(1)$ -модели на двумерной конечной решетке, описываемой калибровочно-инвариантным нелокальным SLAC-действием. Показано, что в случае постоянного калибровочного поля (в модели на торе) SLAC-действие порождает расходящиеся (в пределе $N \rightarrow \infty$) диаграммы с более чем двумя внешними линиями и значение решеточного фермионного детерминанта не согласуется с известным точным результатом в непрерывной теории на торе. Модификация SLAC-действия путем введения дополнительной регуляризации ПВ устраняет указанный недостаток в случае векторной теории. При этом наименьшее число полей ПВ, необходимое для такой регуляризации, равно трем.

Характерной особенностью SLAC-действия на конечной решетке является большой вклад импульсов на границе зоны Бриллюэна. В случае векторной теории такой вклад приводит к резкому спаду решеточного детерминанта в узкой области вблизи $|h_\mu| =$

1/2. Однако в пределе $N \rightarrow \infty$ ширина этой области стремится к нулю и модель согласуется с непрерывной теорией при всех $|h_\mu| < 1/2$.

В случае аксиального взаимодействия существование расходящихся диаграмм с более чем двумя внешними линиями не позволяет сократить вклад импульсов $|p| \sim \pi/a$ путем введения регуляризации ПВ. Как и в случае векторной теории, граничные импульсы дают большой аномальный вклад. В результате фаза решеточного кирального детерминанта в два раза больше соответствующей непрерывной фазы.

Наши результаты показывают, что SLAC-действие, снабженное дополнительной регуляризацией ПВ, в случае векторной модели успешно решает проблему удвоения фермионного спектра, но в то же время неправильно описывает киральные модели, взаимодействующие с постоянным калибровочным полем.

Авторы благодарны В. Борнякову и С. Зенкину за плодотворные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-005511) и фонда INTAS (грант INTAS-96-370).

Список литературы

- [1] *A. A. Slavnov, N. V. Zverev.* hep-lat/9708022.
- [2] *H. B. Nielsen, M. Ninomiya.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 105. P. 219.
- [3] *S. Drell, M. Weinstein, S. Yankielovitz.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 487, 1627.
- [4] *L. Karsten, J. Smit.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 144. P. 536.
- [5] *L. Karsten, J. Smit.* Phys. Lett. B. 1979. V. 85. P. 100.
- [6] *A. A. Slavnov.* Nucl. Phys. (Proc. Suppl.). B. 1995. V. 42. P. 166.
- [7] *L. Alvarez-Gaume, G. Moore, C. Vafa.* Commun. Math. Phys. 1986. V. 6. P. 1.
- [8] *R. Narayanan, H. Neuberger.* Phys. Lett. B. 1995. V. 348. P. 549.
- [9] *C. D. Fosco, S. Randjbar-Daemi.* Phys. Lett. B. 1995. V. 354. P. 383.
- [10] *G. Bodwin, E. Kovacs.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 3198.
- [11] *J. Rabin.* Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 3218.

Поступила в редакцию 27.XI.1997 г.