Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. З. Пакуляк, Э. Рагуси, Н. А. Славнов, Скалярные произведения в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Старший коэффициент, *ТМФ*, 2014, том 178, номер 3, 363–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:52:06

© 2014 г. С. З. Пакуляк^{*†‡}, Э. Рагуси[§], Н. А. Славнов[¶]

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В МОДЕЛЯХ С $GL(3)$ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ R -МАТРИЦЕЙ. СТАРШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ

Изучаются квантовые интегрируемые модели с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей, к которым применим иерархический анзац Бете. В таких моделях скалярные произведения векторов Бете можно представить в виде билинейной комбинации старших коэффициентов. Показано, что в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей существуют два разных старших коэффициента. Для них получены различные представления в виде сумм по разбиениям. Также доказаны некоторые важные свойства старших коэффициентов, которые необходимы для вычисления скалярных произведений.

Ключевые слова: иерархический анзац Бете, скалярные произведения, старшие коэффициенты.

DOI: 10.4231/tmf8613

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из отличительных особенностей точно решаемых квантовых интегрируемых систем является возможность найти собственные векторы их гамильтонианов. Знание собственных векторов позволяет получить аналитическое представление формы и поведения корреляционных функций в этих моделях. Основным инструментом для таких вычислений служит квантовый метод обратной задачи [1]–[4]. В частности, для построения собственных векторов трансфер-матрицы, которая является производящим функционалом набора коммутирующих гамильтонианов используется анзац Бете. Этот метод дает хорошие результаты в “простейших” случаях, основанных на симметриях $GL(2)$ или $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)$, но, к сожалению, он становится

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pakuliak@theor.jinr.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[§]Laboratoire d’Annecy-le-Vieux de Physique Théorique, CNRS – Université de Savoie, Annecy-le-Vieux, France. E-mail: ragoucy@lapth.cnrs.fr

[¶]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

технически очень сложным для моделей, базирующихся на алгебрах старшего ранга. По этой причине такие модели изучены гораздо меньше.

В настоящей работе мы начинаем систематическое изучение скалярных произведений векторов Бете в квантовых интегрируемых моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Роль скалярных произведений исключительно важна при исследовании корреляционных функций [3], [5]–[7]. В частности, в моделях, для которых может быть решена квантовая обратная задача [8], [9], можно свести вычисление формфакторов и корреляционных функций локальных операторов к вычислению скалярных произведений векторов Бете [8]. Более того, явные и компактные формулы для скалярных произведений иногда позволяют исследовать корреляционные функции даже в таких моделях, для которых решение квантовой обратной задачи неизвестно [3], [5]–[7], [10]. Данный подход успешно применялся в квантовых интегрируемых моделях с $GL(2)$ -инвариантной или $GL(2)$ тригонометрической R -матрицей [11]–[22]. Во всех этих работах существенно использовалось детерминантное представление скалярных произведений векторов Бете, полученное в работе [23].

Проблема вычисления скалярных произведений оказывается гораздо более сложной в моделях с симметриями старшего ранга. Первые результаты в этой области были достигнуты Решетихиным для моделей с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей [24]. В указанной работе была получена формула для скалярного произведения векторов Бете общего вида, а также детерминантное представление для нормы собственного вектора трансфер-матрицы. В представлении Решетихина для скалярного произведения важнейшую роль играет понятие “старшего коэффициента”. Эта функция зависит от R -матрицы модели и является рациональной функцией параметров Бете. Скалярное произведение оказывается билинейной комбинацией старших коэффициентов. Знание старшего коэффициента в некоторых важных частных случаях позволяет свести эту билинейную комбинацию к детерминантному представлению [25]–[27], аналогичному представлению из работы [23].

В работе [24] было показано, что старший коэффициент равен статистической сумме 15-вершинной модели со специальными граничными условиями. Пользуясь этим, можно найти явное представление для старшего коэффициента в моделях с $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей [25], [28]. К сожалению, эти результаты нельзя непосредственно обобщить на случай моделей с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Основная причина состоит в том, что $GL(3)$ тригонометрическая R -матрица не является симметричной (см. формулу (2.2) ниже). Следствием этого является то, что в данных моделях на самом деле существуют два старших коэффициента, которые имеют существенно разные представления. Основная цель настоящей работы – получить такие представления. Кроме того, мы устанавливаем ряд важных свойств старших коэффициентов, которые необходимы для вычисления скалярных произведений векторов Бете.

В отличие от подхода Решетихина, мы не связываем старшие коэффициенты с какими-либо статистическими суммами. Вместо этого мы применяем для их вычисления более прямой метод. Первое, что мы используем для вычисления старших коэффициентов, – это явное представление дуальных векторов Бете [29]. Следует отметить, что в пионерских работах по иерархическому анзацу Бете [2], [30], [31] не было получено явных формул ни для векторов Бете, ни для векторов, дуальных

к ним. Более подробные формулы приведены в работе [32], где исследовались решения квантового уравнения Книжника–Замолотчикова. В указанной работе векторы Бете были представлены в виде некоторых следов по вспомогательному пространству от произведений матриц монодромии и R -матриц.

Явные формулы для векторов Бете в терминах матричных элементов матрицы монодромии для моделей с $GL(N)$ тригонометрической R -матрицей получены в работе [33], где использовалось их представление в терминах токовых генераторов квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ [34] (см. также [35]).

Второй отличительной особенностью нашего метода является использование формул кратного действия матричных элементов матрицы монодромии на векторы Бете [36]. С помощью этих формул можно вычислить не только старшие коэффициенты, но и полное скалярное произведение векторов Бете. Однако данная проблема является технически гораздо более сложной. Для ее решения, в частности, требуются некоторые неочевидные свойства старших коэффициентов. Поэтому мы отложим решение этой задачи до нашей следующей публикации. В настоящей работе мы ограничиваемся только изучением старших коэффициентов.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы описываем модель, с которой работаем, и вводим обозначения, которыми будем пользоваться далее. Мы также напоминаем некоторые полученные ранее результаты, которые потребуются при дальнейшем изложении. В разделе 3 мы приводим главный результат работы – формулы для старших коэффициентов в виде суммы по разбиениям. Доказательство этих формул дано в разделе 4. В разделе 5 приведены свойства старших коэффициентов, а также альтернативные представления для них. Приложения содержат различные формулы, которые используются в статье, и доказательства некоторых свойств старших коэффициентов.

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Модель. Мы рассматриваем квантовую интегрируемую модель, которая задается матрицей монодромии $T(u)$ с матричными элементами $T_{ij}(u)$, $i, j = 1, 2, 3$, и удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$R(u, v) \cdot (T(u) \otimes 1) \cdot (1 \otimes T(v)) = (1 \otimes T(v)) \cdot (T(u) \otimes 1) \cdot R(u, v) \quad (2.1)$$

с $GL(3)$ тригонометрической квантовой R -матрицей

$$\begin{aligned} R(u, v) = & f(u, v) \sum_{1 \leq i \leq 3} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (E_{ii} \otimes E_{jj} + E_{jj} \otimes E_{ii}) + \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (ug(u, v)E_{ij} \otimes E_{ji} + vg(u, v)E_{ji} \otimes E_{ij}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этой формуле рациональные функции $f(u, v)$ и $g(u, v)$ суть

$$f(u, v) = \frac{qu - q^{-1}v}{u - v}, \quad g(u, v) = \frac{q - q^{-1}}{u - v},$$

где q – некоторое комплексное число (параметр деформации), а $(E_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}$, $i, j, l, k = 1, 2, 3$, являются матрицами размера 3×3 , у которых на пересечении

i -й строки и j -го столбца стоит единица, а все остальные матричные элементы равны нулю. R -матрица (2.2) называется тригонометрической, потому что ее классический предел дает классическую тригонометрическую r -матрицу [37]. В формуле (2.2) тригонометрическая R -матрица записана в терминах мультипликативных переменных, так что по существу она зависит от отношения параметров u/v .

Благодаря коммутационным соотношениям (2.1) трансфер-матрица

$$t(w) = \text{tr } T(w) = T_{11}(w) + T_{22}(w) + T_{33}(w)$$

является производящей функцией интегралов движения, и первый шаг алгебраического анзаца Бете [1], [2] заключается в построении набора собственных состояний для этих коммутирующих операторов в терминах элементов матрицы монодромии. Мы считаем, что эти матричные элементы действуют в квантовом пространстве V и в этом пространстве существует вектор $|0\rangle$ такой, что

$$T_{ij}(u)|0\rangle = \begin{cases} 0, & i > j, \\ \lambda_i(u)|0\rangle, & i = j, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\lambda_i(u) \in \mathbb{C}[[u, u^{-1}]]$. Мы также предполагаем, что операторы $T_{ij}(u)$ действуют в дуальном пространстве V^* , в котором существует вектор $\langle 0|$ такой, что

$$\langle 0|T_{ij}(u) = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \lambda_i(u)\langle 0|, & i = j, \end{cases}$$

где λ_i те же, что и в (2.3).

Векторы Бете $\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$ в квантовых интегрируемых моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей зависят от двух наборов переменных

$$\bar{u} = \{u_1, \dots, u_a\}, \quad \bar{v} = \{v_1, \dots, v_b\}, \quad (2.4)$$

которые называются параметрами Бете. Данные векторы можно построить в рамках метода иерархического анзаца Бете, сформулированного в работе [2]. Они представляют собой некоторые полиномы от матричных элементов матрицы монодромии $T_{12}(u)$, $T_{23}(u)$, $T_{13}(u)$, зависящих от параметров Бете и действующих на вектор $|0\rangle$. Векторы Бете становятся собственными состояниями трансфер-матрицы $t(w)$, если параметры $\bar{u}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений Бете [2]. Такие векторы иногда называют *on-shell* векторами Бете. В противном случае, если $\bar{u}$ и $\bar{v}$ являются комплексными числами в общем положении, мы имеем дело с векторами Бете общего вида.

Аналогично, дуальные векторы $\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$ можно построить в виде полиномов от операторов $T_{21}(u)$, $T_{32}(u)$, $T_{31}(u)$, действующих на вектор $\langle 0|$. Они также зависят от двух наборов параметров Бете $\bar{u}$ и $\bar{v}$ (см. явные формулы (2.14), (2.15) ниже) и становятся собственными состояниями трансфер-матрицы $t(w)$, если параметры $\bar{u}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений Бете.

2.2. Обозначения. Ниже мы будем всегда обозначать наборы переменных чертой сверху, как в формуле (2.4). Обозначения $\alpha\bar{u}$ или, в частности, $\bar{u}q^{\pm 2}$ используются, когда все элементы набора умножены на данное число:

$$\alpha\bar{u} = \{\alpha u_1, \dots, \alpha u_a\}, \quad \bar{v}q^{\pm 2} = \{v_1 q^{\pm 2}, \dots, v_b q^{\pm 2}\}.$$

Для экономии места и упрощения изложения мы будем пользоваться определенным соглашением для обозначения произведений коммутирующих матричных элементов матрицы монодромии $T_{ij}(w)$ ($[T_{ij}(w_1), T_{ij}(w_2)] = 0$), вакуумных собственных значений $\lambda_i(w)$ и их отношений $r_k(w) = \lambda_k(w)/\lambda_2(w)$, $k = 1, 3$. А именно, если написано, что такой оператор или скалярная функция зависят от набора переменных (например, $T_{ij}(\bar{w})$, $\lambda_i(\bar{u})$, $r_k(\bar{v})$), то это означает, что мы имеем дело с произведением этих операторов или скалярных функций по соответствующему набору:

$$T_{ij}(\bar{w}) = \prod_{w_k \in \bar{w}} T_{ij}(w_k), \quad \lambda_2(\bar{u}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} \lambda_2(u_j), \quad r_k(\bar{v}_l) = \prod_{\substack{v_j \in \bar{v}, \\ v_j \neq v_l}} r_k(v_j).$$

Здесь и далее символ $\bar{v}_l$ для произвольного набора $\bar{v}$ означает набор $\bar{v} \setminus v_l$. Аналогично будут обозначаться произведения функций $f(u, v)$:

$$f(w_i, \bar{w}_i) = \prod_{\substack{w_j \in \bar{w}, \\ w_j \neq w_i}} f(w_i, w_j), \quad f(\bar{u}, \bar{v}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} \prod_{v_k \in \bar{v}} f(u_j, v_k).$$

Разбиения наборов на два или более подмножеств обозначаются как $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}$. Для нумерации подмножеств мы используем римские цифры. Объединение наборов обозначается фигурными скобками, например $\{\bar{w}, \bar{u}\} = \bar{v}$.

Во многих формулах мы будем иметь дело с детерминантом Изергина $K_k(\bar{x}|\bar{y})$ [38]. Эта функция определяется для двух наборов переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$ с одинаковым количеством элементов $\#\bar{x} = \#\bar{y} = k$ формулой

$$K_k(\bar{x}|\bar{y}) = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq k} (qx_i - q^{-1}y_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i - x_j)(y_j - y_i)} \det \left[\frac{q - q^{-1}}{(x_i - y_j)(qx_i - q^{-1}y_j)} \right]. \quad (2.5)$$

Ниже мы также будем использовать модификации детерминанта Изергина

$$K_k^{(\ell)}(\bar{x}|\bar{y}) = \left(\prod_{i=1}^k x_i \right) K_k(\bar{x}|\bar{y}), \quad K_k^{(r)}(\bar{x}|\bar{y}) = \left(\prod_{i=1}^k y_i \right) K_k(\bar{x}|\bar{y}), \quad (2.6)$$

которые называются левым и правым детерминантами Изергина. Некоторые свойства детерминанта Изергина и его модификаций приведены в приложении А.

Левый и правый детерминанты Изергина играют роль старших коэффициентов скалярных произведений в моделях, основанных на алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)$. Разумеется, разница между ними очень незначительна, в частности

$$\prod_{i=1}^k x_i^{-1} K_k^{(\ell)}(\bar{x}|\bar{y}) - \prod_{i=1}^k y_i^{-1} K_k^{(r)}(\bar{x}|\bar{y}) = 0. \quad (2.7)$$

Более того, в случае алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)$ существует преобразование, в результате которого R -матрица становится симметричной. Если применить это преобразование к скалярным произведениям, то два старших коэффициента станут равны друг другу (в этом случае они оба имеют вид исходного детерминанта Изергина K_k , умноженного на произведение всех $\sqrt{x_i y_i}$). Однако в моделях, которые основаны на алгебрах старшего ранга, упомянутое преобразование R -матрицы уже не существует. Это приводит к тому, что в таких моделях аналоги правого и левого старших коэффициентов имеют существенно разные представления.

2.3. Кратное действие операторов T_{ij} на векторы Бете. При выводе явного представления для старших коэффициентов необходимо знать, как действуют произведения операторов $T_{ij}(\bar{w})$ на векторы Бете. Соответствующие формулы были получены в работе [36]. Мы напоминаем здесь те из них, которые потребуются в дальнейшем. Ниже во всех формулах этого раздела $\{\bar{v}, \bar{w}\} = \xi$, $\{\bar{u}, \bar{w}\} = \bar{\eta}$ и $\#\bar{w} = n$.

Кратное действие операторов T_{21} дается формулой

$$T_{21}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = (-q)^n \lambda_2(\bar{w}) \sum r_1(\bar{\eta}_\Pi) f(\bar{\eta}_\Pi, \bar{\eta}_\Pi) f(\bar{\eta}_\Pi, \bar{\eta}_{\Pi\Pi}) f(\bar{\eta}_{\Pi\Pi}, \bar{\eta}_\Pi) \frac{f(\bar{\xi}_\Pi, \bar{\xi}_\Pi)}{f(\bar{\xi}_\Pi, \bar{\eta}_\Pi)} \times \\ \times \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_\Pi) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\eta}_\Pi|q^2\bar{\xi}_\Pi) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\xi}_\Pi|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{a-n,b}(\bar{\eta}_{\Pi\Pi}; \bar{\xi}_\Pi). \quad (2.8)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_\Pi, \bar{\eta}_{\Pi\Pi}, \bar{\eta}_{\Pi\Pi\Pi}\}$ таким, что $\#\bar{\eta}_\Pi = \#\bar{\eta}_{\Pi\Pi} = n$, и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_\Pi, \bar{\xi}_{\Pi\Pi}\}$ таким, что $\#\bar{\xi}_\Pi = n$.

Кратное действие операторов T_{32} дается формулой

$$T_{32}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = (-q)^{-n} \lambda_2(\bar{w}) \sum r_3(\bar{\xi}_\Pi) f(\bar{\xi}_\Pi, \bar{\xi}_\Pi) f(\bar{\xi}_\Pi, \bar{\xi}_{\Pi\Pi}) f(\bar{\xi}_{\Pi\Pi}, \bar{\xi}_\Pi) \frac{f(\bar{\eta}_\Pi, \bar{\eta}_{\Pi\Pi})}{f(\bar{\xi}_\Pi, \bar{\eta}_{\Pi\Pi})} \times \\ \times \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_\Pi) \mathbf{K}_n^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_\Pi|\bar{\xi}_\Pi) \mathbf{K}_n^{(\ell)}(\bar{\xi}_\Pi|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{a,b-n}(\bar{\eta}_{\Pi\Pi}; \bar{\xi}_{\Pi\Pi}). \quad (2.9)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_\Pi, \bar{\xi}_{\Pi\Pi}, \bar{\xi}_{\Pi\Pi\Pi}\}$ таким, что $\#\bar{\xi}_\Pi = \#\bar{\xi}_{\Pi\Pi} = n$, и $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_\Pi, \bar{\eta}_{\Pi\Pi}\}$ таким, что $\#\bar{\eta}_\Pi = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формулах (2.8) и (2.9) ограничения на количество элементов в подмножествах определяются нижними индексами детерминантов Изергина и верхними индексами векторов Бете. Однако для удобства читателей мы и в дальнейшем будем описывать эти ограничения в специальных комментариях после формул.

Если в формуле (2.8) положить $n = a$, то $\bar{\eta}_{\Pi\Pi} = \emptyset$, и мы получаем

$$T_{21}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = (-q)^a \lambda_2(\bar{w}) \sum r_1(\bar{\eta}_\Pi) \frac{f(\bar{\eta}_{\Pi\Pi}, \bar{\eta}_\Pi) f(\bar{\xi}_{\Pi\Pi}, \bar{\xi}_\Pi)}{f(\bar{\xi}_{\Pi\Pi}, \bar{\eta}_\Pi)} \times \\ \times \mathbf{K}_a^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_\Pi) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_\Pi|q^2\bar{\xi}_\Pi) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_\Pi|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{0,b}(\emptyset; \bar{\xi}_{\Pi\Pi}). \quad (2.10)$$

Если в дополнение к этому $\bar{v} = \emptyset$, и нам требуется найти коэффициент при $r_1(\bar{w})$, то $\bar{\xi}_\Pi = \bar{w}$, $\bar{\xi}_{\Pi\Pi} = \emptyset$, и следует положить $\bar{\eta}_\Pi = \bar{w}$, $\bar{\eta}_{\Pi\Pi} = \bar{u}$. Воспользовавшись формулами (A.2) и (A.3) приложения A, получаем

$$T_{21}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,0}(\bar{u}; \emptyset) = \lambda_2(\bar{w}) r_1(\bar{w}) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{u}|\bar{w})|0\rangle + \text{IT}, \quad (2.11)$$

где через IT обозначены несущественные члены (irrelevant terms), т.е. слагаемые, которые не дают вклада в искомым коэффициент.

Аналогично, если положить в (2.9) $n = b$, то $\bar{\xi}_{\Pi\Pi} = \emptyset$, и мы получим

$$T_{32}(\bar{w})\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = (-q)^{-b} \lambda_2(\bar{w}) \sum r_3(\bar{\xi}_\Pi) \frac{f(\bar{\xi}_\Pi, \bar{\xi}_{\Pi\Pi}) f(\bar{\eta}_\Pi, \bar{\eta}_{\Pi\Pi})}{f(\bar{\xi}_\Pi, \bar{\eta}_{\Pi\Pi})} \times \\ \times \mathbf{K}_b^{(r)}(q^{-2}\bar{w}|\bar{\eta}_\Pi) \mathbf{K}_b^{(r)}(q^{-2}\bar{\eta}_\Pi|\bar{\xi}_\Pi) \mathbf{K}_b^{(\ell)}(\bar{\xi}_\Pi|q^2\bar{w}) \mathbf{B}^{a,0}(\bar{\eta}_{\Pi\Pi}; \emptyset). \quad (2.12)$$

Если к тому же $\bar{u} = \emptyset$, и мы хотим найти коэффициент при $r_3(\bar{w})$, то $\bar{\eta}_I = \bar{w}$, $\bar{\eta}_{II} = \emptyset$, и мы должны положить $\bar{\xi}_I = \bar{w}$, $\bar{\xi}_{II} = \bar{v}$. Воспользовавшись формулами (A.2) и (A.3), получаем

$$T_{32}(\bar{w})\mathbf{B}^{0,b}(\emptyset; \bar{v}) = \lambda_2(\bar{w})r_3(\bar{w})\mathbf{K}_b^{(r)}(\bar{w}|\bar{v})|0\rangle + \text{IT}. \quad (2.13)$$

Формулы (2.11), (2.13) воспроизводят известные результаты для моделей с $GL(2)$ тригонометрической R -матрицей.

2.4. Дуальные векторы Бете. Мы уже отмечали, что векторы Бете представляются в виде некоторых полиномов от матричных элементов матрицы монодромии $T_{12}(u)$, $T_{23}(u)$, $T_{13}(u)$, примененных к вектору $|0\rangle$. Для формул кратного действия (2.8), (2.9) явный вид этих полиномов несуществен. Однако, чтобы получить формулы для старших коэффициентов, нам потребуются явные представления в терминах матричных элементов матрицы монодромии для дуальных векторов Бете. Такие представления были получены в нашей работе [29]. Мы приводим два из них:

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \frac{\mathbf{K}_k^{(r)}(\bar{v}_I|\bar{u}_I)}{\lambda_2(\bar{v}_{II})\lambda_2(\bar{u})} \frac{f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})}{f(\bar{v}, \bar{u})} \langle 0|T_{32}(\bar{v}_{II})T_{21}(\bar{u}_{II})T_{31}(\bar{u}_I), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \frac{\mathbf{K}_k^{(\ell)}(\bar{v}_I|\bar{u}_I)}{\lambda_2(\bar{u}_{II})\lambda_2(\bar{v})} \frac{f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})}{f(\bar{v}, \bar{u})} \langle 0|T_{21}(\bar{u}_{II})T_{32}(\bar{v}_{II})T_{31}(\bar{v}_I). \quad (2.15)$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}$ и $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}$ таким, что $\#\bar{u}_I = \#\bar{v}_I = k$, $k = 0, \dots, \min(a, b)$.

Для наших целей потребуются оба представления. Они соответствуют различным вложениям алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)$ в алгебру $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$. Несложно также проверить, что формулы (2.14) и (2.15) связаны друг с другом изоморфизмом φ , описанным в работе [29]. Этот изоморфизм отображает исходную алгебру $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ на алгебру $U_{q^{-1}}(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$:

$$\varphi(T_{ij}(u)) = \tilde{T}_{4-j, 4-i}(u), \quad (2.16)$$

где $T(u) \in U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ и $\tilde{T}(u) \in U_{q^{-1}}(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$. Отображение (2.16) является очень мощным инструментом изучения скалярных произведений. В частности, с помощью отображения между $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ и $U_{q^{-1}}(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$ можно получить многие свойства скалярных произведений.

3. ФОРМУЛЫ В ВИДЕ СУММЫ ДЛЯ СТАРШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Скалярные произведения определяются следующим образом:

$$S_{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C|\bar{u}^B; \bar{v}^B) = \mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)\mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B), \quad (3.1)$$

где все параметры Бете являются комплексными числами в общем положении. Мы добавили индексы C и B к наборам $\bar{u}$, $\bar{v}$, чтобы подчеркнуть, что векторы $\mathbf{C}^{a,b}$ и $\mathbf{B}^{a,b}$ могут зависеть от разных наборов параметров.

Зная явное выражение для дуальных векторов Бете (2.14), (2.15) и кратные действия операторов T_{ij} (2.8), (2.9), можно вычислить скалярное произведение¹⁾ (3.1). Ясно, что результат может быть записан в виде суммы по разбиениям наборов $\bar{u}^C$, $\bar{u}^B$, $\bar{v}^C$ и $\bar{v}^B$. Слагаемые в этой сумме зависят от произведений вакуумных собственных значений r_1 и r_3 , а также от функций, входящих в R -матрицу. В полной аналогии со случаем $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы (см. работу [24]) можно получить следующее представление:

$$S_{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C | \bar{u}^B; \bar{v}^B) = \sum \frac{r_1(\bar{u}_\Pi^C) r_1(\bar{u}_\Gamma^B) r_3(\bar{v}_\Pi^C) r_3(\bar{v}_\Gamma^B)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} W_{\text{part}} \left(\begin{matrix} \bar{u}_\Pi^C, \bar{u}_\Pi^B, & \bar{u}_\Gamma^C, \bar{u}_\Gamma^B \\ \bar{v}_\Gamma^C, \bar{v}_\Gamma^B, & \bar{v}_\Pi^C, \bar{v}_\Pi^B \end{matrix} \right). \quad (3.2)$$

Здесь суммирование идет по всем разбиениям

$$\bar{u}^C \Rightarrow \{\bar{u}_\Gamma^C, \bar{u}_\Pi^C\} \quad \bar{u}^B \Rightarrow \{\bar{u}_\Gamma^B, \bar{u}_\Pi^B\}, \quad \bar{v}^C \Rightarrow \{\bar{v}_\Gamma^C, \bar{v}_\Pi^C\}, \quad \bar{v}^B \Rightarrow \{\bar{v}_\Gamma^B, \bar{v}_\Pi^B\}$$

при условиях $\#\bar{u}_\Gamma^C = \#\bar{u}_\Gamma^B$ и $\#\bar{v}_\Gamma^C = \#\bar{v}_\Gamma^B$. Вид функций W_{part} зависит от разбиений, о чем говорит индекс “part”. Эти функции также зависят от матричных элементов R -матрицы, но не зависят от функций r_1 и r_3 . Другими словами, они зависят от алгебры, но не от выбранного представления.

Старшие коэффициенты $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$ определяются как частные случаи функций W_{part} , соответствующие специальным разбиениям:

$$Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B) = W_{\text{part}} \left(\begin{matrix} \bar{u}^C, \bar{u}^B, & \emptyset, \emptyset \\ \bar{v}^C, \bar{v}^B, & \emptyset, \emptyset \end{matrix} \right),$$

$$Z_{a,b}^{(r)}(\bar{u}^B; \bar{u}^C | \bar{v}^B; \bar{v}^C) = W_{\text{part}} \left(\begin{matrix} \emptyset, \emptyset, & \bar{u}^C, \bar{u}^B \\ \emptyset, \emptyset, & \bar{v}^C, \bar{v}^B \end{matrix} \right).$$

Как и в случае детерминанта Изергина, мы называем эти коэффициенты левым и правым. Нижние индексы у старших коэффициентов $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$ указывают на то, что $\#\bar{u}^C = \#\bar{u}^B = a$ и $\#\bar{v}^C = \#\bar{v}^B = b$.

Аналогично $GL(3)$ -инвариантному случаю все остальные коэффициенты W_{part} в представлении (3.2) можно записать в виде произведений левого и правого старших коэффициентов²⁾. Таким образом, скалярное произведение оказывается билинейной комбинацией старших коэффициентов. Именно поэтому роль функций $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$ так важна.

В случае $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы оба старших коэффициента совпадают и равны статистической сумме 15-вершинной модели со специальными граничными условиями [24]. Однако, как уже отмечалось, в моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей левый и правый старшие коэффициенты отличаются друг от друга. Основной результат настоящей статьи – явные формулы для них.

¹⁾Для полного вычисления скалярного произведения необходимо также знать кратное действие оператора $T_{31}(u)$. Этот результат можно найти в работе [36]. Однако для вычисления старших коэффициентов в нем нет необходимости.

²⁾См. явную формулу (6.1) ниже. Подробное ее доказательство будет дано в следующей публикации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Левый и правый старшие коэффициенты имеют следующие представления:*

$$Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y}) = (-q)^{-b} \sum K_b^{(r)}(\bar{s} | \bar{w}_I q^2) K_a^{(\ell)}(\bar{w}_I | \bar{t}) K_b^{(\ell)}(\bar{y} | \bar{w}_I) f(\bar{w}_I, \bar{w}_I), \quad (3.3)$$

$$Z_{a,b}^{(r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y}) = (-q)^b \sum K_b^{(\ell)}(\bar{s} | \bar{w}_I q^2) K_a^{(r)}(\bar{w}_I | \bar{t}) K_b^{(r)}(\bar{y} | \bar{w}_I) f(\bar{w}_I, \bar{w}_I). \quad (3.4)$$

Здесь $\bar{w} = \{\bar{s}, \bar{x}\}$, и сумма берется по разбиениям набора $\bar{w} \Rightarrow \{\bar{w}_I, \bar{w}_I\}$ при условиях $\# \bar{w}_I = b$ и $\# \bar{w}_I = a$.

Мы хотели бы обратить внимание читателя на то, что разница между $Z_{a,b}^{(\ell)}$ и $Z_{a,b}^{(r)}$ гораздо более существенная, чем между $K_n^{(\ell)}$ и $K_n^{(r)}$. Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть явные выражения для старших коэффициентов в простейшем нетривиальном случае $a = b = 1$:

$$Z_{1,1}^{(\ell)}(t; x | s; y) = xy g(x, t) g(y, s) f(s, x) + xys g(x, s) g(s, t) g(y, x),$$

$$Z_{1,1}^{(r)}(t; x | s; y) = ts g(x, t) g(y, s) f(s, x) + tsx g(x, s) g(s, t) g(y, x).$$

Отсюда получаем, например, что

$$(ts)^{-1} Z_{1,1}^{(r)}(t; x | s; y) - (xy)^{-1} Z_{1,1}^{(\ell)}(t; x | s; y) = (q - q^{-1}) g(s, t) g(y, x).$$

Таким образом, в отличие от левого и правого детерминантов Изергина, разницу между $Z_{a,b}^{(\ell)}$ и $Z_{a,b}^{(r)}$ нельзя устранить путем простого умножения их на определенные наборы переменных, как это было сделано в равенстве (2.7).

Ниже для экономии места мы будем объединять формулы для $Z^{(\ell)}$ и $Z^{(r)}$ в одну. Например, формулы (3.3) и (3.4) могут быть записаны следующим образом:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y}) = (-q)^{\mp b} \sum K_b^{(r,\ell)}(\bar{s} | \bar{w}_I q^2) K_a^{(\ell,r)}(\bar{w}_I | \bar{t}) K_b^{(\ell,r)}(\bar{y} | \bar{w}_I) f(\bar{w}_I, \bar{w}_I). \quad (3.5)$$

Верхние индексы (ℓ, r) у функции $Z_{a,b}$ означают, что равенство (3.5) имеет место как для $Z_{a,b}^{(\ell)}$, так и для $Z_{a,b}^{(r)}$. Выбирая в этой формуле либо первый, либо второй символ из пары (ℓ, r) , а также соответствующую степень $(-q)^{\mp b}$ (верхний знак для ℓ и нижний знак для r), мы получаем либо (3.3), либо (3.4).

Как и в случае $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы, существуют представления для старших коэффициентов, которые слегка отличаются от приведенных выше, – так называемые формулы-двойники:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y}) = (-q)^{\mp a} \sum K_a^{(r,\ell)}(\bar{w}_I | \bar{x} q^2) K_a^{(\ell,r)}(\bar{w}_I | \bar{t}) K_b^{(\ell,r)}(\bar{y} | \bar{w}_I) f(\bar{w}_I, \bar{w}_I). \quad (3.6)$$

Здесь все обозначения те же, что и в представлении (3.5). Эта формула следует из редукционных свойств детерминантов Изергина (A.2). В самом деле,

$$\begin{aligned} (-q)^{\pm b} K_b^{(\ell,r)}(\bar{s} | \bar{w}_I q^2) &= (-q)^{\pm(a+b)} K_{a+b}^{(\ell,r)}(\{\bar{s}, \bar{x}\} | \{\bar{w}_I q^2, \bar{x} q^2\}) = \\ &= (-q)^{\pm(a+b)} K_{a+b}^{(\ell,r)}(\{\bar{w}_I, \bar{w}_I\} | \{\bar{w}_I q^2, \bar{x} q^2\}) = (-q)^{\pm a} K_a^{(\ell,r)}(\bar{w}_I | \bar{x} q^2), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где верхний индекс (ℓ, r) имеет то же значение, что и в формуле (3.5). В силу равенства (3.7) эквивалентность представлений (3.5) и (3.6) становится очевидной. Другие представления для старших коэффициентов в виде сумм по разбиениям будут приведены в п. 5.2.

4. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ СТАРШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ВИДЕ СУММЫ ПО РАЗБИЕНИЯМ

Чтобы вывести представления (3.3), (3.4), нужно вычислить скалярное произведение $S_{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C | \bar{u}^B; \bar{v}^B)$ и найти рациональные коэффициенты при произведениях функций $r_1(\bar{u}^B)r_3(\bar{v}^C)$ и $r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B)$.

4.1. Коэффициент при произведении $r_1(\bar{u}^B)r_3(\bar{v}^C)$. В этом пункте мы вычисляем коэффициент при произведении $r_1(\bar{u}^B)r_3(\bar{v}^C)$. Мы начинаем с представления (2.14) дуального вектора Бете. Для наших целей достаточно взять всего одно слагаемое в сумме по разбиениям, которое отвечает случаю $k = 0$:

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) = \frac{\langle 0 | T_{32}(\bar{v}^C) T_{21}(\bar{u}^C) }{\lambda_2(\bar{v}^C) \lambda_2(\bar{u}^C) f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} + \text{IT},$$

мы напоминаем, что через IT обозначены слагаемые, которые не дают вклада в рассматриваемый коэффициент. Действительно, действуя $\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ на вектор Бете, мы хотим получить произведение $r_3(\bar{v}^C)$ по полному набору $\bar{v}^C$. Это возможно тогда и только тогда, когда произведение $T_{32}(\bar{v}^C)$ в (2.14) зависит от полного набора $\bar{v}^C$, т.е. мы имеем $\bar{v}_{\text{II}}^C = \bar{v}^C$. Следовательно, $\bar{u}_{\text{I}}^C = \bar{v}_{\text{I}}^C = \emptyset$, а все остальные слагаемые в (2.14) несущественны.

Остается последовательно подействовать операторами $T_{21}(\bar{u}^C)$ и $T_{32}(\bar{v}^C)$ на вектор Бете. Используя формулу (2.10), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) &= \frac{(-q)^a}{\lambda_2(\bar{v}^C) f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} \sum r_1(\bar{\eta}_{\text{I}}) \frac{f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}}) f(\bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\xi}_{\text{I}})}{f(\bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}})} \times \\ &\times \mathbf{K}_a^{(r)}(q^{-2} \bar{u}^C | \bar{\eta}_{\text{II}}) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_{\text{I}} | q^2 \bar{\xi}_{\text{I}}) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{\text{I}} | q^2 \bar{u}^C) \langle 0 | T_{32}(\bar{v}^C) \mathbf{B}^{0,b}(\emptyset; \bar{\xi}_{\text{II}}) + \text{IT}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\eta} = \{\bar{u}^C, \bar{u}^B\}$ и $\bar{\xi} = \{\bar{u}^C, \bar{v}^B\}$, а сумма берется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_{\text{I}}, \bar{\eta}_{\text{II}}\}$ и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_{\text{I}}, \bar{\xi}_{\text{II}}\}$ при условии $\# \bar{\eta}_{\text{I}} = \# \bar{\xi}_{\text{I}} = a$.

Оставшееся действие $T_{32}(\bar{v}^C)$ на $\mathbf{B}^{0,b}(\emptyset; \bar{\xi}_{\text{II}})$ следует вычислять по формуле (2.13), что дает

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) &= \frac{(-q)^a r_3(\bar{v}^C)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} \sum r_1(\bar{\eta}_{\text{I}}) \frac{f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}}) f(\bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\xi}_{\text{I}})}{f(\bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}})} \times \\ &\times \mathbf{K}_a^{(r)}(q^{-2} \bar{u}^C | \bar{\eta}_{\text{II}}) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_{\text{I}} | q^2 \bar{\xi}_{\text{I}}) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{\text{I}} | q^2 \bar{u}^C) \mathbf{K}_b^{(r)}(\bar{v}^C | \bar{\xi}_{\text{II}}) + \text{IT}. \end{aligned}$$

Теперь нам нужно выделить из этой суммы слагаемые, пропорциональные $r_1(\bar{u}^B)$. Для этого следует просто положить $\bar{\eta}_{\text{I}} = \bar{u}^B$ и $\bar{\eta}_{\text{II}} = \bar{u}^C$. После элементарных преобразований с использованием соотношений (A.2) и (A.3) мы приходим к формуле

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) = \frac{r_1(\bar{u}^B) r_3(\bar{v}^C)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} \mathbf{Z}_{a,b}^{(r)}(\bar{u}^B; \bar{u}^C | \bar{v}^B; \bar{v}^C) + \text{IT},$$

где $\mathbf{Z}_{a,b}^{(r)}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{Z}_{a,b}^{(r)}(\bar{u}^B; \bar{u}^C | \bar{v}^B; \bar{v}^C) = (-q)^a \sum \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\xi}_{\text{I}} | q^2 \bar{u}^C) \mathbf{K}_a^{(r)}(\bar{\xi}_{\text{I}} | \bar{u}^B) \mathbf{K}_b^{(r)}(\bar{v}^C | \bar{\xi}_{\text{II}}) f(\bar{\xi}_{\text{II}}, \bar{\xi}_{\text{I}}).$$

Здесь $\bar{\xi} = \{\bar{u}^C, \bar{v}^B\}$, и сумма берется по разбиениям $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_{\text{I}}, \bar{\xi}_{\text{II}}\}$ при условии $\# \bar{\xi}_{\text{I}} = a$. С точностью до обозначений полученная формула совпадает с представлением (3.6).

4.2. Коэффициент при произведении $r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B)$. В данном случае вычисление очень похоже на предыдущее. На этот раз мы начинаем с формулы (2.15) для дуального вектора Бете. Теперь нам требуется получить коэффициент при $r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B)$, поэтому для вектора $\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C)$ справедливо представление

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) = \frac{\langle 0 | T_{21}(\bar{u}^C) T_{32}(\bar{v}^C) }{\lambda_2(\bar{v}^C) \lambda_2(\bar{u}^C) f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} + \text{IT}.$$

Нам надо последовательно подействовать произведениями $T_{32}(\bar{v}^C)$ и $T_{21}(\bar{u}^C)$ на вектор Бете. Используя равенство (2.12), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) &= \frac{(-q)^{-b}}{\lambda_2(\bar{u}^C) f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} \sum r_3(\bar{\xi}_I) \frac{f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II})}{f(\bar{\xi}_I, \bar{\eta}_{II})} \times \\ &\times \mathbf{K}_b^{(r)}(q^{-2} \bar{v}^C | \bar{\eta}_I) \mathbf{K}_b^{(r)}(q^{-2} \bar{\eta}_I | \bar{\xi}_I) \mathbf{K}_b^{(\ell)}(\bar{\xi}_{II} | q^2 \bar{v}^C) \langle 0 | T_{21}(\bar{u}^C) \mathbf{B}^{a,0}(\bar{\eta}_{II}; \emptyset) + \text{IT}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\eta} = \{\bar{v}^C, \bar{u}^B\}$ и $\bar{\xi} = \{\bar{v}^C, \bar{v}^B\}$, а сумма берется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\}$ и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}\}$ при условии $\# \bar{\eta}_I = \# \bar{\xi}_I = b$.

Теперь мы действуем операторами $T_{21}(\bar{u}^C)$ на $\mathbf{B}^{a,0}(\bar{\eta}_{II}; \emptyset)$ по формуле (2.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) &= \frac{(-q)^{-b} r_1(\bar{u}^C)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C)} \sum r_3(\bar{\xi}_I) \frac{f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II})}{f(\bar{\xi}_I, \bar{\eta}_{II})} \times \\ &\times \mathbf{K}_b^{(r)}(q^{-2} \bar{v}^C | \bar{\eta}_I) \mathbf{K}_b^{(r)}(q^{-2} \bar{\eta}_I | \bar{\xi}_I) \mathbf{K}_b^{(\ell)}(\bar{\xi}_{II} | q^2 \bar{v}^C) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_{II} | \bar{u}^C) + \text{IT}. \end{aligned}$$

Полагая $\bar{\xi}_I = \bar{v}^B$ и $\bar{\xi}_{II} = \bar{v}^C$, мы получаем после тривиальных преобразований с использованием (A.2), (A.3) следующее соотношение:

$$\mathbf{C}^{a,b}(\bar{u}^C; \bar{v}^C) \mathbf{B}^{a,b}(\bar{u}^B; \bar{v}^B) = \frac{r_1(\bar{u}^C) r_3(\bar{v}^B)}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} \mathbf{Z}_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B) + \text{IT},$$

где

$$\mathbf{Z}_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B) = (-q)^{-b} \sum \mathbf{K}_b^{(r)}(q^{-2} \bar{v}^C | \bar{\eta}_I) \mathbf{K}_b^{(\ell)}(\bar{v}^B | \bar{\eta}_I) \mathbf{K}_a^{(\ell)}(\bar{\eta}_{II} | \bar{u}^C) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II})$$

и $\bar{\eta} = \{\bar{u}^B, \bar{v}^C\}$. Полученная формула совпадает с (3.3) с точностью до обозначений.

Таким образом, мы доказали, что коэффициент при произведении $r_1(\bar{u}^B)r_3(\bar{v}^C)$ пропорционален функции $\mathbf{Z}_{a,b}^{(r)}(\bar{u}^B; \bar{u}^C | \bar{v}^B; \bar{v}^C)$, в то время как коэффициент при произведении $r_1(\bar{u}^C)r_3(\bar{v}^B)$ пропорционален функции $\mathbf{Z}_{a,b}^{(\ell)}(\bar{u}^C; \bar{u}^B | \bar{v}^C; \bar{v}^B)$.

5. СВОЙСТВА И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ $\mathbf{Z}^{(\ell)}$ И $\mathbf{Z}^{(r)}$

Чтобы получить полную формулу для скалярного произведения, нам необходимо знать некоторые свойства старших коэффициентов. В частности, важную роль играют различные представления для $\mathbf{Z}_{a,b}^{(\ell,r)}$. Также полезны свойства вычетов функций $\mathbf{Z}_{a,b}^{(\ell,r)}$ в полюсах и некоторые рекурсионные свойства. В данном разделе мы приводим свойства старших коэффициентов.

5.1. Простые свойства старших коэффициентов. Легко видеть, что оба старших коэффициента являются симметричными функциями по отношению к перестановкам переменных в любом из четырех наборов $\bar{t}$, $\bar{x}$, $\bar{s}$ и $\bar{y}$. Кроме того, из определений (3.5), (3.6) немедленно следует, что

$$Z_{a,0}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\emptyset; \emptyset) = K_a^{(\ell,r)}(\bar{x}|\bar{t}), \quad Z_{0,b}^{(\ell,r)}(\emptyset; \emptyset|\bar{s}; \bar{y}) = K_b^{(\ell,r)}(\bar{y}|\bar{s}).$$

Используя формулу (A.1), легко установить, что старшие коэффициенты инвариантны относительно растяжения всех своих аргументов:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\alpha\bar{t}; \alpha\bar{x}|\alpha\bar{s}; \alpha\bar{y}) = Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}). \quad (5.1)$$

Чтобы описать более сложные свойства старших коэффициентов, нам потребуются другие представления для них.

5.2. Различные представления для $Z^{(\ell)}$ и $Z^{(r)}$. Как и в случае $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы, существует несколько представлений старших коэффициентов в терминах сумм по разбиениям. Исходная формула (3.5) записана в виде суммы по разбиениям объединения наборов $\{\bar{x}, \bar{s}\} = \bar{w}$. Существуют также представления в терминах сумм по разбиениям объединений наборов $\{\bar{t}q^{-2}, \bar{y}\}$, $\{\bar{t}, \bar{x}\}$, и $\{\bar{s}, \bar{y}\}$. Ниже мы приводим полный список этих представлений.

- Представление в терминах разбиения набора $\{\bar{t}q^{-2}, \bar{y}\}$:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) = (-q)^{\mp a} f(\bar{y}, \bar{x}) f(\bar{s}, \bar{t}) \times \\ \times \sum K_a^{(r,\ell)}(\bar{t}q^{-2}|\bar{\eta}_I q^2) K_a^{(\ell,r)}(\bar{x}q^{-2}|\bar{\eta}_I) K_b^{(\ell,r)}(\bar{\eta}_{II}|\bar{s}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}). \quad (5.2)$$

Здесь $\bar{\eta} = \{\bar{y}, \bar{t}q^{-2}\}$, и сумма берется по разбиениям $\bar{\eta} \Rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\}$, удовлетворяющим условиям $\#\bar{\eta}_I = a$ и $\#\bar{\eta}_{II} = b$. Это представление также имеет формулу-двойник:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) = (-q)^{\mp b} f(\bar{y}, \bar{x}) f(\bar{s}, \bar{t}) \times \\ \times \sum K_b^{(r,\ell)}(\bar{\eta}_{II}|\bar{y}q^2) K_a^{(\ell,r)}(\bar{x}q^{-2}|\bar{\eta}_I) K_b^{(\ell,r)}(\bar{\eta}_{II}|\bar{s}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}). \quad (5.3)$$

Здесь обозначения те же, что и в (5.2). Формула-двойник следует из (5.2) в силу тождества $(-q)^{\mp a} K_a^{(r,\ell)}(\bar{t}q^{-2}|\bar{\eta}_I q^2) = (-q)^{\mp b} K_b^{(r,\ell)}(\bar{\eta}_{II}|\bar{y}q^2)$.

- Представление в терминах разбиения набора $\{\bar{t}, \bar{x}\}$:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) = \sum (-q)^{\pm n} f(\bar{s}, \bar{t}_I) f(\bar{y}, \bar{x}_{II}) f(\bar{t}_I, \bar{t}_{II}) f(\bar{x}_{II}, \bar{x}_I) \times \\ \times K_n^{(\ell,r)}(\bar{x}_I|\bar{t}_I) K_{a-n}^{(\ell,r)}(\bar{x}_{II}|\bar{t}_{II} q^{-2}) K_{b+n}^{(\ell,r)}(\{\bar{y}, \bar{t}_I q^{-2}\}|\{\bar{s}, \bar{x}_I\}). \quad (5.4)$$

Здесь сумма берется по всем разбиениям $\bar{t} \Rightarrow \{\bar{t}_I, \bar{t}_{II}\}$ и $\bar{x} \Rightarrow \{\bar{x}_I, \bar{x}_{II}\}$ при условии, что $\#\bar{t}_I = \#\bar{x}_I = n$, где $n = 0, 1, \dots, a$.

- Представление в терминах разбиения набора $\{\bar{s}, \bar{y}\}$:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) = \sum (-q)^{\pm n} f(\bar{s}_{II}, \bar{t}) f(\bar{y}_I, \bar{x}) f(\bar{s}_I, \bar{s}_{II}) f(\bar{y}_{II}, \bar{y}_I) \times \\ \times K_n^{(\ell,r)}(\bar{y}_I|\bar{s}_I) K_{b-n}^{(\ell,r)}(\bar{y}_{II}|\bar{s}_{II} q^{-2}) K_{a+n}^{(\ell,r)}(\{\bar{s}_I, \bar{x}\}|\{\bar{y}_I q^2, \bar{t}\}). \quad (5.5)$$

Здесь сумма берется по всем разбиениям $\bar{s} \Rightarrow \{\bar{s}_I, \bar{s}_{II}\}$ и $\bar{y} \Rightarrow \{\bar{y}_I, \bar{y}_{II}\}$ при условии, что $\#\bar{s}_I = \#\bar{y}_I = n$, где $n = 0, 1, \dots, b$.

Все представления, приведенные выше, вытекают из исходных. В полной аналогии со случаем $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы суммы по разбиениям в формуле (3.5) можно записать в виде кратных контурных интегралов, в которых контуры интегрирования окружают точки $\bar{w} = \{\bar{s}, \bar{x}\}$. Двигая эти контуры к точкам $\{\bar{t}, \bar{x}\}$ или $\{\bar{s}, \bar{y}\}$ (в зависимости от конкретного представления), мы получаем либо представление (5.4), либо представление (5.5). Мы отсылаем читателя к работе [28], где можно найти подробности этого вывода.

Представления (5.4) и (5.5) позволяют доказать одно очень важное свойство функций $Z^{(\ell, r)}$:

$$Z_{b,a}^{(\ell, r)}(\bar{s}; \bar{y}|\bar{t}q^{-2}; \bar{x}q^{-2}) = f^{-1}(\bar{y}, \bar{x})f^{-1}(\bar{s}, \bar{t})Z_{a,b}^{(\ell, r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}). \quad (5.6)$$

Эту формулу можно получить, подставляя $Z_{b,a}^{(\ell, r)}(\bar{s}; \bar{y}|\bar{t}q^{-2}; \bar{x}q^{-2})$ в (5.4). Это дает представление (5.5) для $Z_{a,b}^{(\ell, r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})$.

Из свойства (5.6) немедленно следуют представления (5.2), (5.3). В самом деле, легко проверить, что, взяв формулу (3.5) для $Z_{b,a}^{(\ell, r)}(\bar{s}; \bar{y}|\bar{t}q^{-2}; \bar{x}q^{-2})$, мы получим равенство (5.2) для $Z_{a,b}^{(\ell, r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})$.

Еще одно свойство старших коэффициентов по отношению к переупорядочению их аргументов имеет следующий вид:

$$Z_{a,b;q^{-1}}^{(\ell, r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) = Z_{b,a;q}^{(r, \ell)}(\bar{y}; \bar{s}|\bar{x}; \bar{t}). \quad (5.7)$$

В этой формуле мы написали дополнительные нижние индексы q и q^{-1} у старших коэффициентов, чтобы подчеркнуть, что в левой части равенства функция $Z_{a,b}^{(\ell, r)}$ вычислена с заменой q на q^{-1} . Напротив, в правой части формулы (5.7) старший коэффициент вычислен при исходном q , но с заменой левого старшего коэффициента на правый, индекса a на индекс b и с переупорядочением аргументов. Обычно мы будем опускать дополнительный индекс q в формулах. Доказательство этого свойства приведено в п. Б.1 приложения Б. Используя соотношения (5.7) и (A.4), можно легко проверить, что представление (5.5) вытекает из (5.4) при замене q на q^{-1} .

В заключение этого раздела мы установим поведение старших коэффициентов в случае, когда один из их аргументов стремится к бесконечности. Для этого удобно использовать представления (5.4) и (5.5). В силу свойств (A.6) и (A.7) легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) &\rightarrow 0 \text{ при } t_i \rightarrow \infty \text{ или } s_j \rightarrow \infty, & i = 1, \dots, a, \\ Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) &\text{ограничен при } x_i \rightarrow \infty \text{ или } y_j \rightarrow \infty, & j = 1, \dots, b. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отсюда с учетом свойства (5.7) получаем, что

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) &\rightarrow 0 \text{ при } x_i \rightarrow \infty \text{ или } y_j \rightarrow \infty, & i = 1, \dots, a, \\ Z_{a,b}^{(r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) &\text{ограничен при } t_i \rightarrow \infty \text{ или } s_j \rightarrow \infty, & j = 1, \dots, b. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.3. Специальные суммы по разбиениям, сводящиеся к $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$. Все формулы для $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$ в виде сумм по разбиениям включают в себя произведения трех детерминантов Изергина. Существуют и более общие выражения с тремя детерминантами Изергина, которые сводятся к старшим коэффициентам. Такие формулы необходимы для вывода представлений в виде сумм по разбиениям для скалярных произведений векторов Бете. Ниже мы приводим список таких формул.

Пусть $a \geq b$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum \kappa_b^{(r,\ell)}(\bar{t}_I | \bar{y} q^2) \kappa_b^{(\ell,r)}(\bar{t}_I | \bar{s} q^2) \kappa_{a-b}^{(\ell,r)}(\bar{\xi} | \bar{t}_{II}) f(\bar{t}_{II}, \bar{t}_I) = \\ = (-q)^{\pm b} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{\xi}, \bar{y}\} | \bar{s}; \bar{y} q^{-2})}{f(\bar{y}, \bar{t}) f(\bar{s}, \bar{t})}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \sum \kappa_b^{(\ell,r)}(\bar{t}_I | \bar{y} q^2) \kappa_b^{(r,\ell)}(\bar{t}_I | \bar{s} q^2) \kappa_{a-b}^{(\ell,r)}(\bar{\xi} | \bar{t}_{II}) f(\bar{t}_{II}, \bar{t}_I) = \\ = (-q)^{\pm b} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{\xi}, \bar{s}\} | \bar{y}; \bar{s} q^{-2})}{f(\bar{y}, \bar{t}) f(\bar{s}, \bar{t})}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{t} \Rightarrow \{\bar{t}_I, \bar{t}_{II}\}$ при условиях $\# \bar{t}_I = b$ и $\# \bar{t}_{II} = a - b$.

Пусть теперь $a \leq b$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum \kappa_a^{(r,\ell)}(q^{-2} \bar{t} | \bar{y}_I) \kappa_a^{(\ell,r)}(\bar{x} q^{-2} | \bar{y}_I) \kappa_{b-a}^{(\ell,r)}(\bar{y}_{II} | \bar{\xi}) f(\bar{y}_I, \bar{y}_{II}) = \\ = (-q)^{\pm a} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t} q^2; \bar{x} | \{\bar{\xi}, \bar{t}\}; \bar{y})}{f(\bar{y}, \bar{t}) f(\bar{y}, \bar{x})}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \sum \kappa_a^{(\ell,r)}(q^{-2} \bar{t} | \bar{y}_I) \kappa_a^{(r,\ell)}(\bar{x} q^{-2} | \bar{y}_I) \kappa_{b-a}^{(\ell,r)}(\bar{y}_{II} | \bar{\xi}) f(\bar{y}_I, \bar{y}_{II}) = \\ = (-q)^{\pm a} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{x} q^2; \bar{t} | \{\bar{\xi}, \bar{x}\}; \bar{y})}{f(\bar{y}, \bar{t}) f(\bar{y}, \bar{x})}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{y} \Rightarrow \{\bar{y}_I, \bar{y}_{II}\}$ при условиях $\# \bar{y}_I = a$ и $\# \bar{y}_{II} = b - a$.

Все приведенные формулы следуют из представлений (5.2), (5.3) (см. пример доказательства в п. Б.2 приложения Б). Заметим также, что в силу соотношений (5.7) и (А.4) формулы (5.12) и (5.13) получаются соответственно из (5.10) и (5.11) при замене $q \rightarrow q^{-1}$.

5.4. Полюсы старших коэффициентов. Легко видеть, что старшие коэффициенты $Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y})$ имеют простые полюсы при $t_i = x_j$, $t_i = s_k$, $x_j = y_l$ и $s_k = y_l$. Аналогично случаю $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы соответствующие вычеты могут быть выражены в терминах $Z_{a-1,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y})$ или $Z_{a,b-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y})$. В частности,

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y})|_{s_b \rightarrow y_b} = f(y_b, s_b) f(y_b, \bar{s}_b) f(\bar{y}_b, y_b) f(y_b, \bar{x}) Z_{a,b-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}_b; \bar{y}_b) + \text{reg}, \quad (5.14)$$

где reg означает регулярную часть. Напомним также, что $\bar{s}_b = \bar{s} \setminus s_b$ и $\bar{y}_b = \bar{y} \setminus y_b$.

Вычет при $t_a = x_a$ имеет схожий вид:

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{y})|_{t_a \rightarrow x_a} = f(x_a, t_a) f(x_a, \bar{t}_a) f(\bar{x}_a, x_a) f(\bar{s}, x_a) Z_{a-1,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}_a; \bar{x}_a | \bar{s}; \bar{y}) + \text{reg}. \quad (5.15)$$

Следует отметить, что формулы (5.14) и (5.15) не являются независимыми, так как они связаны преобразованиями (5.6) и (5.7).

Формула для вычета при $s_b = t_a$ чуть более сложная. А именно,

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})|_{s_b \rightarrow t_a} &= f(s_b, t_a) f(\bar{s}_b, s_b) f(t_a, \bar{t}_a) \times \\ &\times \sum_{p=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_p|t_a) f(\bar{x}_p, x_p) Z_{a-1,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}_a; \bar{x}_p|\{\bar{s}_b, x_p\}; \bar{y}) + \text{reg.} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Аналогично, вычет при $y_b = x_a$ дается формулой

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y})|_{y_b \rightarrow x_a} &= f(y_b, x_a) f(\bar{y}_b, y_b) f(x_a, \bar{x}_a) \times \\ &\times \sum_{p=1}^b K_1^{(\ell,r)}(x_a|s_p) f(s_p, \bar{s}_p) Z_{a,b-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{x}_a, s_p\}|\bar{s}_p; \bar{y}_b) + \text{reg.} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Вывод всех этих формул в точности совпадает с выводом аналогичных формул для случая $GL(3)$ -инвариантной R -матрицы, поэтому мы отсылаем читателя к работе [28] за соответствующими доказательствами. Отметим также, что формулы (5.16) и (5.17) связаны друг с другом посредством соотношений (5.7), (A.4) и преобразования $q \rightarrow q^{-1}$.

5.5. Кратные полюсы. Из формул для вычетов, приведенных выше, вытекают формулы для кратных вычетов. А именно, если $\#\bar{z} = n$, то из формул (5.14) и (5.15) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}', \bar{z}) Z_{a,b+n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\{\bar{s}, \bar{z}\}; \{\bar{y}, \bar{z}'\}) &= f(\bar{z}, \bar{x}) f(\bar{z}, \bar{s}) f(\bar{y}, \bar{z}) Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}), \\ \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}', \bar{z}) Z_{a+n,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, \bar{z}\}; \{\bar{x}, \bar{z}'\}|\bar{s}; \bar{y}) &= f(\bar{z}, \bar{t}) f(\bar{x}, \bar{z}) f(\bar{s}, \bar{z}) Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}). \end{aligned}$$

При $\#\bar{z} = 1$ данные равенства являются прямыми следствиями формул (5.14), (5.15). Общий случай $n = \#\bar{z} > 1$ доказывается элементарной индукцией по n .

Из формулы (5.16) вытекает следующая редукция:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}') Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, \bar{z}'\}; \bar{x}|\{\bar{s}, \bar{z}\}; \bar{y}) &= f(\bar{s}, \bar{z}) f(\bar{z}, \bar{t}) \times \\ &\times \sum K_n^{(\ell,r)}(\bar{x}_I|\bar{z}) f(\bar{x}_{II}, \bar{x}_I) Z_{a-n,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}_{II}|\{\bar{s}, \bar{x}_I\}; \bar{y}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{x} \Rightarrow \{\bar{x}_I, \bar{x}_{II}\}$ при условии, что $\#\bar{x}_I = n$.

Аналогично, исходя из (5.17) можно вывести, что

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}') Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{x}, \bar{z}'\}|\bar{s}; \{\bar{y}, \bar{z}\}) &= f(\bar{y}, \bar{z}) f(\bar{z}, \bar{x}) \times \\ &\times \sum K_n^{(\ell,r)}(\bar{z}|\bar{s}_I) f(\bar{s}_I, \bar{s}_{II}) Z_{a,b-n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{x}, \bar{s}_I\}|\bar{s}_{II}; \bar{y}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{s} \Rightarrow \{\bar{s}_I, \bar{s}_{II}\}$ при условии, что $\#\bar{s}_I = n$.

При $\#\bar{z} = 1$ соотношения (5.18), (5.19) немедленно следуют из формул (5.16), (5.17). Для доказательства общего случая $n = \#\bar{z} > 1$ можно использовать индукцию по n и тождества (A.9), (A.10) (см. подробности в п. Б.3 приложения Б).

5.6. Редукции. Формулы редукции (5.18), (5.19) можно преобразовать. А именно, мы можем применить к этим формулам отображение (5.6) (см. п. Б.4 приложения Б). Действуя таким способом, мы приходим к следующим редукциям:

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, q^2\bar{z}\}; \bar{x}|\{\bar{s}, \bar{z}\}; \bar{y}) = \\ = \sum K_n^{(\ell,r)}(\bar{y}|\bar{z}) Z_{a,b-n}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, q^2\bar{y}_I\}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}_{II}) f(\bar{y}_{II}, \bar{y}_I) f(\bar{y}_I, \bar{x}) f(\bar{y}_I, \bar{s}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{y} \Rightarrow \{\bar{y}_I, \bar{y}_{II}\}$ при условии $\#\bar{y}_I = n$. Еще одна редукция имеет вид

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{x}, \bar{z}\}|\bar{s}; \{\bar{y}, \bar{z}q^{-2}\}) = \\ = \sum K_n^{(\ell,r)}(\bar{z}|\bar{t}_I) Z_{a-n,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}_{II}; \bar{x}|\bar{s}; \{\bar{y}, \bar{t}_I q^{-2}\}) f(\bar{t}_I, \bar{t}_{II}) f(\bar{x}, \bar{t}_I) f(\bar{s}, \bar{t}_I). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{t} \Rightarrow \{\bar{t}_I, \bar{t}_{II}\}$ при условии $\#\bar{t}_I = n$.

Имеются специальные случаи данных формул, когда старшие коэффициенты вырождаются в произведения детерминантов Изергина. В частности, если $b \leq a$ и $n = b$, то в соотношении (5.20) $\bar{s} = \emptyset$ и $\bar{y}_{II} = \emptyset$. Формула (5.20) переходит в

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, q^2\bar{z}\}; \bar{x}|\bar{z}; \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x}) K_b^{(\ell,r)}(\bar{y}|\bar{z}) K_a^{(\ell,r)}(\bar{x}|\{\bar{t}, q^2\bar{y}\}). \quad (5.22)$$

Аналогично, если $a \leq b$ и $n = a$, то в соотношении (5.21) $\bar{x} = \emptyset$ и $\bar{t}_{II} = \emptyset$. Формула (5.21) переходит в

$$Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{z}|\bar{s}; \{\bar{y}, \bar{z}q^{-2}\}) = f(\bar{s}, \bar{t}) K_a^{(\ell,r)}(\bar{z}|\bar{t}) K_b^{(\ell,r)}(\{\bar{y}, \bar{t}q^{-2}\}|\bar{s}). \quad (5.23)$$

Мы обращаем внимание читателя на то, что равенство (5.22) переходит в (5.23), если заменить q на q^{-1} и воспользоваться формулами (5.7) и (A.4).

5.7. Тождество суммирования старших коэффициентов. Формулы (5.20) и (5.21) можно рассматривать как тождества суммирования, которые позволяют выразить определенные суммы, включающие $K^{(\ell,r)}$ и $Z^{(\ell,r)}$, через старшие коэффициенты $Z^{(\ell,r)}$. В этих тождествах сумма берется по разбиениям одного набора переменных. Существуют и более сложные формулы схожего типа, в которых сумма берется по разбиениям двух наборов переменных. В этом пункте мы приводим одно из таких тождеств. Оно играет очень важную роль при вычислении скалярных произведений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть a, b, n, p суть неотрицательные целые числа и $p \leq b$. Пусть $\bar{t}, \bar{x}, \bar{s}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z}$ суть шесть наборов комплексных чисел в общем положении таких, что

$$\begin{aligned} \#\bar{t} = a, \quad \#\bar{x} = a, \quad \#\bar{z} = n, \\ \#\bar{s} = b, \quad \#\bar{y} = p, \quad \#\bar{w} = b - p. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(\bar{\xi}, \bar{y}) Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \{\bar{y}, \bar{w}\}) = \sum (-q)^{\mp k} K_p^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_I q^{-2}, \bar{\xi}_I\} | \bar{y}) Z_{a,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_I\}) \times \\ \times f(\bar{s}_I, \bar{s}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I) f(\bar{y}, \bar{s}_I) f(\bar{w}, \bar{s}_I) f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z}). \quad (5.24)$$

Здесь $\bar{\xi}$ является объединением двух наборов: $\bar{\xi} = \{\bar{x} q^{-2}, \bar{z} q^{-2}\}$. Сумма берется по разбиениям набора $\bar{s} \Rightarrow \{\bar{s}_I, \bar{s}_{II}\}$, удовлетворяющим условию $\#\bar{s}_I = k \in [0, \dots, p]$, и разбиениям набора $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}\}$, удовлетворяющим условию $\#\bar{\xi}_I = p - k$.

Доказательство этого предложения дано в п. Б.5.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили несколько различных явных представлений для старших коэффициентов $Z^{(\ell,r)}$ в интегрируемых моделях с $GL(3)$ тригонометрической R -матрицей. Мы также нашли свойства старших коэффициентов. Разумеется, этот результат представляет собой только первый шаг на пути вычисления скалярных произведений векторов Бете, которые, в свою очередь, являются ключевым инструментом при исследовании корреляционных функций локальных операторов. Мы вычислим скалярные произведения в следующей публикации, в которой мы собираемся существенно использовать результаты, полученные в настоящей работе. Как мы уже объяснили в разделе 3, скалярное произведение может быть представлено в виде суммы по разбиениям параметров Бете (3.2). Рациональные коэффициенты W_{part} в этой формуле пропорциональны произведению левого и правого старших коэффициентов. Таким образом, знание старшего коэффициента является исключительно важным для вычисления скалярных произведений. Чтобы подчеркнуть это, мы приведем здесь явную формулу для W_{part} , которую докажем в нашей следующей публикации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Скалярное произведение двух векторов Бете дается формулой (3.2). Для фиксированного разбиения наборов параметров Бете рациональный коэффициент W_{part} имеет вид

$$W_{\text{part}} \left(\begin{matrix} \bar{u}_{II}^C, \bar{u}_{II}^B, \bar{u}_I^C, \bar{u}_I^B \\ \bar{v}_I^C, \bar{v}_I^B, \bar{v}_{II}^C, \bar{v}_{II}^B \end{matrix} \right) = Z_{a-k,n}^{(\ell)}(\bar{u}_{II}^C; \bar{u}_{II}^B | \bar{v}_I^C; \bar{v}_I^B) Z_{k,b-n}^{(r)}(\bar{u}_I^B; \bar{u}_I^C | \bar{v}_{II}^B; \bar{v}_{II}^C) \times \\ \times f(\bar{u}_{II}^B, \bar{u}_I^B) f(\bar{u}_I^C, \bar{u}_{II}^C) f(\bar{v}_I^B, \bar{v}_{II}^B) f(\bar{v}_{II}^C, \bar{v}_I^C) f(\bar{v}_I^C, \bar{u}_I^C) f(\bar{v}_{II}^B, \bar{u}_{II}^B), \quad (6.1)$$

где $k = \#\bar{u}_I^C = \#\bar{u}_I^B$ и $n = \#\bar{v}_I^C = \#\bar{v}_I^B$ ($k = 0, \dots, a$ и $n = 0, \dots, b$).

В скейлинговом пределе $u = e^{\varepsilon u'}$, $v = e^{\varepsilon v'}$, $q = e^{\varepsilon c/2}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ тригонометрическая R -матрица стремится к $GL(3)$ -инвариантной R -матрице. В этом случае функции $Z^{(\ell)}$ и $Z^{(r)}$ совпадают, и формула (6.1) переходит в представление, полученное в работе [24]. Последнее уже успешно использовалось для анализа формфакторов локальных операторов в $GL(3)$ -инвариантных интегрируемых моделях. Мы надеемся, что явное представление (6.1) также окажется полезным для исследования интегрируемых моделей, основанных на q -деформированной симметрии группы $GL(3)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свойства детерминантов Изергина

Большинство свойств левого и правого детерминантов Изергина легко выводятся непосредственно из их определений (2.5), (2.6). Ниже мы приводим список этих свойств. Напомним, что верхние индексы (ℓ, r) у K означают, что формулы справедливы как для $K^{(\ell)}$, так и для $K^{(r)}$ при соответствующем выборе индекса (первый/верхний или второй/нижний) во всем равенстве.

Начальное условие:

$$K_1^{(\ell)}(\bar{x}|\bar{y}) = xg(x, y), \quad K_1^{(r)}(\bar{x}|\bar{y}) = yg(x, y).$$

Скейлинг:

$$K_n^{(\ell, r)}(\alpha\bar{x}|\alpha\bar{y}) = K_n^{(\ell, r)}(\bar{x}|\bar{y}). \quad (A.1)$$

Редукция:

$$K_{n+1}^{(\ell, r)}(\{\bar{x}, q^{-2}z\}|\{\bar{y}, z\}) = K_{n+1}^{(\ell, r)}(\{\bar{x}, z\}|\{\bar{y}, q^2z\}) = -q^{\mp 1}K_n^{(\ell, r)}(\bar{x}|\bar{y}). \quad (A.2)$$

Обратный порядок аргументов:

$$K_n^{(\ell, r)}(q^{-2}\bar{x}|\bar{y}) = (-q)^{\mp n}f^{-1}(\bar{y}, \bar{x})K_n^{(r, \ell)}(\bar{y}|\bar{x}), \quad (A.3)$$

$$K_{n; q^{-1}}^{(\ell, r)}(\bar{x}|\bar{y}) = K_{n; q}^{(r, \ell)}(\bar{y}|\bar{x}), \quad (A.4)$$

где $K_{n; q^{-1}}^{(\ell, r)}$ означает $K_n^{(\ell, r)}$, в котором q заменено на q^{-1} . Так же, как и в соотношении (5.7) для $Z_{a, b}^{(\ell, r)}$, мы написали в равенстве (A.4) добавочные индексы q^{-1} или q , чтобы подчеркнуть эту замену.

Вычеты в полюсах:

$$K_{n+1}^{(\ell, r)}(\{\bar{x}, z\}|\{\bar{y}, z'\})\big|_{z' \rightarrow z} = f(z, z')f(z, \bar{y})f(\bar{x}, z)K_n^{(\ell, r)}(\bar{x}|\bar{y}) + \text{reg}, \quad (A.5)$$

где reg означает регулярную часть.

Поведение на бесконечности:

$$\begin{aligned} K_n^{(\ell)}(\bar{x}|\bar{y}) &\sim y_i^{-1} \quad \text{при } y_i \rightarrow \infty, \\ K_n^{(r)}(\bar{x}|\bar{y}) &\sim x_i^{-1} \quad \text{при } x_i \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n, \quad (A.6)$$

и

$$\begin{aligned} K_n^{(\ell)}(\bar{x}|\bar{y}) &\text{ ограничен при } x_i \rightarrow \infty, \\ K_n^{(r)}(\bar{x}|\bar{y}) &\text{ ограничен при } y_i \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n. \quad (A.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\#\bar{x} = \#\bar{y} = n$ и $\#\bar{z} = \#\bar{z}' = m$. Тогда

$$\lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}')K_{n+m}^{(\ell, r)}(\{\bar{x}, \bar{z}\}|\{\bar{y}, \bar{z}'\}) = f(\bar{x}, \bar{z})f(\bar{z}, \bar{y})K_n^{(\ell, r)}(\bar{x}|\bar{y}). \quad (A.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство (A.3), получаем

$$\begin{aligned} K_{n+m}^{(\ell,r)}(\{\bar{x}, \bar{z}\}|\{\bar{y}, \bar{z}'\}) &= \\ &= (-q)^{\mp(m+n)} K_{n+m}^{(r,\ell)}(\{\bar{y}, \bar{z}'\}|\{\bar{x}q^2, \bar{z}q^2\}) f(\bar{x}, \bar{y}) f(\bar{x}, \bar{z}') f(\bar{z}, \bar{y}) f(\bar{z}, \bar{z}'). \end{aligned}$$

Предел $\bar{z}' \rightarrow \bar{z}$ становится тривиальным, и, воспользовавшись последовательно соотношениями (A.2), (A.3), мы приходим к (A.8).

Детерминанты Изергина также удовлетворяют тождествам суммирования.

ЛЕММА 1. Пусть $\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ суть три набора комплексных переменных таких, что $\#\alpha = m_1$, $\#\beta = m_2$ и $\#\gamma = m_1 + m_2$. Тогда

$$\sum K_{m_1}^{(\ell,r)}(\bar{\gamma}_I|\bar{\alpha}) K_{m_2}^{(r,\ell)}(\bar{\beta}|\bar{\gamma}_{II}) f(\bar{\gamma}_{II}, \bar{\gamma}_I) = (-q)^{\mp m_1} f(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}) K_{m_1+m_2}^{(r,\ell)}(\{\bar{\alpha}q^{-2}, \bar{\beta}\}|\bar{\gamma}). \quad (\text{A.9})$$

Здесь сумма берется по всем разбиениям набора $\bar{\gamma} \Rightarrow \{\bar{\gamma}_I, \bar{\gamma}_{II}\}$ при условии, что $\#\bar{\gamma}_I = m_1$ и $\#\bar{\gamma}_{II} = m_2$. Благодаря соотношению (A.3) равенство (A.9) можно переписать в виде

$$\sum K_{m_1}^{(\ell,r)}(\bar{\gamma}_I|\bar{\alpha}) K_{m_2}^{(r,\ell)}(\bar{\beta}|\bar{\gamma}_{II}) f(\bar{\gamma}_{II}, \bar{\gamma}_I) = (-q)^{\pm m_2} f(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) K_{m_1+m_2}^{(\ell,r)}(\bar{\gamma}|\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}q^2\}). \quad (\text{A.10})$$

Данное утверждение является простым следствием леммы 1 из работы [26].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Некоторые доказательства

Б.1. Доказательство формулы (5.7). Заменяем q на q^{-1} в представлении (3.5). С учетом формулы (A.4) получаем

$$Z_{a,b;q^{-1}}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{y}) = (-q)^{\mp b} \sum K_b^{(\ell,r)}(\bar{w}_I q^{-2}|\bar{s}) K_a^{(r,\ell)}(\bar{t}|\bar{w}_{II}) K_b^{(r,\ell)}(\bar{w}_I|\bar{y}) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I), \quad (\text{B.1})$$

где $\bar{w} = \{\bar{x}, \bar{s}\}$. Здесь мы воспользовались очевидным свойством функции $f(x, y)$ при замене $q \rightarrow q^{-1}$: $f_{q^{-1}}(x, y) = f(y, x)$. Делая замену $\bar{w}_I \leftrightarrow \bar{w}_{II}$, мы обнаруживаем, что формула (B.1) совпадает с представлением (3.6) для $Z_{b,a}^{(r,\ell)}(\bar{y}; \bar{s}|\bar{x}; \bar{t})$.

Б.2. Доказательство формулы (5.10). Рассмотрим старший коэффициент $Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{\xi}, \bar{y}'\}|\bar{s}; \bar{y}q^{-2})$ при $a \geq b$. Воспользовавшись формулой (5.3), получаем

$$\begin{aligned} (-q)^{\pm b} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{\xi}, \bar{y}'\}|\bar{s}; \bar{y}q^{-2})}{f(\bar{y}, \bar{t}) f(\bar{s}, \bar{t})} &= \frac{f(\bar{y}q^{-2}, \bar{\xi}) f(\bar{y}q^{-2}, \bar{y}')}{f(\bar{y}, \bar{t})} \times \\ &\times \sum K_b^{(r,\ell)}(\bar{\eta}_{II}|\bar{y}) K_b^{(\ell,r)}(\bar{\eta}_{II}|\bar{s}) K_a^{(\ell,r)}(\{\bar{\xi}, \bar{y}'\}|\bar{\eta}_I q^2) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Здесь $\bar{\eta} = \{\bar{t}q^{-2}, \bar{y}q^{-2}\}$, $\#\bar{t} = a$, $\#\bar{s} = \#\bar{y} = \#\bar{y}' = b$, $\#\bar{\xi} = a - b$ и $\#\bar{\eta}_I = a$. Рассмотрим предел $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$. Тогда произведение $f(\bar{y}q^{-2}, \bar{y}') = f^{-1}(\bar{y}', \bar{y})$ обращается в ноль. Однако детерминант Изергина $K_a^{(\ell,r)}(\{\bar{\xi}, \bar{y}'\}|\bar{\eta}_I q^2)$ может иметь полюсы при

$y'_i = y_i$. Очевидно, что полная компенсация нулей произведения $f^{-1}(\bar{y}', \bar{y})$ происходит тогда и только тогда, когда $\bar{y}q^{-2} \subset \bar{\eta}_I$. В этом случае мы можем положить $\bar{\eta}_I = \{\bar{y}q^{-2}, \bar{t}_I q^{-2}\}$ и $\bar{\eta}_I = \bar{t}_I q^{-2}$. Подставляя эти соотношения в равенство (Б.2), получаем

$$\begin{aligned} (-q)^{\pm b} \frac{Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{\xi}, \bar{y}\} | \bar{s}; \bar{y}q^{-2})}{f(\bar{y}, \bar{t})f(\bar{s}, \bar{t})} &= \lim_{\bar{y}' \rightarrow \bar{y}} f^{-1}(\bar{y}', \bar{y})f^{-1}(\bar{\xi}, \bar{y})f^{-1}(\bar{y}, \bar{t}) \times \\ &\times \sum \mathbf{K}_b^{(r,\ell)}(\bar{t}_I q^{-2} | \bar{y}) \mathbf{K}_b^{(\ell,r)}(\bar{t}_I q^{-2} | \bar{s}) \mathbf{K}_a^{(\ell,r)}(\{\bar{\xi}, \bar{y}'\} | \{\bar{t}_I, \bar{y}\}) f(\bar{y}, \bar{t}_I) f(\bar{t}_I, \bar{t}_I), \end{aligned}$$

где сумма берется по разбиениям $\bar{t} \Rightarrow \{\bar{t}_I, \bar{t}_{II}\}$, удовлетворяющим условию $\# \bar{t}_I = b$. Остается взять предел при помощи формулы (А.8), и мы приходим к (5.10).

Б.3. Доказательство формулы (5.18). Пусть равенство (5.18) справедливо при $\# \bar{z} = n - 1$. Рассмотрим случай $\# \bar{z} = n$. Вычисляя последовательно пределы сначала для $\bar{z}'_n \rightarrow \bar{z}_n$, а затем для $z'_n \rightarrow z_n$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}') Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, \bar{z}'\}; \bar{x} | \{\bar{s}, \bar{z}\}; \bar{y}) &= \\ &= f(\bar{s}, \bar{z}_n) f(\bar{z}_n, \bar{t}) \sum \mathbf{K}_{n-1}^{(\ell,r)}(\bar{x}_I | \bar{z}_n) f(\bar{x}_{II}, \bar{x}_I) \times \\ &\times \lim_{z'_n \rightarrow z_n} f^{-1}(z_n, z'_n) Z_{a-n+1,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, z'_n\}; \bar{x}_{II} | \{\bar{s}, \bar{x}_I, z_n\}; \bar{y}) = \\ &= f(\bar{s}, \bar{z}) f(\bar{z}, \bar{t}) \sum Z_{a-n,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}_I | \{\bar{s}, \bar{x}_I, \bar{x}_I\}; \bar{y}) \times \\ &\times \mathbf{K}_{n-1}^{(\ell,r)}(\bar{x}_I | \bar{z}_n) f(\bar{x}_{II}, \bar{x}_I) \mathbf{K}_1^{(\ell,r)}(\bar{x}_I | z_n) f(\bar{x}_{II}, \bar{x}_I) f(\bar{x}_I, z_n). \end{aligned}$$

В данном случае мы сначала разбили набор $\bar{x}$ на подмножества $\{\bar{x}_I, \bar{x}_{II}\}$ при условии, что $\# \bar{x}_I = n - 1$, а затем разделили подмножество $\bar{x}_{II}$ на подмножества $\{\bar{x}_I, \bar{x}_{II}\}$ такие, что $\# \bar{x}_I = 1$. Полагая $\{\bar{x}_I, \bar{x}_I\} = \bar{x}_0$ и используя равенство

$$\mathbf{K}_1^{(\ell,r)}(\bar{x}_I | z_n) = (-q)^{\mp 1} f(\bar{x}_I, z_n) \mathbf{K}_1^{(r,\ell)}(z_n q^{-2} | \bar{x}_I),$$

находим

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}') Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, \bar{z}'\}; \bar{x} | \{\bar{s}, \bar{z}\}; \bar{y}) &= \\ &= f(\bar{s}, \bar{z}) f(\bar{z}, \bar{t}) \sum Z_{a-n,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}_{II} | \{\bar{s}, \bar{x}_0\}; \bar{y}) f(\bar{x}_{II}, \bar{x}_0) f(\bar{x}_0, z_n) \times \\ &\times (-q)^{\mp 1} \mathbf{K}_{n-1}^{(\ell,r)}(\bar{x}_I | \bar{z}_n) \mathbf{K}_1^{(r,\ell)}(z_n q^{-2} | \bar{x}_I) f(\bar{x}_I, \bar{x}_I). \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Применяя теперь лемму 1 к последней строке равенства (Б.3), мы можем вычислить сумму по разбиениям $\bar{x}_0 \Rightarrow \{\bar{x}_I, \bar{x}_I\}$, что в конечном итоге дает

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}') Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\{\bar{t}, \bar{z}'\}; \bar{x} | \{\bar{s}, \bar{z}\}; \bar{y}) &= \\ &= f(\bar{s}, \bar{z}) f(\bar{z}, \bar{t}) \sum \mathbf{K}_n^{(\ell,r)}(\bar{x}_0 | \bar{z}) f(\bar{x}_{II}, \bar{x}_0) Z_{a-n,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}_{II} | \{\bar{s}, \bar{x}_0\}; \bar{y}). \end{aligned}$$

Б.4. Доказательство формулы (5.21). Запишем равенство (5.19), заменив a на b и положив $\bar{t} = q^2\bar{u}$, $\bar{x} = q^2\bar{v}$, $\bar{s} = \bar{\alpha}$ и $\bar{y} = \bar{\beta}$:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}') Z_{b,a}^{(\ell,r)}(q^2\bar{u}; \{q^2\bar{v}, \bar{z}'\} | \bar{\alpha}; \{\bar{\beta}, \bar{z}\}) = \\ = f(\bar{\beta}, \bar{z}) f(\bar{z}, q^2\bar{v}) \sum K_n^{(\ell,r)}(\bar{z} | \bar{\alpha}_I) f(\bar{\alpha}_I, \bar{\alpha}_{II}) Z_{b,a-n}^{(\ell,r)}(q^2\bar{u}; \{q^2\bar{v}, \bar{\alpha}_I\} | \bar{\alpha}_{II}; \bar{\beta}). \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{\alpha} \Rightarrow \{\bar{\alpha}_I, \bar{\alpha}_{II}\}$ при условии $\#\bar{\alpha}_I = n$. Теперь мы можем воспользоваться формулами (5.1) и (5.6), чтобы преобразовать $Z_{b,a}^{(\ell,r)}$ и $Z_{b,a-n}^{(\ell,r)}$ в формуле (Б.4). Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} f^{-1}(\bar{z}, \bar{z}') Z_{b,a}^{(\ell,r)}(q^2\bar{u}; \{q^2\bar{v}, \bar{z}'\} | \bar{\alpha}; \{\bar{\beta}, \bar{z}\}) = \frac{f(\bar{\beta}, \bar{z}) Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{\alpha}; \{\bar{\beta}, \bar{z}\} | \bar{u}; \{\bar{v}, q^{-2}\bar{z}\})}{f(\bar{u}, \bar{\alpha}) f(\bar{v}, \bar{z}) f(\bar{v}, \bar{\beta})}, \\ Z_{b,a-n}^{(\ell,r)}(q^2\bar{u}; \{q^2\bar{v}, \bar{\alpha}_I\} | \bar{\alpha}_{II}; \bar{\beta}) = \frac{f(\bar{\beta}, \bar{\alpha}_I) Z_{a-n,b}^{(\ell,r)}(\bar{\alpha}_{II}; \bar{\beta} | \bar{u}; \{\bar{v}, q^{-2}\bar{\alpha}_I\})}{f(\bar{v}, \bar{\beta}) f(\bar{u}, \bar{\alpha}_{II})}. \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (Б.4), мы получаем после очевидных сокращений

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{\alpha}; \{\bar{\beta}, \bar{z}\} | \bar{u}; \{\bar{v}, q^{-2}\bar{z}\}) = \\ = \sum K_n^{(\ell,r)}(\bar{z} | \bar{\alpha}_I) f(\bar{\alpha}_I, \bar{\alpha}_{II}) f(\bar{\beta}, \bar{\alpha}_I) f(\bar{u}, \bar{\alpha}_I) Z_{a-n,b}^{(\ell,r)}(\bar{\alpha}_{II}; \bar{\beta} | \bar{u}; \{\bar{v}, q^{-2}\bar{\alpha}_I\}). \end{aligned}$$

Остается положить $\bar{\alpha} = \bar{t}$, $\bar{\beta} = \bar{x}$, $\bar{u} = \bar{s}$, $\bar{v} = \bar{y}$, после чего мы приходим к (5.21).

Б.5. Доказательство предложения 2. Для доказательства мы используем индукцию по p . Обозначим левую и правую части формулы (5.24) соответственно через $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{w}; \bar{y} | \bar{z})$ и $\tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{w}; \bar{y} | \bar{z})$. При $p = 0$ равенство (5.24) становится тривиальным. Действительно, так как $k \leq p$, мы получаем, что $\bar{s}_I = \bar{\xi}_I = \bar{y} = \emptyset$ при $p = 0$. Следовательно, сумма по разбиениям в правой части формулы (5.24) сводится к одному слагаемому, и в обеих частях (5.24) мы получаем $Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{w})$.

Пусть равенство (5.24) справедливо для $\#\bar{y} = p - 1$ и произвольных a, b и n :

$$F_{a,b,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{w}; \bar{y} | \bar{z}) = \tilde{F}_{a,b,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x} | \bar{s}; \bar{w}; \bar{y} | \bar{z}). \quad (\text{Б.5})$$

Общая стратегия доказательства такова. Мы рассматриваем обе части этого равенства при $\#\bar{y} = p$ как функции от y_p , а все остальные переменные считаем фиксированными. Очевидно, что F и $\tilde{F}$ являются рациональными функциями переменной y_p . Сначала мы устанавливаем, что эти функции имеют полюсы в одних и тех же точках, а потом доказываем, что в силу индукционного предположения (Б.5) вычеты в этих полюсах совпадают. Это будет означать, что разность $F - \tilde{F}$ является полиномом от y_p . Наконец, принимая во внимание поведение этого полинома при $y_p \rightarrow \infty$ и при $y_p = 0$, мы заключаем, что он тождественно равен нулю.

Очевидно, что из-за множителя $f(\bar{\xi}, \bar{y})$ функция $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ имеет полюсы в точках $y_p = \xi_l$, $l = 1, \dots, a + n$. Старший коэффициент $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$ имеет дополнительные по-

люсы при $y_p = s_i$, $i = 1, \dots, b$. Однако полюсы $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$ при $y_p = x_j$, $j = 1, \dots, a$, компенсируются нулями множителя:

$$f(\bar{\xi}, \bar{y}) = f(\bar{z}q^{-2}, \bar{y})f(\bar{x}q^{-2}, \bar{y}) = f^{-1}(\bar{y}, \bar{z})f^{-1}(\bar{y}, \bar{x}).$$

Легко видеть, что функция $\tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ имеет полюсы в тех же точках. Благодаря произведению $f(\bar{y}, \bar{s}_I)$ она имеет полюсы при $y_p = s_i$. Функция $K_p^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_I q^{-2}, \bar{\xi}_I\}|\bar{y})$ имеет полюсы в точках $y_p = \xi_l$, однако полюсы в точках $y_p = s_i q^{-2}$ компенсируются произведением $f(\bar{y}, \bar{s}_I)$.

Рассмотрим вычеты функции $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ при $y_p = s_i$. Воспользовавшись редукционным свойством (5.14), получаем (для краткости здесь и ниже мы опускаем аргументы функций $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ и $\tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ в левых частях равенств)

$$\begin{aligned} F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow s_i} &= f(y_p, s_i)f(s_i, \bar{s}_i)f(\bar{y}_p, s_i)f(\bar{w}, s_i)[f(s_i, \bar{x})f(\bar{x}q^{-2}, s_i)] \times \\ &\times f(\bar{z}q^{-2}, s_i)f(\bar{\xi}, \bar{y}_p)Z_{a,b-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_i; \{\bar{y}_p, \bar{w}\}) + \text{reg}. \end{aligned}$$

Множители в квадратных скобках сокращают друг друга, а множители во второй строке дают $F_{a,b-1,p-1,n}^{(\ell,r)}$:

$$\begin{aligned} F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow s_i} &= f(y_p, s_i)f(s_i, \bar{s}_i)f(\bar{y}_p, s_i)f(\bar{w}, s_i)f^{-1}(s_i, \bar{z}) \times \\ &\times F_{a,b-1,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_i; \bar{w}; \bar{y}_p|\bar{z}) + \text{reg}. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Рассмотрим теперь вычет функции $\tilde{F}$ при $y_p = s_i$. Полюс возможен тогда и только тогда, когда $s_i \in \bar{s}_I$. Полагая $\bar{s}_I = \{s_i, \bar{s}_0\}$ и используя свойство (A.2) функции $K^{(r,\ell)}$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow s_i} &= \sum (-q)^{\mp(k-1)} K_{p-1}^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_0 q^{-2}, \bar{\xi}_I\}|\bar{y}_p) Z_{a,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_I\}) \times \\ &\times f(s_i, \bar{s}_0)f(s_i, \bar{s}_{II})f(\bar{s}_0, \bar{s}_{II})f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I) \times \\ &\times [f(y_p, s_i)f(\bar{y}_p, s_i)f(\bar{w}, s_i)f^{-1}(s_i, \bar{z})]f(\bar{y}_p, \bar{s}_0)f(\bar{w}, \bar{s}_0)f^{-1}(\bar{s}_0, \bar{z}) + \text{reg}, \end{aligned}$$

где сумма берется по разбиениям $\bar{s}_i \Rightarrow \{\bar{s}_0, \bar{s}_{II}\}$ и $\bar{\xi} \Rightarrow \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}\}$. Множители в квадратных скобках можно вынести за знак суммы. Произведение $f(s_i, \bar{s}_0)f(s_i, \bar{s}_{II})$ равно $f(s_i, \bar{s}_i)$ и тоже выносится за знак суммы. Мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow s_i} &= f(y_p, s_i)f(s_i, \bar{s}_i)f(\bar{y}_p, s_i)f(\bar{w}, s_i)f^{-1}(s_i, \bar{z}) \times \\ &\times \sum (-q)^{\mp k_0} K_{p-1}^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_0 q^{-2}, \bar{\xi}_I\}|\bar{y}_p) Z_{a,b-1-k_0}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_I\}) \times \\ &\times f(\bar{s}_0, \bar{s}_{II})f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I)f(\bar{y}_p, \bar{s}_0)f(\bar{w}, \bar{s}_0)f^{-1}(\bar{s}_0, \bar{z}) + \text{reg}, \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

где $k_0 = \#s_0 = k - 1$. Ясно, что сумма по разбиениям в правой части формулы (Б.7) дает $\tilde{F}_{a,b-1,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_i; \bar{w}; \bar{y}_p|\bar{z})$, и мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow s_i} &= f(y_p, s_i) f(s_i, \bar{s}_i) f(\bar{y}_p, s_i) f(\bar{w}, s_i) f^{-1}(s_i, \bar{z}) \times \\ &\times \tilde{F}_{a,b-1,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_i; \bar{w}; \bar{y}_p|\bar{z}) + \text{reg.} \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Сравнивая (Б.6) с (Б.8) и принимая во внимание соотношение (Б.5), мы заключаем, что разность $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)} - \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ как функция от y_p является ограниченной при $y_p \rightarrow s_i$, $i = 1, \dots, b$.

Рассмотрим теперь вычеты функции $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ при $y_p = \xi_l$. Имеем

$$F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow \xi_l} = f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) [f(\bar{\xi}_l, \bar{y}_p) Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \{\bar{w}, \xi_l, \bar{y}_p\})] + \text{reg.} \quad (\text{Б.9})$$

Следует различать два случая: либо $\xi_l \in \bar{z}q^{-2}$, либо $\xi_l \in \bar{x}q^{-2}$. Пусть $\xi_l = z_j q^{-2}$. Тогда комбинация в квадратных скобках в равенстве (Б.9) в точности является функцией $F_{a,b,p-1,n-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \{\bar{w}, \xi_l\}; \bar{y}_p|\bar{z}_j)$. Мы получаем, следовательно,

$$F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow z_j q^{-2}} = f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) F_{a,b,p-1,n-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \{\bar{w}, \xi_l\}; \bar{y}_p|\bar{z}_j) + \text{reg.} \quad (\text{Б.10})$$

Пусть теперь $\xi_l = x_j q^{-2}$. В этом случае множитель $f(\bar{\xi}_l, \bar{y}_p)$ не компенсирует полюс функции $Z_{a,b}^{(\ell,r)}$ при $y_p = x_j$. Поэтому комбинация в квадратных скобках равенства (Б.9) уже не совпадает с $F_{a,b,p-1,n-1}^{(\ell,r)}$. Чтобы справиться с этой проблемой, мы воспользуемся формулой (5.21) при $n = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} Z_{a,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{x}_j, x_j\}|\bar{s}; \{\bar{w}, \bar{y}_p, x_j q^{-2}\}) &= \\ &= \sum_{i=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_j|t_i) f(t_i, \bar{t}_i) f(\bar{x}_j, t_i) f(\bar{s}, t_i) Z_{a-1,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}; \{\bar{w}, t_i q^{-2}, \bar{y}_p\}). \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (Б.9), получаем

$$\begin{aligned} F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow x_j q^{-2}} &= f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) \sum_{i=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_j|t_i) f(t_i, \bar{t}_i) f(\bar{x}_j, t_i) f(\bar{s}, t_i) \times \\ &\times f(\bar{\xi}_l, \bar{y}_p) Z_{a-1,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}; \{\bar{w}, t_i q^{-2}, \bar{y}_p\}) + \text{reg.} \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Теперь комбинация во второй строке (Б.11) дает $F_{a-1,b,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}; \{\bar{w}, t_i q^{-2}\}; \bar{y}_p|\bar{z})$, следовательно,

$$\begin{aligned} F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow x_j q^{-2}} &= f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) \sum_{i=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_j|t_i) f(t_i, \bar{t}_i) f(\bar{x}_j, t_i) f(\bar{s}, t_i) \times \\ &\times F_{a-1,b,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}; \{\bar{w}, t_i q^{-2}\}; \bar{y}_p|\bar{z}) + \text{reg.} \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Таким образом, мы свели вычеты функции $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ при $y_p = \xi_l$ к функциям $F_{a,b,p-1,n-1}^{(\ell,r)}$ или $F_{a-1,b,p-1,n}^{(\ell,r)}$.

Рассмотрим теперь полюс функции $\tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ в точке $y_p = \xi_l$. Он возможен тогда и только тогда, когда $\xi_l \in \bar{\xi}_I$. Полагая $\xi_I = \{\xi_l, \bar{\xi}_0\}$ и используя свойство (A.5) функции $K^{(r,\ell)}$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow \xi_l} &= \sum (-q)^{\mp k} K_{p-1}^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_I q^{-2}, \bar{\xi}_0\}|\bar{y}_p) \times \\ &\times f(\xi_l, y_p) f(\xi_l, \bar{y}_p) f(\bar{s}_I q^{-2}, \xi_l) f(\bar{\xi}_0, \xi_l) f(\bar{s}_I, \bar{s}_{II}) \times \\ &\times Z_{a,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_0, \xi_l\}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_0) f(\bar{\xi}_{II}, \xi_l) f(\xi_l, \bar{s}_I) f(\bar{y}_p, \bar{s}_I) f(\bar{w}, \bar{s}_I) f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z}) + \text{reg}, \end{aligned}$$

где сумма берется по разбиениям $\bar{s} \Rightarrow \{\bar{s}_I, \bar{s}_{II}\}$ и $\bar{\xi}_l \Rightarrow \{\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{II}\}$. Множители $f(\bar{s}_I q^{-2}, \xi_l)$ и $f(\xi_l, \bar{s}_I)$ сокращаются. Множители $f(\xi_l, y_p) f(\xi_l, \bar{y}_p)$ выносятся за знак суммы. Произведение $f(\bar{\xi}_0, \xi_l) f(\bar{\xi}_{II}, \xi_l)$ равно $f(\bar{\xi}_l, \xi_l)$ и тоже может быть вынесено за знак суммы. Мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow \xi_l} &= f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) \times \\ &\times \sum (-q)^{\mp k} K_{p-1}^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_I q^{-2}, \bar{\xi}_0\}|\bar{y}_p) Z_{a,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_0, \xi_l\}) \times \\ &\times f(\bar{s}_I, \bar{s}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_0) f(\bar{y}_p, \bar{s}_I) f(\bar{w}, \bar{s}_I) f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z}) + \text{reg}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Положим теперь $\xi_l = z_j q^{-2}$. В этом случае мы просто перепишем произведение $f(\bar{w}, \bar{s}_I) f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z})$ как

$$f(\bar{w}, \bar{s}_I) f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z}) = [f(\bar{w}, \bar{s}_I) f(\xi_l, \bar{s}_I)] f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z}_j).$$

Видно, что сумма по разбиениям в (B.13) дает $\tilde{F}_{a,b,p-1,n-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \{\bar{w}, \xi_l\}; \bar{y}_p|\bar{z}_j)$:

$$\tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow z_j q^{-2}} = f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) \tilde{F}_{a,b,p-1,n-1}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \{\bar{w}, \xi_l\}; \bar{y}_p|\bar{z}_j) + \text{reg}. \quad (\text{B.14})$$

Остается рассмотреть случай $\xi_l = x_j q^{-2}$. В силу (5.21) имеем

$$\begin{aligned} Z_{a,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \{\bar{x}_j, x_j\}|\bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_0, x_j q^{-2}\}) &= \\ &= \sum_{i=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_j|t_i) f(t_i, \bar{t}_i) f(\bar{x}_j, t_i) f(\bar{s}_{II}, t_i) Z_{a-1,b}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_0, t_i q^{-2}\}). \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (B.13), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}|_{y_p \rightarrow x_j q^{-2}} &= f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) \sum_{i=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_j|t_i) f(t_i, \bar{t}_i) f(\bar{x}_j, t_i) \times \\ &\times \sum (-q)^{\mp k} K_{p-1}^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_I q^{-2}, \bar{\xi}_0\}|\bar{y}_p) Z_{a-1,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}_{II}; \{\bar{w}, \bar{\xi}_0, t_i q^{-2}\}) \times \\ &\times f(\bar{s}_I, \bar{s}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_0) f(\bar{y}_p, \bar{s}_I) f(\bar{w}, \bar{s}_I) f(\bar{s}_{II}, t_i) f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z}). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Заметим теперь, что

$$f(\bar{w}, \bar{s}_I) f(\bar{s}_I, t_i) = [f(\bar{w}, \bar{s}_I) f(t_i q^{-2}, \bar{s}_I)] f(\bar{s}, t_i).$$

Подставляя это выражение в (Б.15), мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{w}; \bar{y}|\bar{z})|_{y_p \rightarrow \xi_l} = \\ = f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) \sum_{i=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_j|t_i) f(t_i, \bar{t}_i) f(\bar{x}_j, t_i) f(\bar{s}, t_i) \times \\ \times \sum (-q)^{\mp k} K_{p-1}^{(r,\ell)}(\{\bar{s}_I q^{-2}, \bar{\xi}_0\}|\bar{y}_p) Z_{a-1,b-k}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}_I; \{\bar{w}, \bar{\xi}_0, t_i q^{-2}\}) \times \\ \times f(\bar{s}_I, \bar{s}_I) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_0) f(\bar{y}_p, \bar{s}_I) [f(\bar{w}, \bar{s}_I) f(t_i q^{-2}, \bar{s}_I)] f^{-1}(\bar{s}_I, \bar{z}). \end{aligned}$$

Сумма по разбиениям в этой формуле дает $\tilde{F}_{a-1,b,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}; \{\bar{w}, t_i q^{-2}\}; \bar{y}_p|\bar{z})$, поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \bar{w}; \bar{y}|\bar{z})|_{y_p \rightarrow \xi_l} = f(\xi_l, y_p) f(\bar{\xi}_l, \xi_l) f(\xi_l, \bar{y}_p) \times \\ \times \sum_{i=1}^a K_1^{(\ell,r)}(x_j|t_i) f(t_i, \bar{t}_i) f(\bar{x}_j, t_i) f(\bar{s}, t_i) F_{a-1,b,p-1,n}^{(\ell,r)}(\bar{t}_i; \bar{x}_j|\bar{s}; \{\bar{w}, t_i q^{-2}\}; \bar{y}_p|\bar{z}). \quad (\text{Б.16}) \end{aligned}$$

Сравнивая (Б.10) с (Б.14) и (Б.12) с (Б.16), а также учитывая индукционное предположение (Б.5), мы приходим к заключению, что разность $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)} - \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ как функция от y_p является ограниченной при $y_p \rightarrow \xi_l$, $l = 1, \dots, a+n$.

Таким образом, мы доказали, что функция $F_{a,b,p,n}^{(\ell,r)} - \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell,r)}$ не имеет полюсов ни в точках $y_p = s_i$, ни в точках $y_p = \xi_l$. Следовательно, она является полиномом от y_p . В силу свойств (А.6) и (5.9) полином $F_{a,b,p,n}^{(r)} - \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(r)}$ убывает при $y_p \rightarrow \infty$. Следовательно, $F_{a,b,p,n}^{(r)} - \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(r)} = 0$. Случай полинома $F_{a,b,p,n}^{(\ell)} - \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell)}$ несколько более сложен. В силу свойств (А.7) и (5.8) мы приходим к заключению, что он ограничен при $y_p \rightarrow \infty$. Следовательно, он не зависит от y_p . Из представления (5.4) следует, что старший коэффициент $Z_{a,b}^{(\ell)}(\bar{t}; \bar{x}|\bar{s}; \{\bar{y}, \bar{w}\})$ пропорционален произведению всех y_i . Следовательно, функция $F_{a,b,p,n}^{(\ell)}$ обращается в ноль при $y_p = 0$. С другой стороны, в правой части формулы (5.24) каждый член суммы по разбиениям содержит правый детерминант Изергина $K_p^{(r)}(\{\bar{s}_I q^{-2}, \bar{\xi}_I\}|\bar{y})$. Последний также пропорционален произведению всех y_i , и, следовательно, $\tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell)} = 0$ при $y_p = 0$. Таким образом, мы заключаем, что $F_{a,b,p,n}^{(\ell)} - \tilde{F}_{a,b,p,n}^{(\ell)} = 0$.

Благодарности. Мы благодарим С. Бельяра за его вклад на ранней стадии работы. Работа С. Пакуляка частично поддержана РФФИ (грант № 11-01-00962_а) и Программой “Научный фонд НИУ ВШЭ” (грант 12-09-0064). Э. Рагуси поддержан проектом ANR DIADEMS (Programme Blanc ANR SIMI1 2010-BLAN-0120-02). Н. Славнов поддержан Программой президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”, РФФИ (гранты № 11-01-00440_а, 13-01-12405-офи_m2) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2484.2014.1).

Список литературы

- [1] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40:2** (1979), 194–220.
- [2] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *J. Phys. A*, **16:16** (1983), L591–L596.
- [3] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [4] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symmetries quantiques = Quantum Symmetries*, Proceedings of the Les Houches summer school, Session LXIV (Les Houches, France, August 1–September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [5] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **86:3** (1982), 391–418.
- [6] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **94:1** (1984), 67–92.
- [7] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **94:1** (1984), 93–113.
- [8] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **554:3** (1999), 647–678, arXiv: math-ph/9807020.
- [9] J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **575:3** (2000), 627–644, arXiv: hep-th/9911030.
- [10] N. Kitanine, K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01022, 17 pp., arXiv: hep-th/0611142.
- [11] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **567:3** (2000), 554–582, arXiv: math-ph/9907019.
- [12] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **641:3** (2002), 487–518, arXiv: hep-th/0201045.
- [13] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **04** (2009), P04003, 66 pp., arXiv: 0808.0227.
- [14] F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, *J. Phys. A*, **37:31** (2004), 7625–7651, arXiv: hep-th/0405089.
- [15] F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, *J. Phys. A*, **38:9** (2006), 1833–1841, arXiv: cond-mat/0412062.
- [16] A. Seel, T. Bhattacharyya, F. Göhmann, A. Klümper, *J. Stat. Mech.*, **08** (2007), P08030, 10 pp., arXiv: 0705.3569.
- [17] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **12** (2011), P12010, 28 pp., arXiv: 1110.0803.
- [18] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **09** (2012), P09001, 33 pp., arXiv: 1206.2630.
- [19] J. S. Caux, J. M. Maillet, *Phys. Rev. Lett.*, **95:7** (2005), 077201, 3 pp., arXiv: cond-mat/0502365.
- [20] R. G. Pereira, J. Sirker, J. S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.*, **96:25** (2006), 257202, 4 pp., arXiv: cond-mat/0603681.
- [21] R. G. Pereira, J. Sirker, J. S. Caux, R. Hagemans, J. M. Maillet, S. R. White, I. Affleck, *J. Stat. Mech.*, **08** (2007), P08022, 64 pp., arXiv: 0706.4327.
- [22] J. S. Caux, P. Calabrese, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01008, 20 pp., arXiv: cond-mat/0611321.
- [23] Н. А. Славнов, *ТМФ*, **79:2** (1989), 232–240.
- [24] Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **150** (1986), 196–213.
- [25] M. Wheeler, *Scalar products in generalized models with SU(3)-symmetry*, arXiv: 1204.2089.
- [26] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **10** (2012), P10017, 25 pp., arXiv: 1207.0956.
- [27] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **04** (2013), P04033, 16 pp., arXiv: 1211.3968.
- [28] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **09** (2012), P09003, 17 pp., arXiv: 1206.4931.

- [29] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *Bethe vectors of quantum integrable models based on $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$* , arXiv: 1310.3253.
- [30] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *ЖЭТФ*, **80**:1 (1981), 214–228.
- [31] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **120** (1982), 92–121.
- [32] А. Н. Варченко, В. О. Тарасов, *Алгебра и анализ*, **6**:2 (1994), 90–137, arXiv: hep-th/9311040.
- [33] S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *J. Math. Kyoto Univ.*, **48**:2 (2008), 277–321.
- [34] B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *Commun. Math. Phys.*, **276**:3 (2007), 691–725.
- [35] А. Ф. Оськин, С. З. Пакуляк, А. В. Силантьев, *Алгебра и анализ*, **21**:4 (2009), 196–240.
- [36] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *SIGMA*, **9** (2013), 058, 23 pp., arXiv: 1304.7602.
- [37] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [38] А. Г. Изергин, *Докл. АН СССР*, **297**:2 (1987), 331–333.

Поступила в редакцию 18.11.2013