Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Хакимов, p -Адические меры Гиббса для модели твердых сфер с тремя состояниями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2013, том 177, номер 1, 68–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:07:59

© 2013 г.

О. Н. Хакимов*

p -АДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ТВЕРДЫХ СФЕР С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучаются p -адические модели твердых сфер с тремя состояниями на дереве Кэли. Известно, что существуют четыре типа таких моделей. Найдены условия, которые необходимо наложить на порядок k дерева Кэли и простое число p , чтобы существовала трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, мера Гиббса, G -модель твердых сфер, трансляционно-инвариантная мера, p -адические числа.

DOI: 10.4213/tmf8536

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] были изучены вещественные меры Гиббса для модели твердых сфер (ТС) с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$. В настоящей работе мы изучаем p -адический аналог этой модели.

Описание предельных мер Гиббса для данного гамильтониана является одной из основных задач в теории мер Гиббса. Полный анализ множества таких мер является весьма трудоемким. По этой причине большая часть работ по этой тематике посвящена изучению мер Гиббса на дереве Кэли [1], [3]–[7].

Известно [8]–[10], что p -адические модели в физике нельзя описать, используя обычную теорию вероятностей. В книге [8] на основе теории неархимедовых мер [11] была сформулирована абстрактная p -адическая теория вероятностей. Вероятностные процессы над полем p -адических чисел были рассмотрены во многих работах (см., например, [12]–[15]). Неархимедов аналог теоремы Колмогорова был доказан в работе [16]. В работе [17] рассмотрены плодородные модели ТС, соответствующие графам типа *петля*, *свисток*, *жезл* и *ключ*. В работе [1] изучались трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели ТС в случае графа типа *ключ* на дереве Кэли и доказана единственность трансляционно-инвариантной меры

*Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: hakimovo@mail.ru

Гиббса для любого положительного параметра активности. В работе [2] рассматривались трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели ТС в случаях графов типа *свисток*, *жезл*, *петля* и показано, что в случае графа типа *петля* из положительности активности не следует единственность трансляционно-инвариантных мер.

Трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса для случая графа типа *петля* изучались в работе [18]. В настоящей работе мы проведем анализ трансляционно-инвариантных p -адических мер Гиббса для модели ТС на дереве Кэли в случаях графов типа *свисток*, *жезл* и *ключ*.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

2.1. p -Адиические числа и меры. Каждое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде

$$x = p^r \frac{n}{m}, \quad r, n, m \in \mathbb{Z}, \quad m > 0,$$

где p – фиксированное простое число, числа m и n взаимно простые (наибольший общий делитель (n, m) равен единице), причем m и n не делятся на p . Далее, p -адическая норма $|x|_p$ определяется по формуле

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Она удовлетворяет сильному неравенству треугольника $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, что показывает неархимедовость нормы. Из этого свойства непосредственно вытекают следующие:

- 1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
- 2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x - y|_p \leq |x|_p$.

Для каждого простого p пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме приводит к полю $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел [19]. Начав с поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, мы можем получить либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо одно из полей p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (теорема Островского).

Каждое p -адическое число $x \neq 0$ имеет единственное каноническое разложение

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots),$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j – целые числа, $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p-1$, $j = 1, 2, \dots$ [10], [19], [20]. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Следующая теорема доказана в работе [10].

ТЕОРЕМА 1. Уравнение $x^2 = a$ при

$$0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots), \quad a_0 > 0, \quad 0 \leq a_j \leq p-1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

имеет решение $x \in \mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: число $\gamma(a)$ четное; уравнение $y^2 = a_0 \pmod{p}$ разрешимо, если $p \neq 2$; равенство $a_1 = a_2 = 0$ справедливо, если $p = 2$.

Множество $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ называется множеством *целых p -адических чисел*.

Следующая теорема известна как лемма Гензеля [19].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ – многочлен с целыми p -адическими коэффициентами, а $F'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$ – его производная. Предположим, что a_0 – целое p -адическое число такое, что $F(a_0) \equiv 0 \pmod{p}$, но $F'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда существует единственное целое p -адическое число a такое, что $F(a) \equiv 0$ и $a \equiv a_0 \pmod{p}$.

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ положим $B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}$. p -Адический логарифм определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n},$$

который сходится для $x \in B(1, 1)$; p -адическая экспонента определяется как ряд

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

который сходится для $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

ЛЕММА 1. Пусть $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Тогда

$$\begin{aligned} |\exp_p(x)|_p &= 1, & |\exp_p(x) - 1|_p &= |x|_p, & |\log_p(1 + x)|_p &= |x|_p, \\ \log_p(\exp_p(x)) &= x, & \exp_p(\log_p(1 + x)) &= 1 + x. \end{aligned}$$

Более подробно об основах p -адического анализа и p -адической математической физики можно прочитать в книгах [10], [19], [20].

Пусть $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, где $\mathcal{B}$ – алгебра подмножеств в X . Функция $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется *p -адической мерой*, если для любого набора множеств $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j);$$

p -адическая мера называется *вероятностной* [16], если $\mu(X) = 1$.

2.2. Дерево Кэли. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер. Две вершины x и y называются *ближайшими соседями*, если существует ребро $l \in L$, соединяющее их (что обозначается как $l = \langle x, y \rangle$). Расстояние $d(x, y)$ равно количеству ребер, составляющих кратчайший путь, который соединяет x и y .

Пусть $x^0 \in V$ – фиксированная точка. Введем обозначения

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, & V_n &= \bigcup_{k=1}^n W_k, \\ S(x) &= \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\} \text{ для } x \in W_n. \end{aligned}$$

2.3. G -модель ТС. Мы рассмотрим модель ТС с тремя состояниями на дереве Кэли. В этой модели каждой вершине $x \in V$ ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Если $\sigma(x) \in \{1, 2\}$, то это означает, что вершина $x \in V$ занята, а $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина $x \in V$ вакантна. Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$ на дереве Кэли есть функция из V в $\{0, 1, 2\}$. Конфигурации на множествах V_n и W_n определяются аналогично.

Рассмотрим четыре типа плодородных графов [17] с множеством ребер следующего вида:

$$\begin{aligned} \text{свисток} : & \quad \{0, 0\}, \quad \{0, 1\}, \quad \{1, 2\}; \\ \text{ключ} : & \quad \{0, 0\}, \quad \{0, 1\}, \quad \{0, 2\}, \quad \{1, 1\}; \\ \text{жезл} : & \quad \{0, 1\}, \quad \{0, 2\}, \quad \{1, 1\}, \quad \{2, 2\}; \\ \text{петля} : & \quad \{0, 0\}, \quad \{0, 1\}, \quad \{0, 2\}, \quad \{1, 1\}, \quad \{2, 2\}. \end{aligned}$$

Пусть $O = \{\text{свисток}, \text{ключ}, \text{жезл}, \text{петля}\}$, $G \in O$. Конфигурация σ называется G -допустимой на дереве Кэли, если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ является ребром графа G для любой пары ближайших соседей x и y в V . Обозначим через Ω^G множество всех G -допустимых конфигураций на дереве Кэли.

Для данного графа G и фиксированного параметра $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_p^3$ определим p -адический гамильтониан G -модели ТС как

$$H_G^\lambda(\sigma) = \sum_{x \in V} \log_p \lambda_{\sigma(x)}, \quad \sigma \in \Omega^G.$$

2.4. Построение p -адической меры Гиббса. Построим p -адическую меру Гиббса для G -модели ТС. Так как в определении p -адической меры Гиббса используется p -адическая экспонента, все соответствующие величины должны принадлежать множеству

$$\mathcal{E}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1, |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\}.$$

Как и в классическом случае, мы рассмотрим специальный класс мер Гиббса.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ обозначим через $\#\sigma_n$ число занятых вершин в конфигурации σ_n :

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1).$$

Пусть $z: x \rightarrow z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in \mathcal{E}_p^3$ – векторнозначная функция на V . Рассмотрим случай $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Для $\lambda \in \mathcal{E}_p$ рассмотрим p -адическое вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на множестве $\Omega_{V_n}^G$, которое определяется как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x), x}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где Z_n – нормировочная постоянная,

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\#\tilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\tilde{\sigma}(x), x}.$$

Говорят, что p -адическое вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ является согласованным, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^G) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2)$$

В этом случае в силу теоремы Колмогорова [16] существует единственная мера μ на множестве Ω^G такая, что $\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ для всех n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мера $\mu^{(n)}$, определенная в (1) и удовлетворяющая условию (2), называется p -адической G -ТС-мерой Гиббса, соответствующей функции $z: x \rightarrow z_x$, $x \in V \setminus \{x^0\}$.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G . Через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ обозначим матрицу смежности графа G , т. е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Следующая теорема [2] дает условие для z_x , гарантирующее согласованность распределения $\mu^{(n)}$.

ТЕОРЕМА 3. Вероятностное распределение $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, заданное формулой (1), согласованно тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} z'_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z'_{1,y} + a_{12}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21}z'_{1,y} + a_{22}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{0,x} \in \mathcal{E}_p$, $i = 1, 2$.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА ГИББСА

Предположим, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} \in \mathcal{E}_p$, $i = 1, 2$. Тогда для любой функции $z: x \in V \rightarrow z_x = (z_{1,x}, z_{2,x}) \in \mathcal{E}_p^2$ такой, что справедлива система уравнений (3), существует единственная p -адическая G -ТС-мера Гиббса. Решение вида $z_x = (z_1, z_2) \in \mathcal{E}_p^2$ при $x \neq x_0$ системы уравнений (3) называется *трансляционно-инвариантным*. Соответствующая p -адическая мера Гиббса трансляционно-инвариантного решения системы уравнений (3) называется трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

3.1. Случай $G = \text{ключ}$. В этом случае система уравнений (3) принимает следующий вид:

$$z_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + z_{1,y}}{1 + z_{1,y} + z_{2,y}}, \quad z_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{1 + z_{1,y} + z_{2,y}}. \quad (4)$$

Мы будем использовать следующую лемму [21].

ЛЕММА 2. Если $a_i \in \mathcal{E}_p$ для любого $i = 1, \dots, m$, то

$$\prod_{i=1}^m a_i \in \mathcal{E}_p.$$

ТЕОРЕМА 4. Если наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ не делится на p , то система уравнений (4) не имеет решений на множестве $\mathcal{E}_p^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_x \in \mathcal{E}_p$ – решение системы (4), $x \in V$. Тогда из уравнений (4) получим

$$\begin{aligned} |z_{1,x}|_p &= \left| \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + z_{1,y}}{1 + z_{1,y} + z_{2,y}} \right|_p = \prod_{y \in S(x)} \frac{|1 + z_{1,y}|_p}{|1 + z_{1,y} + z_{2,y}|_p} = \\ &= \prod_{y \in S(x)} \frac{|2 + z_{1,y} - 1|_p}{|3 + z_{1,y} - 1 + z_{2,y} - 1|_p} \begin{cases} \leq 2^{-k}, & \text{если } p = 2, \\ \geq 3^k, & \text{если } p = 3, \\ = 1, & \text{если } p \neq 2, 3; \end{cases} \\ |z_{2,x}|_p &= \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{|3 + z_{1,y} - 1 + z_{2,y} - 1|_p} \begin{cases} \geq 3^k, & \text{если } p = 3, \\ = 1, & \text{если } p \neq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы (4) может существовать, только если $p > 3$. Если $p > 3$, то

$$\left| \prod_{y \in S(x)} (1 + z_{1,y} + z_{2,y}) \right|_p = \left| \prod_{y \in S(x)} (3 + z_{1,y} - 1 + z_{2,y} - 1) \right|_p = 1.$$

Предположим, что $S(x) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Учитывая, что $p > 3$, из уравнений (4) получим

$$\begin{aligned} |z_{1,x} - 1|_p &= \left| \lambda \prod_{i=1}^k \frac{1 + z_{1,y_i}}{1 + z_{1,y_i} + z_{2,y_i}} - 1 \right|_p = \left| \lambda \prod_{i=1}^k (1 + z_{1,y_i}) - \prod_{i=1}^k (1 + z_{1,y_i} + z_{2,y_i}) \right|_p = \\ &= \left| (\lambda - 1) \prod_{i=1}^k (1 + z_{1,y_i}) + \prod_{i=1}^k (2 + z_{1,y_i} - 1) - \prod_{i=1}^k (3 + z_{1,y_i} - 1 + z_{2,y_i} - 1) \right|_p = \\ &= \left| (\lambda - 1) \prod_{i=1}^k (1 + z_{1,y_i}) + \left(\prod_{i=1}^k (z_{1,y_i} - 1) - \prod_{i=1}^k (z_{1,y_i} - 1 + z_{2,y_i} - 1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^k \left(2 \prod_{\substack{1 \leq i \leq k, \\ i \neq j}} (z_{1,y_i} - 1) - 3 \prod_{\substack{1 \leq i \leq k, \\ i \neq j}} (z_{1,y_i} - 1 + z_{2,y_i} - 1) \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \sum_{i=1}^k \left(2^{k-1} (z_{1,y_i} - 1) - 3^{k-1} (z_{1,y_i} - 1 + z_{2,y_i} - 1) \right) + (2^k - 3^k) \right|_p. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя лемму 2, получаем, что правая часть равенства (5) меньше $p^{1/(1-p)}$, если $3^k - 2^k$ делится на p , и равна единице в противном случае.

ТАБЛИЦА 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	—	—	—	5	—	7	—	5	—	11	23	5, 7

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 |z_{2,x} - 1|_p &= \left| \lambda \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 + z_{1,y_i} + z_{2,y_i}} - 1 \right|_p = \left| (\lambda - 1) + 1 - \prod_{i=1}^k (1 + z_{1,y_i} + z_{2,y_i}) \right|_p = \\
 &= \left| (\lambda - 1) - \prod_{i=1}^k (z_{1,y_i} - 1 + z_{2,y_i} - 1) - 3 \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{1 \leq i \leq k, \\ i \neq j}} (z_{1,y_i} - 1 + z_{2,y_i} - 1) - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - 3^{k-1} \sum_{j=1}^k (z_{1,y_i} - 1 + z_{2,y_i} - 1) - (3^k - 1) \right|_p,
 \end{aligned}$$

и правая часть последнего равенства меньше $p^{1/(1-p)}$, если $3^k - 1$ делится на p , и равна единице в противном случае.

Таким образом, решение z_x принадлежит множеству $\mathcal{E}_p^2$ в том и только в том случае, когда наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ делится на p .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие, что наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ делится на p , необходимо для существования p -адических мер Гиббса в G -модели ТС. Из этого условия для $k \geq 1$ можно найти значения простого числа p , при которых система уравнений (4) может иметь решение (см. табл. 1 при малых значениях k).

ТЕОРЕМА 5. Если наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ делится на p и число $k^2 - k - 6$ не делится на p , то система уравнений (4) имеет по крайней мере одно решение $z_x \in \mathcal{E}_p^2$ для $x \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что при удовлетворении условий теоремы система уравнений (4) имеет решение вида $z_x = (z_1, z_2) \in \mathcal{E}_p^2$ для $x \in V$. В этом случае из уравнений (4) мы получаем

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{1}{1 + z_1 + z_2} \right)^k. \quad (6)$$

Разделим второе уравнение на первое и найдем $z_2 = z_1 / (1 + z_1)^k$. Подставляя это выражение в первое уравнение из (6), мы получаем

$$z_1 = \lambda \left(\frac{(1 + z_1)^{k+1}}{z_1 + (1 + z_1)^{k+1}} \right)^k.$$

Это уравнение можно записать как $F(z) = 0$ при

$$F(z) = z(z + (1 + z)^{k+1})^k - \lambda(1 + z)^{k^2+k}.$$

Так как $|\lambda|_p = 1$, функция $F(z)$ является многочленом с целыми p -адическими коэффициентами. Остается проверить остальные условия леммы Гензеля для $F(z)$. Пусть $a_0 = 1$, тогда

$$\begin{aligned} F(1) &= (1 + 2^{k+1})^k - \lambda 2^{k^2+k} = (3 + 2^k - 1)^k - 1 - (\lambda - 1)2^{k^2+k} + (2^{k^2+k} - 1) = \\ &= \sum_{i=1}^k C_k^i 3^{k-i} (2^k - 1)^i + 3^k - 1 - (\lambda - 1)2^{k^2+k} + (2^k - 1) \sum_{i=0}^k 2^{ki} = 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Теперь проверим, что если $k^2 - k - 6$ не делится на p , то $F'(1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Имеем

$$\begin{aligned} F'(1) &= (1 + 2^{k+1})^k + k(1 + 2^{k+1})^{k-1}(1 + (k+1)2^k) - (k^2 + k)\lambda 2^{k^2+k-1} = \\ &= (2^k - 1) \left(\sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i 3^{k-i-1} (2^k - 1)^{i-1} ((2^k - 1)(k^2 + k + 1) + k^2 + 2k + 3) + \right. \\ &\quad \left. + 3^{k-1}(k^2 + k + 1) - \frac{k^2 + k}{2} \right) + \frac{(3^k - 1)(k^2 + 2k + 3)}{3} - \\ &\quad - (\lambda - 1)(k^2 + k)2^{k^2+k-1} - \frac{k^2 - k - 6}{6} = k^2 - k - 6 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Таким образом, для функции $F(z)$ выполняются условия леммы Гензеля. Следовательно, существует единственное целое p -адическое число a такое, что $F(a) = 0$ и $a \equiv a_0 \pmod{p}$, т.е. уравнение $F(z) = 0$ имеет решение $z = a$. При этом $a \in \mathcal{E}_p$, так как $a_0 = 1$ и $a \equiv 1 \pmod{p}$.

В качестве следствия из этой теоремы мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Если наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ делится на p и число $k^2 - k - 6$ не делится на p , то для p -адической G -модели ТС существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие, что $k^2 - k - 6$ не делится на p , не является необходимым для существования и единственности трансляционно-инвариантной p -адической меры Гиббса.

ПРИМЕР 1. Пусть $k = 8$ и $p = 5$. Заметим, что в этом случае наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ делится на p (см. табл. 1). При этом $k^2 - k - 6$ делится на p . Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{i=0}^7 (1+z)^{9i} (z + (1+z)^9)^{7-i}.$$

Эта функция является многочленом с целыми p -адическими коэффициентами, отсюда, используя лемму Гензеля, мы убеждаемся, что уравнение $F(z) = 0$ имеет единственное решение на множестве $\mathcal{E}_5$. Обозначим это решение через z^* . Если $\lambda = z^*$, то, как легко видеть, пара значений $(\lambda, \lambda/(1+\lambda)^k)$ является решением системы (6). Таким образом, при $k = 8$, $p = 5$ не выполняется условие теоремы 6, но существует трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.

ТАБЛИЦА 2

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	—	3	7	3, 5	31	3, 7	127	3, 5, 17	7, 73	3, 11, 31

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=0}^{k-1} (1+z)^{(k+1)i} (z + (1+z)^{k+1})^{k-1-i} = 0. \quad (7)$$

С помощью леммы Гензеля можно легко проверить, что если наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ делится на p и $k(k-1)$ не делится на p , то уравнение (7) имеет решение на $\mathcal{E}_p$. В этом случае если λ является решением уравнения (7), то $(\lambda, \lambda/(1+\lambda)^k)$ является решением системы уравнений (6). Таким образом, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть наибольший общий делитель $(2^k - 1, 3^k - 1)$ делится на p и число $k^2 - k$ не делится на p . Если λ является решением уравнения (7), то существует по крайней мере одна трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса для G -модели ТС.

3.2. Случай $G = \text{свисток}$. В этом случае система уравнений (3) имеет следующий вид:

$$z_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + z_{2,y}}{1 + z_{1,y}}, \quad z_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{z_{1,y}}{1 + z_{1,y}}. \quad (8)$$

Как и в случае $G = \text{ключ}$, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. Если $2^k - 1$ не делится на p , то система уравнений (8) не имеет решений на множестве $\mathcal{E}_p^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие, что $2^k - 1$ делится на p , является необходимым для существования p -адических мер Гиббса для G -модели ТС. Для $k \geq 1$ можно найти значения простого числа p , при которых система уравнений (8) может иметь решение (см. табл. 2 при малых значениях k).

Пусть $z_{i,x} = z_i \in \mathcal{E}_p$ при всех $x \in V$. Тогда из уравнений (8) имеем

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{z_1}{1 + z_1} \right)^k. \quad (9)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $2^k - 1$ делится на p . Справедливы следующие утверждения.

1. Если λ является решением уравнения

$$\lambda(\lambda + 2^k)^k - 2^{k^2+k} = 0, \quad (10)$$

то $(1, \lambda/2^k)$ является решением системы уравнений (9).

2. Если $k+2$ не делится на p , то уравнение (10) имеет единственное решение на множестве $\mathcal{E}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $z = (1, \lambda/2^k)$ в (9), получаем уравнение (10). При условии, что $k + 2$ не делится на p , существование и единственность решения уравнения (10) следует из леммы Гензеля.

Аналогично можно доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $2^k - 1$ делится на p . Справедливы следующие утверждения.

1. Если λ является решением уравнения

$$(1 + \lambda)^k - \lambda^k = 0, \quad (11)$$

то (λ, λ) является решением системы уравнений (9).

2. Если k не делится на p , то уравнение (11) имеет единственное решение на множестве $\mathcal{E}_p$.

ТЕОРЕМА 9. Если $2^k - 1$ делится на p и $k^2 - 2k - 4$ не делится на p , то для p -адической G -модели ТС существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (9) получаем уравнение

$$z(1 + z)^{k^2+k} - \lambda((1 + z)^k + \lambda z^k)^k = 0. \quad (12)$$

Если $k^2 - 2k - 4$ не делится на p , то функция

$$F(z) = z(1 + z)^{k^2+k} - \lambda((1 + z)^k + \lambda z^k)^k$$

удовлетворяет условию леммы Гензеля. Следовательно, уравнение (12) имеет единственное решение $z^* \in \mathcal{E}_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие, что $k^2 - 2k - 4$ не делится на p , является лишь достаточным для того, чтобы существовала единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса для G -модели ТС.

ПРИМЕР 2. Пусть $k = 16$ и $p = 5$. В этом случае условие теоремы 9 не выполняется. Так как k не делится на p , в силу утверждения 2 уравнение (11) имеет единственное решение на множестве $\mathcal{E}_p$. Предположим, что λ является решением уравнения (11). Тогда $z^* = (\lambda, \lambda)$ является решением системы уравнений (9) (см. утверждение 2). Таким образом мы показали, что при $k = 16$, $p = 5$ существует трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p \in \{3, 7\}$. Если $2^k - 1$ делится на p , то для p -адической G -модели ТС существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \{3, 7\}$. Покажем, что $k^2 - 2k - 4 \not\equiv 0 \pmod{p}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Для $p = 3$ имеем

$$k^2 - 2k - 4 = \begin{cases} 1 \pmod{3}, & \text{если } k = 3n + 1, \\ 2 \pmod{3}, & \text{если } k = 3n, k = 3n + 2, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для $p = 7$ имеем

$$k^2 - 2k - 4 = \begin{cases} 2 \pmod{7}, & \text{если } k = 7n + 1, \\ 3 \pmod{7}, & \text{если } k = 7n, k = 7n + 2, \\ 4 \pmod{7}, & \text{если } k = 7n + 4, k = 7n + 5, \\ 6 \pmod{7}, & \text{если } k = 7n + 3, k = 7n + 6, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В силу теоремы 9 существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.

3.3. Случай $G = жезл$. В этом случае система уравнений (3) имеет следующий вид:

$$z_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + z_{1,y}}{z_{1,y} + z_{2,y}}, \quad z_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + z_{2,y}}{z_{1,y} + z_{2,y}}. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть $p = 2$. Если k делится на 4, то система уравнений (13) имеет по крайней мере одно решение $z_x \in \mathcal{E}_p^2$ для $x \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $z_{i,x} = z$, $i = 1, 2$, при всех $x \in V$. Тогда

$$z = \lambda \left(\frac{1+z}{2z} \right)^k. \quad (14)$$

Положим $F(z) = \lambda((1+z)/2z)^k$. Пусть $z \in \mathcal{E}_2$. Имеем

$$\begin{aligned} |F(z)|_2 &= \left| \lambda \left(\frac{1+z}{2z} \right)^k \right|_2 = 2^k |(2+z-1)^k|_2 = 2^k \left| 2^k + \sum_{i=1}^k C_k^i 2^{k-i} (z-1)^i \right|_2 = 1, \\ |F(z) - 1|_2 &= \left| (\lambda - 1) \left(\frac{1+z}{2z} \right)^k + \left(\frac{1+z}{2z} \right)^k - 1 \right|_2 = \\ &= \left| (\lambda - 1) \left(\frac{1+z}{2z} \right)^k - \frac{z-1}{z} \left(\frac{k}{2} + \sum_{m=0}^k \left(\sum_{i=1}^m C_m^i 2^{-i-1} (z-1)^i + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{k-m-1} C_{k-m-1}^j \frac{(z-1)^j}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^m C_m^i 2^{m-k-i} (z-1)^i \sum_{j=1}^{k-1-m} C_{k-1-m}^j 2^{-m-1} (z-1)^j \right) \right|_2 \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом мы показали, что $F(z) = \lambda((1+z)/2z)^k$ есть отображение из $\mathcal{E}_2$ в $\mathcal{E}_2$.

Для точки $z \in \mathcal{E}_2$ имеем

$$|F'(z)|_2 = \left| -\frac{k\lambda(1+z)^{k-1}}{2^k z^{k+1}} \right|_2 = \left| \frac{k}{2} \right|_2 \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно [20], для всех $a, b \in \mathcal{E}_2$

$$|F(a) - F(b)|_2 \leq \frac{1}{2} |a - b|_2.$$

Так как F является сжимающим отображением на замкнутом множестве $\mathcal{E}_2$, уравнение (14) имеет единственное решение $z^* \in \mathcal{E}_2$.

Как следствие этой теоремы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть $p = 2$. Если k делится на 4, то для p -адической G -модели ТС существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.*

Предположим, что $z_i = z_{i,x}$, $i = 1, 2$, при всех $x \in V$. Тогда система уравнений (13) имеет следующий вид:

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{z_1 + z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{z_1 + z_2} \right)^k. \quad (15)$$

Вычитая второе уравнение системы (15) из первого, получаем

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \lambda \frac{(1 + z_1)^{k-1} + \dots + (1 + z_2)^{k-1}}{(z_1 + z_2)^k} \right) = 0.$$

Таким образом, либо $z_1 = z_2$, либо

$$(z_1 + z_2)^k = \lambda((1 + z_1)^{k-1} + \dots + (1 + z_2)^{k-1}) \quad \text{при } z_1 \neq z_2. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 12. *Пусть $p \neq 2$. Если $k + 2$ не делится на p , то система уравнений (13) имеет по крайней мере одно решение $z_x \in \mathcal{E}_p^2$ для $x \in V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что при выполнении условия теоремы уравнение (14) имеет решение на $\mathcal{E}_p$. Используя лемму Гензеля для функции

$$F(z) = 2^k z^{k+1} - \lambda(1 + z)^k,$$

можно убедиться, что уравнение (14) имеет единственное решение на $\mathcal{E}_p$.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть $p \neq 2$. Если число $k^2 - 4$ не делится на p , то для p -адической G -модели ТС существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \neq 2$. Так как $k + 2$ не делится на p , уравнение (14) имеет единственное решение (см. доказательство теоремы 12). Надо показать, что если $k - 2$ не делится на p , то уравнение (16) не имеет решения на множестве $\mathcal{E}_p^2$. Вычитая 2^k из обеих частей уравнения (16), получаем

$$(z_1 + z_2)^k - 2^k = (z_1 - 1 + z_2 - 1)((z_1 + z_2)^{k-1} + \dots + 2^{k-1}) = 0 \pmod{p}$$

и

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{i=0}^{k-1} (1 + z_1)^i (1 + z_2)^{k-1-i} - 2^k &= (\lambda - 1) \sum_{i=0}^{k-1} (1 + z_1)^i (1 + z_2)^{k-1-i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} (2 + z_1 - 1)^i (2 + z_2 - 1)^{k-1-i} - 2^k = 2^{k-1}(k - 2) \pmod{p} = k - 2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнение (16) не имеет решения на множестве $\mathcal{E}_p^2$, если $k - 2$ не делится на p .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условие теоремы 13 не является необходимым для единственности трансляционно-инвариантной меры Гиббса.

ПРИМЕР 3. Пусть $k = 2$, $p = 3$ и $\lambda = 1$. Покажем, что в этом случае для G -модели ТС существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса. Уравнение (14) имеет единственное решение $z = 1$, так как $k + 2$ не делится на p (см. теорему 12). Следовательно, $z^* = (1, 1)$ является единственным решением системы (15) на множестве $\{z = (z_1, z_2) \in \mathcal{E}_3^2 : z_1 = z_2\}$. При $k = 2$ уравнение (16) имеет следующий вид:

$$(z_1 + z_2)^2 - (z_1 + z_2) - 2 = 0.$$

Отсюда $z_1 + z_2 = -1$ или $z_1 + z_2 = 2$. Нетрудно убедиться, что в этих случаях система уравнений (15) не имеет решения на множестве $\{z = (z_1, z_2) \in \mathcal{E}_3^2 : z_1 \neq z_2\}$. Таким образом, при $k = 2$, $p = 3$ система уравнений (15) имеет единственное решение на множестве $\mathcal{E}_3^2$. Это означает, что в данном случае существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса для G -модели ТС.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $k = 2$, $p = 3$. Если $\lambda \in \{x \in \mathbb{Q}_3 : |x - 28| \leq 1/81\}$, то для p -адической G -модели ТС существуют три трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = 2$, $p = 3$. В силу теоремы 12 уравнение (14) имеет единственное решение $z_1^* \in \mathcal{E}_p$. Следовательно, $z^* = (z_1^*, z_1^*) \in \mathcal{E}_p^2$ есть одно из решений уравнений (15).

Покажем, что система уравнений (15) имеет еще два решения $z^- = (z_1^-, z_2^-)$ и $z^+ = (z_1^+, z_2^+)$, где $z_1^- \neq z_2^-$ и $z_1^+ \neq z_2^+$. Из соотношения (16) получаем

$$z_1 + z_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda + 8)}}{2}.$$

Подставляя это равенство в (15), имеем

$$z = \left(\frac{2(1 + z)}{\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda + 8}} \right)^2.$$

Найдем решения этого квадратного относительно z уравнения:

$$a^\pm = \frac{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda + 8})(2\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda + 8)}})}{8}, \quad (17)$$

$$b^\pm = \frac{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda + 8})(2\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{2(\lambda - 4 - \sqrt{\lambda(\lambda + 8)}})}{8}. \quad (18)$$

Теперь мы должны проверить, что $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda + 8}$ и $\sqrt{2(\lambda - 4 \pm \sqrt{\lambda(\lambda + 8)})}$ существуют в $\mathbb{Q}_3$ и что $a^\pm, b^\pm \in \mathcal{E}_3$. Из условия $\lambda \in \{x \in \mathbb{Q}_3 : |x - 28|_3 \leq 1/81\}$ имеем следующее представление:

$$\lambda = 1 + 1 \cdot 3^3 + \lambda_4 \cdot 3^4 + \lambda_5 \cdot 3^5 + \dots \quad (19)$$

Легко видеть, что λ и $\lambda + 8$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Следовательно, $\sqrt{\lambda}$ и $\sqrt{\lambda + 8}$ существуют в $\mathbb{Q}_3$. Из представления (19) имеем

$$\sqrt{\lambda(\lambda + 8)} = 3(1 + 2 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + \dots). \quad (20)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda + 8)}) &= \\ &= 2(2 \cdot 3^2 + (1 + a_2) \cdot 3^3 + (\lambda_4 + a_3) \cdot 3^4 + (\lambda_5 + a_4) \cdot 3^5 + \dots) = \\ &= 3^2(1 + \lambda'_1 \cdot 3 + \lambda'_2 \cdot 3^2 + \dots). \end{aligned} \quad (21)$$

В силу теоремы 1 $\sqrt{2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda + 8)})}$ существует в $\mathbb{Q}_3$.

Положим

$$c^2 = 2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda + 8)}), \quad d = 2(\lambda - 4 - \sqrt{\lambda(\lambda + 8)}).$$

Перемножая эти равенства, получим $64(1 - \lambda) = c^2 d$. Поскольку $\sqrt{-3} \notin \mathbb{Q}_3$, отсюда следует, что $\sqrt{1 - \lambda} \notin \mathbb{Q}_3$. Следовательно, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}_3$. Это доказывает, что значения (18) не являются решением системы уравнений (15).

Теперь проверим, что $a^\pm \in \mathcal{E}_3$. Из соотношений (19)–(21) имеем

$$|\sqrt{\lambda}|_3 = 1, \quad |\sqrt{\lambda + 8}|_3 < 1, \quad |\sqrt{2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda + 8)})}|_3 < 1.$$

Следовательно, $|a^\pm|_3 = 1$ и $|a^\pm - 1|_3 < 1/3$. Положим $z_1^- = a^-$, $z_2^- = a^+$ и $z_1^+ = a^+$, $z_2^+ = a^-$. В результате мы получили в точности три решения:

$$z^* = (z_1^*, z_1^*), \quad z^- = (z_1^-, z_2^-), \quad z^+ = (z_1^+, z_2^+).$$

Благодарности. Автор благодарен профессору У. А. Розикову за полезные советы и ряд замечаний.

Список литературы

- [1] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [2] У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 412–424.
- [3] D. Gandolfo, U. A. Rozikov, J. Ruiz, *Markov Process. Related Fields*, **18**:4 (2012), 701–720.
- [4] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, *J. Statist. Phys.*, **79**:1–2 (1995), 473–482.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [6] Н.-О. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gruyter Studies in Mathematics, **9**, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.
- [7] Y. M. Suhov, U. A. Rozikov, *Queueing Syst.*, **46**:1–2 (2004), 197–212.
- [8] A. Yu. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Mathematics and its Applications, **427**, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [9] E. Marinari, G. Parisi, *Phys. Lett. B*, **203**:1–2 (1988), 52–54.
- [10] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [11] A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **51**, M. Dekker, New York, 1978.
- [12] S. Albeverio, W. Karwowski, *Stoch. Proc. Appl.*, **53**:1 (1994), 1–22.

- [13] S. Albeverio, X. Zhao, *Ann. Probab.*, **28**:4 (2000), 1680–1710.
- [14] K. Yasuda, *Osaka J. Math.*, **37**:4 (2000), 967–985.
- [15] У. А. Розиков, О. Н. Хакимов, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 84–92.
- [16] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухаммедов, У. А. Розиков, *Узб. матем. журн.*, **4** (1998), 23–29.
- [17] G. R. Brightwell, P. Winkler, *J. Combin. Theory Ser. B*, **77**:2 (1999), 221–262.
- [18] Ф. Ф. Тураев, *Узб. матем. журн.*, **2** (2013), 21–29.
- [19] Н. Коблиц, *p-Адиические числа, p-адический анализ и дзета-функции*, Мир, М., 1982.
- [20] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus. An introduction to p-adic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [21] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Indag. Math. (N. S.)*, **15**:4 (2004), 85–99.

Поступила в редакцию 27.03.2013