Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Кирило Антонио, Н. Манойлович, З. Надь, Жордана
нова деформация открытой $sl(2)$ -модели Годена, *ТМФ*,
2014, том 179, номер 1, 90–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:51:32

© 2014 г. Н. Кирило Антонио*, Н. Манойлович†, З. Надь‡

ЖОРДАНОВА ДЕФОРМАЦИЯ ОТКРЫТОЙ $sl(2)$ -МОДЕЛИ ГОДЕНА

Получена деформированная $sl(2)$ -модель Годена с граничными условиями, сохраняющими интегрируемость. На основании жордановой деформации $SL(2)$ -инвариантной R -матрицы Янга и общих решений ассоциированного уравнения отражения и дуального уравнения отражения получена соответствующая неоднородная XXX -цепочка спина $1/2$. Квазиклассическое разложение трансформатрицы приводит к деформированным $sl(2)$ -гамильтонианам Годена с граничными членами.

Ключевые слова: точно решаемые модели, модель Годена.

DOI: 10.4213/tmf8611

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели Годена применялись во многих областях современной физики, от квантовой оптики [1], [2] до физики металлических нанозерен (см. статью [3] и приведенную в ней библиографию). Модель цепочки взаимодействующих спинов впервые была рассмотрена в работах [4], [5], где такие модели вводились как квазиклассический предел интегрируемых квантовых цепочек. Более того, модели Годена были распространены на любые простые алгебры Ли с произвольным неприводимым представлением в каждом узле цепочки [5].

Рациональная $sl(2)$ -инвариантная модель рассматривалась в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния (КМОЗР) в работе [6]. При этом использовалась классическая $sl(2)$ -инвариантная r -матрица. Практически сразу вслед за этим в работе [7] было получено обобщение этих результатов на все случаи, когда кососимметричная r -матрица удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера [8]. Поэтому существенное внимание было уделено моделям Годена, соответствующим

*Centro de Análise Funcional e Aplicações, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal. E-mail: nantonio@math.ist.utl.pt

†Grupo de Física Matemática da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
E-mail: nmanoj@ualg.pt

‡Departamento de Matemática, F. C. T., Universidade do Algarve, Faro, Portugal.
E-mail: zoltan.nagy@m4x.org

классическим r -матрицам простых алгебр Ли [9] и супералгебр Ли [10]–[12]. Для $sl(2)$ -системы Годена ее связь с уравнением Книжника–Замолотчикова в конформной теории поля [13]–[15] или методом гауссовой факторизации [16] послужила основой для альтернативных подходов к вычислению корреляционных функций. Недавно рассматривались неунитарная r -матрица и соответствующие модели Годена (см. работу [17] и приведенную в ней библиографию).

КМОЗР [18]–[20] как подход к построению и решению квантовых интегрируемых систем привел к теории квантовых групп [21], [22]. Особенно интересной чертой квантовых групп является преобразование, которое называется твистом [23]; оно позволяет строить новые квантовые группы из уже известных. Хотя преобразования твиста порождают отношение эквивалентности между квантовыми группами, с их помощью получаются различные R -матрицы. В свою очередь эти новые R -матрицы могут приводить к новым интегрируемым системам [24].

Твист квантовой группы или, в более общем случае, алгебры Хопфа $\mathcal{A}$, представляет собой преобразование подобия копроизведения $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ с помощью обратимого твистующего элемента

$$\mathcal{F} = \sum_j f_j^{(1)} \otimes f_j^{(2)} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A},$$

а именно

$$\Delta(a) \rightarrow \Delta_t(a) = \mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Чтобы было выполнено свойство коассоциативности копроизведения, элемент $\mathcal{F}$ должен удовлетворять некоторому условию совместности, так называемому уравнению твиста [23]

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{F}), \quad (1)$$

где

$$(\Delta \otimes \text{id}) \sum_j f_j^{(1)} \otimes f_j^{(2)} = \sum_j \Delta(f_j^{(1)}) \otimes f_j^{(2)} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}.$$

Закон преобразования копроизведения также определяет, как изменилась соответствующая универсальная R -матрица:

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{(t)} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{R}\mathcal{F}^{-1}, \quad \mathcal{F}_{21} = \sum_j f_j^{(2)} \otimes f_j^{(1)}.$$

Новая R -матрица позволяет строить и исследовать новые интегрируемые модели [24].

Частное решение уравнения твиста определяется жордановым твистующим элементом для универсальной обертывающей алгебры $U(sl(2))$ алгебры Ли $sl(2)$ [25], [26]. В работах [27], [28] это решение было распространено на случай алгебры $sl(n)$. R -матрица Янга определяет янгян $\mathcal{Y}(sl(n))$ [29]. Спиновая XXX -цепочка Гейзенберга связана с янгяном $\mathcal{Y}(sl(2))$, а универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $sl(2)$ является подалгеброй Хопфа в янгяне, $U(sl(2)) \subset \mathcal{Y}(sl(2))$. Можно показать, что преобразование R -матрицы Янга с помощью жорданова твистующего элемента дает R -матрицу твистованного янгяна $\mathcal{Y}_\theta(sl(2))$ [30], [31]. Поскольку твист сохраняет регулярность R -матрицы, можно вычислить гамильтониан деформированной спиновой XXX -цепочки Гейзенберга с периодическими граничными условиями [30]. Хотя, как можно видеть, дополнительные члены, добавленные

к гамильтониану XXX -цепочки, не изменяют спектр модели, явный вид состояний Бете не является очевидным.

Деформации XXX -модели с непериодическими граничными условиями посредством жорданова твиста исследовались в работе [32]. Способ введения непериодических граничных условий, совместных с условием интегрируемости квантовых систем, которые можно решить с помощью КМОЗР, был развит в работе [33]. Граничные условия на левом и правом концах системы выражаются в терминах левой и правой матриц отражения. Условие совместности между внутренней областью и границей системы принимает вид так называемого уравнения отражения [34], [35]. Условие совместности на правом конце записывается как дуальное уравнение отражения. Матричный вид коммутационных соотношений между элементами матрицы монодромии Складина аналогичен уравнению отражения. Вместе с дуальным уравнением отражения коммутационные соотношения дают коммутативность открытой трансфер-матрицы [33], [36]. Общее решение уравнения отражения, связанного с жордановой деформацией $SL(2)$ -инвариантной R -матрицы Янга, было выведено в работе [32]; также в этой работе был получен гамильтониан деформированной спиновой XXX -цепочки с граничными членами общего вида.

В настоящей работе мы изучаем деформацию посредством жорданова твиста $sl(2)$ -модели Годена с непериодическими граничными условиями. Отправной точкой для получения модели Годена в рамках КМОЗР является матрица монодромии соответствующей неоднородной спиновой цепочки [6]. Квазиклассическое разложение трансфер-матрицы периодической цепочки, вычисленное для специальных значений спектрального параметра, приводит к гамильтонианам Годена [37], [38]. Этот подход был обобщен на случай непериодических граничных условий в работе [39], а полученные результаты позднее были расширены на недиагональные матрицы отражения [40] и на другие простые алгебры Ли [41]. Важным шагом при выводе гамильтонианов Годена с граничными членами является наложение некоторых условий нормировки как на R -матрицу, так и на левую и правую матрицы отражения. В общем случае при изучении спиновой цепочки эти условия нормировки не так существенны. Однако они обеспечивают квазиклассическое разложение трансфер-матрицы, что приводит к соответствующим гамильтонианам Годена с граничными членами [40], [42].

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 приведен краткий обзор жордановой деформации $SL(2)$ -инвариантной R -матрицы Янга. Выписаны общие решения соответствующего уравнения отражения и дуального уравнения отражения. В разделе 3 изучается жорданова деформация неоднородной спиновой XXX -цепочки с N узлами. Показано, как квазиклассическое разложение трансфер-матрицы приводит к гамильтонианам Годена. Эти гамильтонианы вычислены в разделе 4.

2. ТВИСТОВАННАЯ R -МАТРИЦА ЯНГА И УРАВНЕНИЕ ОТРАЖЕНИЯ

Сначала приведем краткий обзор свойств жорданова твистующего элемента. Три генератора алгебры Ли $sl(2)$ – это элементы h и $X^\pm$ такие, что

$$[h, X^\pm] = \pm 2X^\pm, \quad [X^+, X^-] = h.$$

Жорданов твистующий элемент [25], [26] универсальной обертывающей алгебры $U(sl(2))$ имеет вид

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{1}{2}h \otimes \ln(1 + 2\theta X^+)\right) = e^{h \otimes \sigma} \in U(sl(2)) \otimes U(sl(2)) \quad (2)$$

и удовлетворяет уравнениям

$$(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta_t)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13}. \quad (3)$$

Копроизведение Δ является обычным копроизведением в $U(sl(2))$, а Δ_t — твистованным. Чтобы проверить справедливость приведенных выше уравнений, важно отметить, что элемент h является примитивным относительно копроизведения Δ , а элемент σ — примитивным относительно твистованного копроизведения Δ_t :

$$\Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h, \quad \Delta_t(\sigma) = \sigma \otimes 1 + 1 \otimes \sigma.$$

Из уравнений (3) следует уравнение твиста (1), при этом

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{F}) &= \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23}, \\ \mathcal{F}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{F}) &= \mathcal{F}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{F})\mathcal{F}_{23}^{-1} \cdot \mathcal{F}_{23} = (\text{id} \otimes \Delta_t)(\mathcal{F})\mathcal{F}_{23} = \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23}. \end{aligned}$$

Поэтому жорданов твистующий элемент (2) удовлетворяет уравнению Дринфельда для твиста (1).

Спиновая XXX -цепочка Гейзенбера соотносится с янгианом $\mathcal{Y}(sl(2))$ и $SL(2)$ -инвариантной R -матрицей Янга

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \eta} & \frac{\eta}{\lambda + \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\eta}{\lambda + \eta} & \frac{\lambda}{\lambda + \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где λ — спектральный параметр, η — квазиклассический параметр.

Матричная форма жорданова твистующего элемента (2) в представлении ρ спина $1/2$, $F_{12} \in \text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$, записывается как

$$F_{12} = (\rho \otimes \rho)\mathcal{F} = \exp(\sigma^z \otimes \theta \sigma^+) = \mathbb{1} + \theta \sigma^z \otimes \sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma^z, \sigma^\pm = (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2$ — сигма-матрицы Паули. Поэтому твистованная R -матрица имеет вид [30], [32]

$$R^{(J)}(\lambda) = F_{21}R_{12}(\lambda)F_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\lambda\theta}{\lambda + \eta} & \frac{\lambda\theta}{\lambda + \eta} & \frac{\lambda\theta^2}{\lambda + \eta} \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \eta} & \frac{\eta}{\lambda + \eta} & \frac{-\lambda\theta}{\lambda + \eta} \\ 0 & \frac{\eta}{\lambda + \eta} & \frac{\lambda}{\lambda + \eta} & \frac{\lambda\theta}{\lambda + \eta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Эта R -матрица является также решением уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}(\lambda - \mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda - \mu), \quad (5)$$

где мы используем стандартное обозначение КМОЗР [18]–[20] для R -матриц R_{ij} , которые действуют нетривиально на пространствах V_i , V_j , здесь $j = 1, 2, 3$. В рассматриваемом нами случае $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{C}^2$. Далее мы будем использовать только твистованную R -матрицу (4) и для упрощения обозначений опускать индекс (J).

Модели Годена связаны с классическими r -матрицами [6]. Поэтому важно, что если мы положим $\theta = -\xi\eta$, то R -матрица будет обладать квазиклассическим свойством [43]:

$$R(\lambda, \eta, \theta)|_{\theta=-\xi\eta} = \mathbb{I} + \eta r(\lambda) + O(\eta^2), \quad (6)$$

где $r(\lambda)$ – соответствующая классическая r -матрица,

$$r(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \xi & -\xi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \xi \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} & -\xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

обладающая свойством унитарности $r_{21}(-\lambda) = -r_{12}(\lambda)$ и удовлетворяющая классическому уравнению Янга–Бакстера

$$[r_{13}(\lambda), r_{23}(\mu)] + [r_{12}(\lambda - \mu), r_{13}(\lambda) + r_{23}(\mu)] = 0.$$

Более того, чтобы вывести гамильтонианы Годена, необходимо нормировать R -матрицу (4) так, что [37], [38]

$$R(0, \eta) = \mathcal{P}, \quad (8)$$

где $\mathcal{P}$ – матрица перестановки в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. R -матрица (4) обладает свойством унитарности

$$R_{12}(\lambda)R_{21}(-\lambda) = \mathbb{I},$$

однако РТ-симметрия при этом оказывается нарушенной:

$$R_{21}(\lambda) \neq R_{12}^{t_1 t_2}(\lambda),$$

где $R_{21}(\lambda) = \mathcal{P}R_{12}(\lambda)\mathcal{P}$, а индексы t_1 и t_2 обозначают перестановки в первом и втором пространствах тензорного произведения $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Кроме того, R -матрица не обладает кроссинг-симметрией, однако удовлетворяет более слабому условию

$$(((R_{12}^{t_2}(\lambda))^{-1})^{t_2})^{-1} = g(\lambda)M_2R_{12}(\lambda + 2\eta)M_2^{-1}, \quad (9)$$

где

$$g(\lambda) = \frac{\lambda(2\lambda + \eta)}{(\lambda + \eta)^2}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что более общая матрица

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

коммутирует с R -матрицей: $[\widetilde{M} \otimes \widetilde{M}, R(\lambda)] = 0$.

Способ введения непериодических граничных условий, не нарушающих интегрируемость базовой модели, был развит в работе [33]. Граничные условия в левом и правом узлах системы выражаются посредством левой и правой матриц отражения K^- и K^+ . Условие совместности между внутренней областью и границей системы принимает вид так называемого уравнения отражения [34], [35]. Для левой матрицы отражения оно записывается в виде

$$R_{12}(\lambda - \mu)K_1^-(\lambda)R_{21}(\lambda + \mu)K_2^-(\mu) = K_2^-(\mu)R_{12}(\lambda + \mu)K_1^-(\lambda)R_{21}(\lambda - \mu). \quad (10)$$

Условие совместности в правом узле модели выражается с помощью дуального уравнения отражения [32], [33], [36]

$$A_{12}(\lambda - \mu)K_1^{+,t}(\lambda)B_{12}(\lambda + \mu)K_2^{+,t}(\mu) = K_2^{+,t}(\mu)C_{12}(\lambda + \mu)K_1^{+,t}(\lambda)D_{12}(\lambda - \mu). \quad (11)$$

где матрицы A , B , C , D получаются из R -матрицы уравнения отражения (10):

$$A_{12}(\lambda) = (R_{12}^{t_{12}}(\lambda))^{-1} = D_{21}(\lambda), \quad B_{12}(\lambda) = ((R_{21}^{t_1}(\lambda))^{-1})^{t_2} = C_{21}(\lambda).$$

Используя свойство (9), можно записать дуальное уравнение отражения (11) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} R_{12}(-\lambda + \mu)K_1^+(\lambda)M_2R_{21}(-\lambda - \mu - 2\eta)M_2^{-1}K_2^+(\mu) = \\ = K_2^+(\mu)M_1R_{12}(-\lambda - \mu - 2\eta)M_1^{-1}K_1^+(\lambda)R_{21}(-\lambda + \mu). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда можно проверить, что отображение

$$K^+(\lambda) = K^-(-\lambda - \eta)M \quad (13)$$

является биекцией между решениями уравнения отражения и дуального уравнения отражения.

Общее решение уравнения отражения, которое связано с жордановой деформацией R -матрицы Янга, имеет вид [32]

$$K^-(\lambda) = \frac{1}{d(\lambda)} \begin{pmatrix} \zeta - \lambda - \frac{\phi\theta}{\eta}\lambda^2 & \psi\lambda \\ \phi\lambda & \zeta + \lambda - \frac{\phi\theta}{\eta}\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где ζ , ϕ и ψ — произвольные параметры и

$$d(\lambda) = \zeta - \frac{\phi\theta}{\eta}\lambda^2 + \lambda\sqrt{1 + \phi\psi}.$$

Левая матрица отражения K^- нормирована так, что

$$K^-(\lambda)K^-(-\lambda) = \mathbb{I}. \quad (15)$$

Окончательно, полагая $\theta = -\xi\eta$, получаем, что матрица $K^-(\lambda)$ не зависит от квазиклассического параметра η :

$$\frac{\partial K^-(\lambda)}{\partial \eta} = 0. \quad (16)$$

Правая матрица отражения $K^+(\lambda)$ получается подстановкой равенства (14) в (13); при этом мы по-прежнему полагаем $\theta = -\xi\eta$. Важно отметить, что

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} K^+(\lambda) \cdot K^-(\lambda) = \mathbb{I}. \quad (17)$$

В общем случае условия нормировки (15) и (17) не так существенны для изучения открытой спиновой цепочки. Однако вместе с условиями (6) и (8) они обеспечивают квазиклассическое разложение трансфер-матрицы, что приводит к открытой модели Годена.

3. ДЕФОРМИРОВАННАЯ НЕОДНОРОДНАЯ XXX-ЦЕПОЧКА

В данном разделе мы рассмотрим жорданову деформацию неоднородной спиновой XXX-цепочки с N узлами, характеризующуюся локальным пространством $V_j = \mathbb{C}^2$ и параметром неоднородности α_j . Для простоты начнем с рассмотрения периодических граничных условий. Гильбертово пространство системы есть

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^N V_j = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}.$$

В рамках КМОЗР [18], [20], [24] для описания системы используется так называемая матрица монодромии

$$T(\lambda) = R_{0N}(\lambda - \alpha_N) \dots R_{01}(\lambda - \alpha_1). \quad (18)$$

Для простоты мы опускаем зависимость матрицы монодромии от квазиклассического параметра η , параметра деформации ξ и параметров неоднородности $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Заметим, что $T(\lambda)$ является матрицей размера 2×2 во вспомогательном пространстве $V_0 = \mathbb{C}^2$; ее элементы суть операторы, действующие на пространстве $\mathcal{H}$. С помощью уравнения Янга–Бакстера (5) можно непосредственно проверить, что матрица монодромии удовлетворяет RTT -соотношениям [18]–[20]:

$$R_{12}(\lambda - \mu) T_1(\lambda) T_2(\mu) = T_2(\mu) T_1(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu). \quad (19)$$

Это уравнение записано в тензорном произведении $V_0 \otimes V_0 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ вспомогательных пространств с использованием стандартных обозначений КМОЗР.

Из периодических граничных условий и RTT -соотношений (19) вытекает, что трансфер-матрицы $t(\lambda) = \text{tr}_0 T(\lambda)$ коммутируют при различных значениях спектрального параметра:

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0, \quad (20)$$

где мы вновь опустили несущественные аргументы.

В соответствии с квазиклассическим свойством (6) и нормировкой R -матрицы (8) квазиклассическое разложение трансфер-матрицы для специальных значений спектрального параметра имеет вид [37], [38]

$$Z_k = t(\lambda)|_{\lambda=\alpha_k} = \mathbb{I} + \eta H_k + O(\eta^2), \quad (21)$$

где H_k – соответствующие гамильтонианы Годена в периодическом случае. Условие $[H_k, H_l] = 0$ коммутирования гамильтонианов Годена выполняется благодаря

тому, что выполнено условие (20) коммутирования трансфер-матриц и тому факту, что первый член в приведенном выше разложении представляет собой единичную матрицу в силу (6) и (8).

Для построения интегрируемых спиновых цепочек с непериодическими граничными условиями мы будем использовать формализм Складина [33]. Соответствующая матрица монодромии $T(\lambda)$ записывается через две матрицы – матрицу $T(\lambda)$ (18) и матрицу отражения $K^-(\lambda)$ (14):

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= T(\lambda)K^-(\lambda)T^{-1}(-\lambda) = \\ &= R_{0N}(\lambda - \alpha_N) \dots R_{01}(\lambda - \alpha_1)K_0^-(\lambda)R_{10}(\lambda + \alpha_1) \dots R_{N0}(\lambda + \alpha_N), \end{aligned}$$

где мы для простоты опустили зависимость от других параметров. По построению коммутационные соотношения для матрицы монодромии $T(\lambda)$ в пространстве $V_0 \otimes V_0$ имеют вид

$$R_{12}(\lambda - \mu)T_1(\lambda)R_{21}(\lambda + \mu)T_2(\mu) = T_2(\mu)R_{12}(\lambda + \mu)T_1(\lambda)R_{21}(\lambda - \mu), \quad (22)$$

где использованы обозначения из работы [33].

Трансформатрица открытой цепочки определяется как след по вспомогательному пространству V_0 произведения дополнительной матрицы отражения $K^+(\lambda)$ и матрицы $T(\lambda)$ [33]:

$$t(\lambda) = \text{tr}_0(K^+(\lambda)T(\lambda)). \quad (23)$$

Матрица отражения $K^+(\lambda)$ (13) является решением соответствующего дуального уравнения отражения (12). Условие (20) коммутирования трансфер-матриц при различных значениях спектрального параметра вытекает из дуального уравнения отражения (12) и коммутационных соотношений (22) для матрицы монодромии $T(\lambda)$.

Аналогично периодическому случаю квазиклассическое разложение (21) трансфер-матрицы при специальных значениях спектрального параметра приводит к соответствующим гамильтонианам Годена H_k с граничными членами [40]. Как и в периодическом случае, коммутативность гамильтонианов H_k гарантируется условием (20) и тем фактом, что первый член в разложении (21) представляет собой единичную матрицу в силу квазиклассического свойства R -матрицы (6) и условий нормировки (8), (15), (17). Мы найдем гамильтонианы Годена в следующем разделе.

4. ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ ГОДЕНА С ГРАНИЧНЫМИ ЧЛЕНАМИ

В данном разделе мы вычислим в явном виде гамильтонианы Годена. В периодическом случае [37], [38] можно непосредственно вычислить два первых члена в разложении (21). Полагая $\theta = -\xi\eta$ и $\lambda = \alpha_k$ и используя нормировку R -матрицы в соответствии с (8), получаем

$$\begin{aligned} Z_k|_{\eta=0} &= \text{tr}_0(R_{0N}(\alpha_k - \alpha_N) \dots R_{0k}(\alpha_k - \alpha_k) \dots R_{01}(\alpha_k - \alpha_1))|_{\eta=0} = \\ &= \text{tr}_0(R_{0N}(\alpha_k - \alpha_N) \dots \mathcal{P}_{0k} \dots R_{01}(\alpha_k - \alpha_1))|_{\eta=0} = \\ &= \text{tr}_0 \mathcal{P}_{0k} = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Чтобы вывести соответствующие гамильтонианы Годена, во втором члене мы также используем квазиклассическое свойство R -матрицы (6):

$$\begin{aligned}
 H_k &= \left. \frac{\partial Z_k}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \\
 &= \sum_{l>k} \text{tr}_0 \left(R_{0N}(\alpha_k - \alpha_N) \dots \frac{\partial R_{0l}(\alpha_k - \alpha_l)}{\partial \eta} \dots \mathcal{P}_{0k} \dots R_{01}(\alpha_k - \alpha_1) \right) \Big|_{\eta=0} + \\
 &\quad + \sum_{l<k} \text{tr}_0 \left(R_{0N}(\alpha_k - \alpha_N) \dots \mathcal{P}_{0k} \dots \frac{\partial R_{0l}(\alpha_k - \alpha_l)}{\partial \eta} \dots R_{01}(\alpha_k - \alpha_1) \right) \Big|_{\eta=0} = \\
 &= \sum_{l>k} \text{tr}_0 \left(\frac{\partial R_{0l}(\alpha_k - \alpha_l)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \mathcal{P}_{0k} \right) + \sum_{l<k} \text{tr}_0 \left(\mathcal{P}_{0k} \frac{\partial R_{0l}(\alpha_k - \alpha_l)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right) = \\
 &= \sum_{l \neq k} r_{kl}(\alpha_k - \alpha_l). \tag{24}
 \end{aligned}$$

В терминах локальных операторов $\vec{S}_j = \vec{\sigma}_j/2$ спина $1/2$ эти гамильтонианы имеют вид

$$H_k \simeq 2 \sum_{l \neq k} \left(\frac{\vec{S}_k \cdot \vec{S}_l}{\alpha_k - \alpha_l} + \xi (S_k^z S_l^+ - S_l^+ S_k^z) \right),$$

где $\simeq$ обозначает равенство с точностью до постоянного аддитивного члена. С помощью алгебраического анзаца Бете в работе [43] было показано, что спектры этих гамильтонианов совпадают со спектрами $sl(2)$ -инвариантной модели, когда $\xi = 0$.

В случае неперIODических границ мы рассмотрим левую и правую матрицы отражения $K^-(\lambda)$ и $K^+(\lambda)$, задаваемые выражениями (14) и (13), и положим $\theta = -\xi\eta$. Чтобы получить разложение (24) для трансфер-матрицы (23), выберем $\lambda = \alpha_k$ и вычислим первый член:

$$\begin{aligned}
 Z_k \Big|_{\eta=0} &= \text{tr}_0 (K^+(\alpha_k) \mathcal{T}(\alpha_k)) \Big|_{\eta=0} = \\
 &= \text{tr}_0 (K_0^+(\alpha_k) R_{0N}(\alpha_k - \alpha_N) \dots \mathcal{P}_{0k} \dots R_{01}(\alpha_k - \alpha_1) \times \\
 &\quad \times K_0^-(\alpha_k) R_{10}(\alpha_k + \alpha_1) \dots R_{k0}(2\alpha_k) \dots R_{N0}(\alpha_k + \alpha_N)) \Big|_{\eta=0} = \\
 &= \text{tr}_0 (K_0^-(-\alpha_k) \mathcal{P}_{0k} K_0^-(\alpha_k)) = K_k^-(\alpha_k) K_k^-(-\alpha_k) = \mathbb{1}.
 \end{aligned}$$

В данной цепочке равенств на последнем шаге мы использовали нормировку (15). Гамильтонианы Годена с граничными членами связаны со вторым членом в разложении (24):

$$\begin{aligned}
 H_k &= \left. \frac{\partial Z_k}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \\
 &= \text{tr}_0 \left(\frac{\partial K_0^+(\alpha_k)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \mathcal{P}_{0k} K_0^-(\alpha_k) \right) + \text{tr}_0 \left(K_0^-(-\alpha_k) \mathcal{P}_{0k} K_0^-(\alpha_k) \frac{\partial R_{k0}(2\alpha_k)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right) + \\
 &\quad + \sum_{l>k} \text{tr}_0 \left(K_0^-(-\alpha_k) \frac{\partial R_{0l}(\alpha_k - \alpha_l)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \mathcal{P}_{0k} K_0^-(\alpha_k) \right) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{l < k} \text{tr}_0 \left(K_0^- (-\alpha_k) \mathcal{P}_{0k} \frac{\partial R_{0l}(\alpha_k - \alpha_l)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} K_0^- (\alpha_k) \right) + \\ + \sum_{l \neq k} \text{tr}_0 \left(K_0^- (-\alpha_k) \mathcal{P}_{0k} K_0^- (\alpha_k) \frac{\partial R_{l0}(\alpha_k + \alpha_l)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right).$$

При выводе этого соотношения мы воспользовались тем, что левая матрица отражения $K^-(\lambda)$ не зависит от квазиклассического параметра η (см. равенство (16)). Окончательно гамильтонианы Годена можно записать в более сжатом виде:

$$H_k = \Gamma_k(\alpha_k) + \sum_{l \neq k} r_{kl}(\alpha_k - \alpha_l) + \sum_{l \neq k} K_k^-(\alpha_k) r_{lk}(\alpha_k + \alpha_l) K_k^-(-\alpha_k), \quad (25)$$

где $r_{ij}(\lambda)$ – соответствующая классическая r -матрица (7) и

$$\Gamma_k(\alpha_k) = K_k^-(\alpha_k) \left(\frac{\partial K_k^+(\alpha_k)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + \text{tr}_0(K_0^-(-\alpha_k) \mathcal{P}_{0k} r_{k0}(2\alpha_k)) \right).$$

Заметим, что второй член в правой части равенства (25) совпадает с гамильтонианом Годена (24), а первый и третий члены суть граничные члены, зависящие от матриц отражения K^- и K^+ . Следовательно, гамильтонианы (25) являются рациональными функциями граничных параметров ζ , ϕ , ψ и параметра деформации ξ .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили деформированные $sl(2)$ -гамильтонианы Годена с граничными членами. Начав с $SL(2)$ -инвариантной R -матрицы Янга, деформированной жордановым твистующим элементом для универсальной обертывающей алгебры $U(sl(2))$ и с общих решений ассоциированного уравнения отражения и дуального уравнения отражения, мы получили деформированную неоднородную XXX -цепочку спина $1/2$. Мы показали, что квазиклассическое разложение трансфер-матрицы этой цепочки приводит к соответствующим гамильтонианам Годена с граничными членами.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Foundation for Science and Technology (Portugal) (проект № PTDC/MAT/099880/2008) в рамках European Programm COMPETE/FEDER.

Список литературы

- [1] B. M. Garraway, *Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A*, **369**:1939 (2011), 1137–1155.
- [2] Н. М. Боголюбов, П. П. Кулиш, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **398** (2012), 26–54.
- [3] L. Amico, A. Osterloh, *Ann. Phys.*, **524**:3–4 (2012), 133–145, arXiv: 1201.5851.
- [4] M. Gaudin, *J. Physique*, **37**:10 (1976), 1087–1098.
- [5] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson, Paris, 1983.
- [6] Е. К. Склянин, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **164** (1987), 151–169.
- [7] М. А. Семенов-Тянь-Шанский, “Quantum and classical integrable systems”, *Integrability of Nonlinear Systems* (Pondicherry, India, January 8–26, 1996), Lecture Notes in Physics, **495**, eds. Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani, Springer, Berlin, 1997, 314–377.

- [8] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [9] B. Jurčo, “Classical Yang-Baxter equations and quantum integrable systems (Gaudin models)”, *Quantum Groups* (Clausthal, Germany, 19–26 July, 1989), Lecture Notes in Physics, **370**, eds. H.-D. Doebner, J.-D. Hennig, Springer, Berlin, 1990, 219–227.
- [10] P. P. Kulish, N. Manojlović, *J. Math. Phys.*, **42**:10 (2001), 4757–4778, arXiv: nlin/0103010.
- [11] P. P. Kulish, N. Manojlović, *J. Math. Phys.*, **44**:2 (2003), 676–700, arXiv: nlin/0204037.
- [12] V. Kurak, A. Lima-Santos, *Nucl. Phys. B*, **701**:3 (2004), 497–515, arXiv: nlin/0406025.
- [13] H. M. Babujian, R. Flume, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:22 (1994), 2029–2039, arXiv: hep-th/9310110.
- [14] B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, *Commun. Math. Phys.*, **166**:1 (1994), 27–62.
- [15] N. Reshetikhin, A. Varchenko, “Quasiclassical asymptotics of solutions to the KZ equations”, *Geometry, Topology and Physics*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, **IV**, ed. S.-T. Yau, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, 293–273.
- [16] E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.*, **47**:3 (1999), 275–292.
- [17] T. Skrypnyk, *J. Math. Phys.*, **50**:3 (2009), 033540, 28 pp.
- [18] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [19] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method. Recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories* (Tvärminne, Finland, 23–27 March, 1981), Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, 1982, 61–119.
- [20] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symétries quantiques* (Les Houches, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219, arXiv: hep-th/9605187.
- [21] V. G. Drinfeld, “Quantum groups”, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, CA, 1986), 1987, 798–820.
- [22] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**:1 (1985), 63–69.
- [23] В. Г. Дринфельд, *Алгебра и анализ*, **1**:6 (1989), 114–148.
- [24] P. P. Kulish, “Twist deformations of quantum integrable spin chains”, *Noncommutative Spacetimes: Symmetries in Noncommutative Geometry and Field Theory*, Lecture Notes in Physics, **774**, eds. P. Aschieri, M. Dimitrijevic, P. Kulish, F. Lizzi, J. Wess, Springer, Berlin, 2009, 165–188.
- [25] M. Gesteinhaber, A. Giaquinto, S. D. Schack, “Quantum symmetry”, *Quantum Groups*, Lecture Notes in Mathematics, **1510**, ed. P. P. Kulish, Springer, Berlin, 1992, 9–46.
- [26] O. V. Ogievetsky, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), 1994, Suppl. No. 37, 185–199.
- [27] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, A. I. Mudrov, *J. Math. Phys.*, **40**:9 (1999), 4569–4568, arXiv: math/9806014.
- [28] P. P. Kulish, “Twisting of quantum groups and integrable systems”, *Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years After NEEDS '79* (Lecce, Italy, July 1–10, 1999), eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, B. Prinari, G. Soliani, World Sci., Singapore, 2000, 304–310.
- [29] V. Chari, A. N. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [30] P. P. Kulish, A. A. Stolin, *Czech. J. Phys.*, **47**:12 (1997), 1207–1212.
- [31] S. M. Khoroshkin, A. A. Stolin, V. N. Tolstoy, *Comm. Algebra*, **26** (1998), 1041–1055.
- [32] П. П. Кулиш, Н. Манойлович, З. Надь, *ТМФ*, **163**:2 (2010), 288–298, arXiv: 0911.5592.
- [33] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **21**:10 (1988), 2375–2389.
- [34] И. В. Чередник, *ТМФ*, **61**:1 (1984), 35–44.
- [35] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **25**:22 (1992), 5963–5975, arXiv: hep-th/9209054.
- [36] L. Freidel, J. M. Maillet, *Phys. Lett. B*, **262**:2–3 (1991), 278–284.
- [37] K. Hikami, P. P. Kulish, M. Wadati, *Chaos, Solitons and Fractals*, **2**:5 (1992), 543–550.
- [38] K. Hikami, P. P. Kulish, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **61**:9 (1992), 3071–3076.

- [39] K. Hikami, *J. Phys. A*, **28**:17 (1995), 4997–5007.
- [40] W.-L. Yang, Y.-Z. Zhang, M.D. Gould, *Nucl. Phys. B*, **698**:3 (2004), 503–516, arXiv: hep-th/0411048.
- [41] W.-L. Yang, Y.-Z. Zhang, R. Sasaki, *Nucl. Phys. B*, **729** (2005), 594–610, arXiv: hep-th/0507148.
- [42] N. Cirilo António, N. Manojlović, Z. Nagy, *Rev. Math. Phys.*, **25**:10 (2013), 1343004, 14 pp., arXiv: 1303.2481.
- [43] N. Cirilo António, N. Manojlović, *J. Math. Phys.*, **46**:10 (2005), 102701, 19 pp., arXiv: nlin/0506029.

Поступила в редакцию 13.11.2013