Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Л. Воронов, И. В. Тютин, Обобщенные осцилля-
торные представления для обобщенных гамильтонианов
Калоджеро, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 1, 36–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:06:06

© 2014 г.

Б. Л. Воронов*, И. В. Тютин*

ОБОБЩЕННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ КАЛОДЖЕРО

Построены обобщенные осцилляторные представления для всех обобщенных гамильтонианов Калоджеро с потенциалом $V(x) = g_1/x^2 + g_2x^2$, $g_1 \geq -1/4$, $g_2 > 0$. Эти представления, вообще говоря, неединственны, но для каждого гамильтониана существует оптимальное представление, явным образом определяющее основное состояние и его энергию. Для обобщенных гамильтонианов Калоджеро с константами связи $g_1 < -1/4$ или $g_2 < 0$ обобщенные осцилляторные представления не существуют в согласии с тем, что соответствующие гамильтонианы не ограничены снизу.

Ключевые слова: квантовая механика, осцилляторные представления, самосопряженные гамильтонианы.

DOI: 10.4213/tmf8618

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Эта работа является продолжением предыдущей работы авторов [1], где были получены обобщенные осцилляторные представления для гамильтонианов Калоджеро с потенциалом $V(x) = \alpha/x^2$, $\alpha \geq -1/4$.

Рассмотрим самосопряженную по Лагранжу обобщенную дифференциальную операцию Калоджеро $\check{H}$ на положительной вещественной полуоси,

$$\check{H} = -d_x^2 + g_1x^{-2} + g_2x^2, \quad d_x = \frac{d}{dx}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

произвольные вещественные параметры g_1 и g_2 называются константами связи, константа связи g_1 безразмерна, а g_2 имеет размерность четвертой степени обратной

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: tyutin@lpi.ru, voronov@lpi.ru

длины. По определению обобщенные гамильтонианы Калоджеро¹⁾, обычно обозначаемые²⁾ $\hat{H}_\epsilon$, – это самосопряженные дифференциальные операторы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, ассоциированные с этой дифференциальной операцией³⁾. Все обобщенные гамильтонианы Калоджеро с произвольными константами связи были построены в [2] (§ 8.4), там же были получены их спектры, обобщенные собственные функции⁴⁾ и формулы обращения.

По построению каждый гамильтониан $\hat{H}_\epsilon$ с фиксированными константами связи g_1 и g_2 есть самосопряженное расширение исходного симметрического оператора $\hat{H}$, ассоциированного с $\hat{H}$ и определенного на подпространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ гладких функций с компактным носителем на полуоси $(0, \infty)$. Если константа связи $g_1 \geq 3/4$, расширение единственно, так что для каждой константы связи $g_1 \geq 3/4$ и любой фиксированной константы связи $g_2, -\infty < g_2 < \infty$, существует единственный обобщенный гамильтониан Калоджеро $\hat{H}_1$ (в обозначениях [2]). Если же константа связи $g_1 < 3/4$, расширение не единственно, так что для каждой $g_1 < 3/4$ и любой фиксированной константы g_2 существует однопараметрическое семейство $\{\hat{H}_\nu, \nu \in [-\pi/2, \pi/2], \nu = -\pi/2 \sim \nu = \pi/2\}$ обобщенных гамильтонианов Калоджеро⁵⁾, задаваемых асимптотическими самосопряженными граничными условиями в нуле. Если $g_1 \geq -1/4$ и $g_2 \geq 0$, то каждый гамильтониан $\hat{H}_\epsilon$ ограничен снизу. Это следует из того факта, что исходный симметрический оператор $\hat{H}$ с $g_1 \geq -1/4, g_2 \geq 0$ неотрицателен, и поэтому все его самосопряженные расширения ограничены снизу [3], [4]. Если $g_1 < -1/4$, каждый гамильтониан $\hat{H}_\nu$ не ограничен снизу (что известно как “падение на центр” в случае $g_2 \geq 0$); если $g_2 < 0$, все $\hat{H}_\epsilon$ также не ограничены снизу (“падение на бесконечность”).

В настоящей работе нас будет интересовать возможность представления обобщенных гамильтонианов Калоджеро в обобщенной осцилляторной форме

$$\hat{H}_\epsilon = \hat{c}^+ \hat{c} - u \hat{I}, \quad (2)$$

где $\hat{c}$ и $\hat{c}^+$ – пара замкнутых взаимно сопряженных дифференциальных операторов первого порядка, $\hat{c}^+ = (\hat{c})^+, \hat{c} = \bar{\hat{c}} = (\hat{c}^+)^+, \hat{I}$ – единичный оператор, u – вещественный параметр размерности квадрата обратной длины, $\text{Im } u = 0$.

Эта задача была полностью решена в работе [1] для гамильтонианов Калоджеро с константой связи $g_2 = 0$. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем случай $g_2 \neq 0$, т. е. случай собственно обобщенных гамильтонианов Калоджеро.

1) Замечание об используемой терминологии. В данной работе термин “обобщенный” имеет разный смысл в зависимости от контекста. Термин “обобщенные” в данном контексте используется в случае $g_2 \neq 0$; в случае $g_2 = 0$ этот термин опускают, и мы традиционно говорим о “дифференциальной операции Калоджеро” и “гамильтонианах Калоджеро” соответственно, константа связи g_1 в этом случае обычно обозначается α .

2) Для конкретных гамильтонианов индекс ϵ заменяется более информативными индексами.

3) По определению дифференциальный оператор $\hat{f}$ называется ассоциированным с дифференциальной операцией $\hat{f} = \hat{f}(x, d_x)$, если на своей области определения D_f оператор $\hat{f}$ действует как $\hat{f}: \hat{f}\psi(x) = f\psi(x), \psi(x) \in D_f$.

4) Термин “обобщенные” в этом контексте означает обобщенные функции, или распределения.

5) Для краткости мы используем здесь единообразный индекс ν в обозначении обобщенных гамильтонианов Калоджеро с $g_1 < 3/4$, такое обозначение является конденсированным по сравнению с обозначениями, принятыми в [2], где использованы двойные индексы, различающие разные области значений g_1 . Более детальная индексация обобщенных гамильтонианов Калоджеро с $g_1 < 3/4$ вводится ниже по мере необходимости (см. раздел 3).

Параметр u в представлении (2) не единственный, но и не произвольный. Для каждого гамильтониана $\hat{H}_\epsilon$, допускающего представление (2), существует своя собственная область допустимых значений параметра u , определяемая спектром гамильтониана, мы уточним ее ниже. Соответственно, символы $\hat{c}, \hat{c}^+$ пары операторов в (2) неявно содержат u в качестве аргумента. Более того, обобщенные осцилляторные представления с данным u для данного $\hat{H}_\epsilon$ могут допускать различные взаимно сопряженные пары $\hat{c}, \hat{c}^+$, параметризуемые дополнительным параметром, который появляется как дополнительный аргумент в символах $\hat{c}, \hat{c}^+$.

Представление (2) эквивалентно представлению

$$\hat{H}_\epsilon = \hat{d}\hat{d}^+ - u\hat{I}, \quad (3)$$

где $\hat{d}$ и $\hat{d}^+$ – пара замкнутых взаимно сопряженных дифференциальных операторов первого порядка, достаточно произвести отождествления $\hat{c} = \hat{d}^+, \hat{c}^+ = \hat{d}$.

Поставленная нами задача относится к случаям $g_1 \geq -1/4$ вместе с $g_2 > 0$, поскольку представления (2) или (3) для гамильтониана $\hat{H}_\epsilon$ означают, что $\hat{H}_\epsilon$ ограничен снизу, так что его спектр ограничен снизу величиной $-u$ (для краткости мы будем говорить, что гамильтонианы $\hat{H}_\epsilon$ (2) или (3) ограничены снизу величиной $-u$).

Конкретнее, если $E_0 = E_0(g_1, g_2, \nu)$ есть нижняя граница спектра гамильтониана $\hat{H}_\epsilon$ с данными константами связи g_1, g_2 и параметром расширения ν (если $g_1 < 3/4$), то $E_0 \geq -u$, так что область допустимых значений u для данного $\hat{H}_\epsilon$ определяется условием $u \geq -E_0$. И если ядро оператора $\hat{c}$ в представлении (2) (или оператора $\hat{d}^+$ в представлении (3)) с $u = -E_0$ нетривиально, $\ker \hat{c} \neq \{0\}$ (или $\ker \hat{d}^+ \neq \{0\}$), то $\ker \hat{c}$ (или $\ker \hat{d}^+$) есть пространство основного состояния (основное состояние) гамильтониана и E_0 есть энергия основного состояния. Обратно, если данный гамильтониан $\hat{H}_\epsilon$ допускает представление (2) (или представление (3)) с некоторым u и $\ker \hat{c} \neq \{0\}$ (или $\ker \hat{d}^+ \neq \{0\}$), то $\ker \hat{c}$ (или $\ker \hat{d}^+$) есть пространство основного состояния (основное состояние) гамильтониана и $u = -E_0$, энергия основного состояния с обратным знаком. В этом случае мы будем говорить, что представление (2) (или (3)) является оптимальным. Напомним, что все обобщенные гамильтонианы Калоджеро с $g_2 > 0$ имеют дискретный спектр, поэтому мы ожидаем, что в случае, когда обобщенный гамильтониан Калоджеро с данными константами связи $g_1 \geq -1/4, g_2 > 0$ допускает обобщенные осцилляторные представления, существует и оптимальное представление.

Из вышесказанного можно заключить, что при исследовании возможности обобщенных осцилляторных представлений (2) или (3) для обобщенных гамильтонианов Калоджеро с данными константами связи $g_1 \geq -1/4, g_2 > 0$ мы можем заранее ограничить область значений параметра u условием

$$u \geq u_0 = u_0(g_1, g_2),$$

где u_0 – величина, противоположная по знаку нижней границе $E_0(g_1, g_2)$ спектра единственного гамильтониана $\hat{H}_1$ с данными константами связи $g_1 \geq 3/4, g_2 > 0$ или максимуму по ν нижних границ $E_0(g_1, g_2, \nu)$ спектра всех гамильтонианов $\hat{H}_\nu$ с данными константами связи $g_1 \in [-1/4, 3/4), g_2 > 0$:

$$u_0 = u_0(g_1, g_2) = \begin{cases} -E_0(g_1, g_2), & g_1 \geq 3/4, \quad g_2 > 0, \\ -\max_\nu \{E_0(g_1, g_2, \nu)\}, & g_1 \in [-1/4, 3/4), \quad g_2 > 0. \end{cases}$$

Эти границы выписаны в [2], и мы получаем, что

$$u_0 = u_0(g_1, g_2) = -2\sqrt{g_2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{4} + g_1} \right). \quad (4)$$

Таким образом, область допустимых значений u в обобщенном осцилляторном представлении для конкретного обобщенного гамильтониана Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ принадлежит полуоси $[u_0, \infty)$. Поскольку обобщенные осцилляторные представления для данного $\hat{H}_\epsilon$, вообще говоря, не единственны, возникает вопрос об оптимальном представлении.

Что касается обобщенных осцилляторных представлений для обобщенных гамильтонианов Калоджеро с константами связи $g_1 < -1/4$ или $g_2 < 0$, то таких представлений нет и не может быть, поскольку эти гамильтонианы не ограничены снизу.

При решении задачи об обобщенных осцилляторных представлениях для собственно обобщенных гамильтонианов Калоджеро с $g_1 \geq -1/4$ и $g_2 > 0$ мы следуем идеям и методам работы [1], где аналогичная проблема была полностью и положительно решена для гамильтонианов Калоджеро с $g_2 = 0$. Мы кратко опишем их, чтобы дать представление о содержании и структуре настоящей работы.

Основная идея состоит в независимом построении обобщенных гамильтонианов Калоджеро как самосопряженных расширений исходного симметрического оператора $\hat{H}$ непосредственно в обобщенных осцилляторных формах (2) или (3) и в последующем сравнении этих конструкций с известными гамильтонианами из [2].

Исходным пунктом является построение обобщенного осцилляторного представления для соответствующей дифференциальной операции $\check{H}$, которое по определению есть представление вида

$$\check{H} = \check{b}\check{a} - u, \quad \check{a} = \check{b}^*, \quad \check{b} = \check{a}^*, \quad \text{Im } u = 0, \quad (5)$$

где $\check{a}$ и $\check{b}$ – дифференциальные операции конечного порядка, взаимно сопряженные по Лагранжу (см. [3]), верхний индекс $*$ означает сопряжение по Лагранжу, u – вещественный численный параметр.

В принципе, параметр u – переменная величина, ограниченная условием $u \geq u_0 = u_0(g_1, g_2)$ (4), так что фактически мы имеем дело с семейством $\{\check{a}(u), \check{b}(u)\}$ дифференциальных операций, взаимно сопряженных по Лагранжу. Более того, данный оператор $\check{H}$ может допускать семейство различных пар $\check{a}, \check{b}$, параметризованное дополнительным параметром, пусть это будет μ , в представлении (5) с данным u . В таком случае мы фактически будем иметь дело с двухпараметрическим семейством $\{\check{a}(\mu, u), \check{b}(\mu, u)\}$ различных взаимно сопряженных пар $\check{a}, \check{b}$, обеспечивающих желаемое представление (5) для данного $\check{H}$.

Заметим, что в случае гамильтонианов Калоджеро (константа связи $g_2 = 0$) нижняя граница u_0 допустимых значений параметра u в представлении (2) или (3) равна нулю⁶⁾, $u \geq u_0 = 0$. То же справедливо для параметра u в представлении (5) для $\check{H}$ с $g_2 = 0$. Специфической чертой обобщенных гамильтонианов Калоджеро с константой связи $g_2 > 0$ является то, что нижняя граница допустимых значений

⁶⁾Поэтому параметр u обозначался в [1] как $u^2 = (sk_0)^2$, где переменный безразмерный параметр $s \geq 0$, а фиксированный параметр $k_0 > 0$ имеет размерность обратной длины.

параметра u есть $u_0 < 0$ и $|u_0|$ неограниченно растет с g_2 . То же справедливо для параметра u в представлении (5) для $\check{H}$ с $g_2 > 0$.

Пусть дифференциальная операция $\check{H}$ (1) с данными константами связи $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^2$ допускает обобщенное осцилляторное представление (5)

$$\check{H} = \check{b}(u)\check{a}(u) - u, \quad \check{a}(u) = \check{b}^*(u), \quad \check{b}(u) = \check{a}^*(u), \quad (6)$$

с некоторыми $\check{a} = \check{a}(u)$ и $\check{b} = \check{b}(u)$, такими что $\check{a}(u): \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, $\check{b}(u): \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$; при этом возможно, что пары $\check{a}(u)$, $\check{b}(u)$ взаимно сопряженных по Лагранжу дифференциальных операций определяются неоднозначно при данном $u \in \mathbb{R}$. Если мы введем пару начальных дифференциальных операторов $\hat{a}(u)$ и $\hat{b}(u)$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определенных на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ и ассоциированных с дифференциальными операциями $\check{a}(u)$ и $\check{b}(u)$ соответственно, то начальный дифференциальный оператор $\hat{H}$, очевидно, представляется в виде

$$\hat{H} = \hat{b}(u)\hat{a}(u) - u\hat{I}.$$

Пусть $\hat{c}(u)$ и $\hat{c}^+(u)$ – пара замкнутых взаимно сопряженных операторов, которые являются замкнутыми расширениями исходных операторов $\hat{a}(u)$ и $\hat{b}(u)$ соответственно, $\hat{a}(u) \subset \hat{c}(u)$, $\hat{b}(u) \subset \hat{c}^+(u)$; что касается $\hat{c}(u)$, естественно начать с замыкания оператора $\hat{a}(u)$, $\hat{c}(u) = \hat{a}(u)$, тогда $\hat{c}^+(u) = \hat{a}^+(u)$. Оператор

$$\hat{H}_{\epsilon,c} = \hat{c}^+(u)\hat{c}(u) - u\hat{I} \quad (7)$$

является очевидным расширением $\hat{H}$, $\hat{H} \subset \hat{H}_{\epsilon,c}$. По теореме фон Неймана [5] (доказательство можно найти также в [3]) оператор $\hat{H}_{\epsilon,c}$ (7) является самосопряженным, это означает, что $\hat{H}_{\epsilon,c}$ есть определенный обобщенный гамильтониан Калоджеро, представленный в обобщенной осцилляторной форме (2) и ограниченный снизу величиной $-u$, и если ядро соответствующего оператора $\hat{c}(u)$ нетривиально, $\ker \hat{c}(u) \neq \{0\}$, то $\ker \hat{c}(u)$ есть пространство основного состояния (основное состояние) гамильтониана $\hat{H}_{\epsilon,c}$ и $E_0 = -u$ есть его наименьшее собственное значение (энергия основного состояния).

Аналогично, пусть $\hat{d}(u)$ и $\hat{d}^+(u)$ – пара замкнутых взаимно сопряженных операторов, которые являются замкнутыми расширениями начальных операторов $\hat{b}(u)$ и $\hat{a}(u)$ соответственно, $\hat{b}(u) \subset \hat{d}(u)$, $\hat{a}(u) \subset \hat{d}^+(u)$; в первую очередь, в качестве $\hat{d}(u)$ можно взять замыкание оператора $\hat{b}(u)$, $\hat{d}(u) = \hat{b}(u)$, тогда $\hat{d}^+(u) = \hat{b}^+(u)$. Оператор

$$\hat{H}_{\epsilon,d} = \hat{d}(u)\hat{d}^+(u) - u\hat{I} \quad (8)$$

является некоторым обобщенным гамильтонианом Калоджеро, представленным в обобщенной осцилляторной форме (3) и имеющим свойства, аналогичные свойствам оператора $\hat{H}_{\epsilon,c}$ (7) с $\hat{d}^+(u)$ вместо $\hat{c}(u)$. Построение пары $\hat{c}(u) \supset \hat{a}(u)$, $\hat{c}^+(u) \supset \hat{b}(u)$ или пары $\hat{d}(u) \supset \hat{b}(u)$, $\hat{d}^+(u) \supset \hat{a}(u)$ является вопросом удобства: можно начать с расширения $\hat{a}(u)$ до его замыкания или с расширения $\hat{b}(u)$ до его замыкания, получая таким образом, вообще говоря, разные самосопряженные расширения оператора $\hat{H}$.

Варьируя параметр u в представлении (6) в допустимой области, находя полные семейства допустимых пар дифференциальных операций $\check{a}(u)$, $\check{b}(u)$ в этом представлении и привлекая все взаимно сопряженные расширения начальных дифференциальных операторов $\hat{a}(u)$ и $\hat{b}(u)$, можно надеяться построить обобщенные осцилляторные представления (2) или (3) для всех обобщенных гамильтонианов Калоджеро

с $g_1 \geq -1/4$ и $g_2 > 0$ в форме (7) или (8). Ниже мы покажем, что эта надежда оправдывается. Гамильтонианы $\hat{H}_{\epsilon,c}$ и $\hat{H}_{\epsilon,d}$ с $g_1 \geq 3/4$ отождествляются с известными обобщенными гамильтонианами Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ в [2] непосредственно, поскольку гамильтониан $\hat{H}_\epsilon = \hat{H}_1$ с данными $g_1 \geq 3/4$, $g_2 > 0$ является единственным, тогда как при $g_1 \in [-1/4, 3/4)$, $g_2 > 0$ отождествление достигается вычислением асимптотического поведения функций из областей определения операторов $\hat{H}_{\epsilon,c}$ и $\hat{H}_{\epsilon,d}$ в нуле и сравнением его с асимптотическими самосопряженными граничными условиями, задающими различные обобщенные гамильтонианы Калоджеро $\hat{H}_\epsilon = \hat{H}_\nu$ с данными $g_1 \in [-1/4, 3/4)$, $g_2 > 0$.

Скажем наперед, что обобщенное осцилляторное представление (2) (или (3)) для данного обобщенного гамильтониана Калоджеро, вообще говоря, неединственно; в действительности существует однопараметрическое или даже двухпараметрическое семейство представлений для каждого гамильтониана, среди которых имеется оптимальное представление.

В заключение отметим, что идеи и методы, использованные в настоящей работе, так же как и в работе [1], могут быть использованы для построения обобщенных осцилляторных представлений других гамильтонианов, ассоциированных с самосопряженными дифференциальными операциями второго порядка.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ КАЛОДЖЕРО В ОБОБЩЕННОЙ ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ ФОРМЕ

Мы приступаем к построению обобщенных гамильтонианов Калоджеро в обобщенной осцилляторной форме в соответствии с программой, представленной выше.

2.1. Основы построения обобщенных осцилляторных представлений для дифференциальной операции $\check{H}$. Начнем с изучения возможности представления обобщенной дифференциальной операции Калоджеро $\check{H}$ (1) с константами связи $g_1 \geq -1/4$ и $g_2 > 0$ в обобщенной осцилляторной форме (6) с параметром $u \geq u_0$, задаваемым формулой (4).

Очевидным образом обобщая рассуждения из работы [1], относящиеся к дифференциальной операции Калоджеро с $g_2 = 0$, на обобщенную дифференциальную операцию Калоджеро, можно утверждать, что дифференциальная операция $\check{H}$ допускает обобщенное осцилляторное представление (6) тогда и только тогда, когда однородное дифференциальное уравнение

$$-\phi''(x) + (g_1 x^{-2} + g_2 x^2 + u)\phi(x) = 0, \quad (9)$$

или задача на собственные значения

$$\check{H}\phi(x) = -\phi''(x) + (g_1 x^{-2} + g_2 x^2)\phi(x) = -u\phi(x) \quad (10)$$

(которую можно рассматривать как уравнение Шредингера с “энергией” $E = -u$), имеет вещественнозначное положительное решение $\phi(u; x)$,

$$\text{Im } \phi(u; x) = 0, \quad \phi(u; x) > 0, \quad x > 0,$$

и тогда $\check{a}(u)$ и $\check{b}(u)$ являются дифференциальными операциями первого порядка вида

$$\begin{aligned}\check{a}(u) &= d_x - h(u; x) = \phi(u; x) d_x \frac{1}{\phi(u; x)} = \check{b}^*(u), \\ \check{b}(u) &= -d_x - h(u; x) = -\frac{1}{\phi(u; x)} d_x \phi(u; x) = \check{a}^*(u), \\ h(u; x) &= \frac{\phi'(u; x)}{\phi(u; x)} = -\phi(u; x) \left(\frac{1}{\phi(u; x)} \right)'. \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что вещественнозначная функция $h(u; x)$ как функция x является гладкой на полуоси $(0, \infty)$, поскольку вещественнозначная функция $\phi(u; x)$ гладкая и положительная, так что $\check{a}(u): \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, $\check{b}(u): \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Очевидно также, что функция $\phi(u; x)$ в (11) определена с точностью до постоянного положительного множителя⁷⁾.

Если уравнение (9) (или (10)) с данными константами связи g_1 , g_2 и внешним вещественным параметром u не имеет вещественнозначных положительных решений, то обобщенное осцилляторное представление с данным u для $\check{H}$ с данными g_1 и g_2 не существует.

Если уравнение (9) с данным u имеет единственное, с точностью до постоянного положительного множителя, вещественнозначное положительное решение $\phi(u; x)$, то существует единственное обобщенное осцилляторное представление с данным u для данного $\check{H}$. Может случиться, что уравнение (9) с разными u имеет желаемые решения $\phi(u; x)$, тогда мы получаем однопараметрическое семейство $\{\check{a}(u), \check{b}(u)\}$ различных пар $\check{a}(u)$, $\check{b}(u)$ дифференциальных операций (11) с соответствующими различными функциями $\phi(u; x)$, обеспечивающими желаемое обобщенное осцилляторное представление для данного $\check{H}$.

Возможно, что уравнение (9) с данным u имеет два линейно независимых вещественнозначных положительных решения $\phi_1(u; x)$ и $\phi_2(u; x)$, тогда общее вещественнозначное положительное решение $\phi(u; x)$ этого уравнения, определенное по модулю постоянного положительного множителя, имеет вид $\phi(\mu, u; x) = \sin \mu \phi_1(u; x) + \cos \mu \phi_2(u; x)$ с параметром μ , принадлежащим некоторому интервалу на отрезке $[0, 2\pi]$, так что положительные функции $\phi(\mu, u; x)$ с разными μ попарно линейно независимы; конечно, этот интервал содержит сегмент $[0, \pi/2]$. В таком случае мы получаем двухпараметрическое семейство $\{\check{a}(\mu, u), \check{b}(\mu, u)\}$ различных пар $\check{a}(\mu, u)$, $\check{b}(\mu, u)$ дифференциальных операций (11) с соответствующими различными функциями $\phi(\mu, u; x)$, обеспечивающими желаемое обобщенное осцилляторное представление для данного $\check{H}$.

Для полноты мы сначала покажем, что обобщенная дифференциальная операция Калоджеро $\check{H}$ (1) с константой связи $g_1 < -1/4$ или с константой связи $g_2 < 0$ не допускает обобщенного осцилляторного представления с любым u , что находится в полном согласии с тем фактом, что соответствующие обобщенные дифференциальные гамильтонианы Калоджеро $\check{H}_\epsilon$ с такими константами связи не ограничены

⁷⁾ Дифференциальные операции в (11) очевидным образом определены с точностью до произвольных фазовых множителей, $\check{a} \rightarrow e^{i\theta(x)} \check{a}$, $\check{b} \rightarrow \check{b} e^{-i\theta(x)}$. Эти множители несущественны, поскольку они тривиально сокращаются в произведении $\check{b}\check{a}$; выбор их есть вопрос удобства, мы здесь выбираем $\theta(x) = 0$.

снизу и поэтому не могут быть представлены в обобщенной осцилляторной форме. Достаточно доказать, что уравнение (9) с $g_1 < -1/4$ или с $g_2 < 0$ и любым вещественным u не имеет вещественнозначных положительных решений.

Пусть $g_1 = -1/4 - \sigma^2$, $\sigma > 0$. В этом случае уравнение (9) с любыми g_2 и u имеет решение $\phi_1(x)$, асимптотика которого в нуле имеет вид

$$\phi_1(x) = (k_0 x)^{1/2+i\sigma} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0,$$

где k_0 – произвольный, но фиксированный параметр размерности обратной длины. Линейно независимым решением $\phi_2(x)$ является функция, комплексно-сопряженная $\phi_1(x)$, $\phi_2(x) = \overline{\phi_1(x)}$. Общее вещественнозначное решение уравнения (9) имеет вид $\phi(x) = A\phi_1(x) + \bar{A}\overline{\phi_1(x)}$, где $A = |A|e^{i\varphi}$ – произвольная константа, его асимптотическое поведение в нуле дается формулой

$$\phi(x) = 2|A|(k_0 x)^{1/2} [1 + O(x^2)] \cos[\sigma \ln(k_0 x) + \varphi + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0,$$

которая демонстрирует бесконечное число нулей функции $\phi(x)$ в окрестности нуля.

Пусть $g_2 = -\omega^2$, $\omega > 0$. В этом случае уравнение (9) с любыми g_1 и u имеет решение $\phi_1(x)$, асимптотика которого на бесконечности имеет вид

$$\phi_1(x) = (\omega x^2)^{-(1-iu/\omega)/4} e^{-i\omega x^2/2} [1 + O(x^{-2})], \quad x \rightarrow \infty.$$

И снова линейно независимым решением $\phi_2(x)$ является функция, комплексно-сопряженная $\phi_1(x)$, $\phi_2(x) = \overline{\phi_1(x)}$, и общее вещественнозначное решение уравнения (9) имеет вид $\phi(x) = A\phi_1(x) + \bar{A}\overline{\phi_1(x)}$, $A = |A|e^{i\varphi}$. Асимптотическое поведение $\phi(x)$ на бесконечности дается формулой

$$2|A|(\omega x^2)^{-1/4} [1 + O(x^{-2})] \cos \left[\frac{1}{2} \omega x^2 - \frac{u}{4\omega} \ln(\omega x^2) - \varphi + O(x^{-2}) \right], \quad x \rightarrow \infty,$$

которая демонстрирует бесконечное число нулей функции $\phi(x)$, накапливающихся на бесконечности.

Перейдем к обобщенным осцилляторным представлениям для обобщенных дифференциальных операций Калоджеро $\tilde{H}$ (1) с константами связи $g_1 \geq -1/4$ и $g_2 > 0$, что составляет предмет нашего главного интереса.

При нахождении общего решения уравнения (9) удобно перейти от старых параметров g_1 , g_2 , u , u_0 к новым параметрам $\varkappa$, v , w , w_0 , определяемым формулами

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{4} + \varkappa^2, & \varkappa &= \sqrt{g_1 + \frac{1}{4}} \geq 0, \\ g_2 &= v^4, & v &= \sqrt[4]{g_2} > 0, \\ u &= 4\sqrt{g_2}w, & w &= \frac{u}{4v^2} \geq w_0, \\ w_0 &= \frac{u_0}{4v^2} = -\frac{1}{2}(1 + \varkappa) < 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где v имеет размерность обратной длины, $\varkappa$, w и w_0 безразмерны, и от старой пространственной переменной x к новой безразмерной переменной

$$\rho = (vx)^2 \geq 0. \tag{13}$$

Подстановка

$$\phi(x) = e^{-\rho/2} \rho^{1/4+\kappa/2} \tilde{\phi}(\rho) \quad (14)$$

сводит уравнение (9) к уравнению

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \tilde{\phi}(\rho)}{d\rho^2} + (\beta - \rho) \frac{d\tilde{\phi}(\rho)}{d\rho} - \alpha \tilde{\phi}(\rho) &= 0, \\ \alpha &= \frac{1+\kappa}{2} + w = \frac{\beta}{2} + w \geq 0, \quad \beta = 1 + \kappa \geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$

известному как вырожденное гипергеометрическое уравнение. Исчерпывающую информацию о его решениях, которые называют вырожденными гипергеометрическими функциями, можно найти в [6] (гл. 6) и в [7] (раздел 9.2).

При рассмотрении фундаментальных систем решений и соответствующих представлений общего решения вырожденного гипергеометрического уравнения (15) мы вынуждены различать два случая: случай $\alpha > 0$ и случай $\alpha = 0$.

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (15) с $\alpha > 0$ можно взять две стандартные вырожденные гипергеометрические функции: функцию

$$\Phi(\alpha, \beta; \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \frac{\rho^k}{k!} = 1 + \frac{\alpha}{\beta} \rho + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} \frac{\rho^2}{2!} + \dots, \quad (16)$$

где

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} 1, & k=0, \\ \alpha(\alpha+1)(\alpha+k-1), & k=1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

– символ Похгаммера, и функцию

$$\Psi(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; \rho) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} \rho^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; \rho). \quad (17)$$

Неопределенность правой части в (17) при целых $\beta = n+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, разрешается предельным переходом $\beta \rightarrow n+1$, который дает слагаемое с логарифмическим фактором, в частности

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, 1; \rho) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \Phi(\alpha, n+1; \rho) \ln \frac{1}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{(n+1)_r} [2\psi(1+r) - \psi(\alpha+r)] \frac{\rho^r}{r!} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где ψ – логарифмическая производная гамма-функции Эйлера, $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Функция $\Psi(\alpha, \beta; \rho)$ допускает также представление

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta; \rho) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} dt t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-\alpha-1} e^{-\rho t} = \\ &= \frac{\rho^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} dt t^{\alpha-1} (\rho+t)^{\beta-\alpha-1} e^{-t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Общее решение уравнения (15) с $\alpha > 0$ тогда дается формулой

$$\tilde{\phi}(\rho) = A\Phi(\alpha, \beta; \rho) + B\Psi(\alpha, \beta; \rho), \quad \alpha > 0, \quad (20)$$

где A и B – произвольные постоянные комплексные коэффициенты.

В дальнейшем нам потребуются сведения об асимптотическом поведении функций $\Phi(\alpha, \beta; \rho)$ и $\Psi(\alpha, \beta; \rho)$ как функций ρ в нуле и на бесконечности, мы представим их в форме, достаточной для наших целей. Асимптотическое поведение этих функций в нуле дается формулами

$$\Phi(\alpha, \beta; \rho) = 1 + O(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (21)$$

и

$$\Psi(\alpha, \beta; \rho) = \begin{cases} O(\rho^{1-\beta}), & \beta \geq 2, \\ \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} \rho^{1-\beta} (1 + O(\rho)) + \\ \quad + \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} (1 + O(\rho)), & \beta \in (1, 2), \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ln \rho (1 + O(\rho)) + \\ \quad + [2\psi(1) - \psi(\alpha)] (1 + O(\rho)), & \beta = 1, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0, \quad (22)$$

так что $\Psi(\alpha, \beta; \rho)$ стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow 0$, тогда как их асимптотическое поведение на бесконечности дается формулами

$$\Phi(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \rho^{\alpha-\beta} e^{\rho} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$$\Psi(\alpha, \beta; \rho) = \rho^{-\alpha} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Случай $\alpha = 0$ является особым, поскольку $\Phi(0, \beta; \rho) = \Psi(0, \beta; \rho) = 1$. В качестве фундаментальной системы решений уравнения (15) с $\alpha = 0$ можно взять функции

$$\Phi(\beta; \rho) = \Phi(0, \beta; \rho) = 1$$

и

$$\Psi(\beta; \rho) = \int_a^\rho d\tau \tau^{-\beta} e^\tau, \quad (25)$$

где $a > 0$ – некоторое фиксированное число. Общее решение уравнения (15) с $\alpha = 0$ тогда дается формулой

$$\tilde{\phi}(\rho) = A + B\Psi(\beta; \rho), \quad \alpha = 0. \quad (26)$$

Возвращаясь к уравнению (9), мы будем использовать обозначения, введенные в (12), (13) и (15), где $u = 4v^2w$, и будем различать область $w > w_0 = -(1 + \varkappa)/2$ ($\alpha > 0$) и точку $w = w_0$ ($\alpha = 0$).

Общее решение уравнения (9) с $g_1 \geq -1/4$, $g_2 > 0$ и $w > w_0$ получается комбинированием формул (14) и (20). Однако, чтобы иметь удобную форму асимптотики решения в нуле, мы перенормируем коэффициент B в (20) следующим образом⁸⁾:

$$B \rightarrow \begin{cases} B \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta-1)}, & g_1 > -\frac{1}{4} \quad (\varkappa > 0), \\ B\Gamma(\alpha), & g_1 = -\frac{1}{4} \quad (\varkappa = 0). \end{cases}$$

⁸⁾ Это эквивалентно очевидному изменению фундаментальной системы решений уравнения (15).

При этом соглашении общее решение уравнения (9) с $w > w_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(w; x) &= A\phi_1(w; x) + B\phi_2(w; x), \quad w > w_0 = -\frac{1}{2}(1 + \varkappa), \\ \phi_1(w; x) &= e^{-\rho/2} \rho^{1/4 + \varkappa/2} \Phi(\alpha, \beta; \rho), \\ \phi_2(w; x) &= \begin{cases} e^{-\rho/2} \rho^{1/4 + \varkappa/2} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\varkappa)} \Psi(\alpha, \beta; \rho), & g_1 > -\frac{1}{4} (\varkappa > 0), \\ e^{-\rho/2} \rho^{1/4} \Gamma(\alpha) \Psi(\alpha, 1; \rho), & g_1 = -\frac{1}{4} (\varkappa = 0), \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

где функции $\Phi(\alpha, \beta; \rho)$ и $\Psi(\alpha, \beta; \rho)$ даются соответственно формулами (16) и (17), (18) или (19), A и B – произвольные комплексные числа. Замечательно, что обе функции ϕ_1 и ϕ_2 вещественнозначные и положительные.

Согласно (14) и (26) общее решение уравнения (9) с $w = w_0$ имеет вид

$$\phi(w_0; x) = e^{-\rho/2} \rho^{1/4 + \varkappa/2} (A + B\Psi(\beta; \rho)), \quad w = w_0 = -\frac{1}{2}(1 + \varkappa), \quad (28)$$

где функция $\Psi(\beta; \rho)$ дается формулой (25).

Соответственно, в дальнейшем мы вынуждены рассматривать отдельно область $w > w_0 = -(1 + \varkappa)/2$ и точку $w = w_0$. Кроме того, как это следует из [2], в обоих случаях $w > w_0$ и $w = w_0$ естественным образом выделяется точка $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$) – в силу специфического поведения входящих в рассмотрение функций в нуле, которое составляет существенный пункт анализа. Мы начнем с области $g_1 > -1/4$ ($\varkappa > 0$) и $w > w_0$.

2.2. Область $g_1 > -1/4$ ($\varkappa > 0$), $w > w_0 = -(1 + \varkappa)/2$ ($\alpha > 0$).

2.2.1. *Обобщенные осцилляторные представления для $\check{H}$, дифференциальные операции $\check{a}$ и $\check{b}$.* В этой области параметров общее решение уравнения (9) дается формулой (27) с вещественнозначными и положительными линейно независимыми функциями ϕ_1 и ϕ_2 . При этом функция $\Phi(\alpha, \beta; \rho)$ монотонно возрастает от 1 до ∞ , когда $\rho = (vx)^2$ вместе с x изменяются от 0 до ∞ (см. (16)), в то время как функция $\Psi(\alpha, \beta; \rho)$ монотонно убывает от ∞ до 0, поскольку подынтегральное выражение первого интеграла в правой части (19) является убывающей функцией ρ , неинтегрируемо при $\rho = 0$ и исчезает при $\rho \rightarrow \infty$.

Согласно рассуждениям, приведенным после формулы (11), отсюда следует, что общее вещественнозначное положительное решение уравнения (9), определяемое по модулю постоянного положительного множителя, дается формулой (27) с $A = \sin \mu$, $B = \cos \mu$, $\mu \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} \phi(\mu, w; x) &= e^{-\rho/2} \rho^{1/4 + \varkappa/2} \left[\Phi(\alpha, \beta; \rho) \sin \mu + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\varkappa)} \Psi(\alpha, \beta; \rho) \cos \mu \right], \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad \alpha = \frac{1 + \varkappa}{2} + w > 0, \quad \beta = 1 + \varkappa, \quad \varkappa > 0, \quad \rho = (vx)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

а это означает, что мы имеем двухпараметрическое семейство $\{\check{a}(\mu, w), \check{b}(\mu, w); \mu \in [0, \pi/2], w \in (w_0, \infty), \varkappa > 0\}$ независимых пар взаимно сопряженных дифференциальных операций первого порядка $\check{a}(\mu, w)$ и $\check{b}(\mu, w)$, определяемых формулой (11)

с очевидными подстановками $\check{a}(u) \rightarrow \check{a}(\mu, w)$, $\check{b}(u) \rightarrow \check{b}(\mu, w)$ и $\phi(u; x) \rightarrow \phi(\mu, w; x)$:

$$\begin{aligned}\check{a}(\mu, w) &= \phi(\mu, w; x) d_x \frac{1}{\phi(\mu, w; x)} = \check{a}^*(\mu, w), \\ \check{b}(\mu, w) &= -\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} d_x \phi(\mu, w; x) = \check{a}^*(\mu, w), \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty), \quad \varkappa \in (0, \infty),\end{aligned}\tag{30}$$

и обеспечивающих двухпараметрическое семейство⁹⁾ различных обобщенных осцилляторных представлений (6) для обобщенных дифференциальных операций Калоджеро $\check{H}$ (1) с $g_1 > -1/4$ и $g_2 > 0$,

$$\begin{aligned}\check{H} &= -d_x^2 + g_1 x^{-2} + g_2 x^2 = \check{b}(\mu, w) \check{a}(\mu, w) - 4v^2 w, \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty).\end{aligned}\tag{31}$$

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики функций $\phi(\mu, w; x)$ и $1/\phi(\mu, w; x)$ в нуле и на бесконечности. Согласно формулам (21), (22) и (23), (24) асимптотики этих функций в нуле имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}\phi(\mu, w; x) &= \\ &= \begin{cases} O(x^{1/2-\varkappa}), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \geq 1, \\ \tilde{A}(vx)^{1/2+\varkappa} + \tilde{B}(vx)^{1/2-\varkappa} + O(x^{5/2-\varkappa}), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \in (0, 1), \\ O(x^{1/2+\varkappa}), & \mu = \frac{\pi}{2}, \quad \varkappa > 0, \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \\ \tilde{A} &= \tilde{A}(\mu, w) = \sin \mu - \cos \mu \frac{\Gamma(1-\varkappa)\Gamma((1+\varkappa)/2+w)}{\Gamma(1+\varkappa)\Gamma((1-\varkappa)/2+w)}, \\ \tilde{B} &= \tilde{B}(\mu, w) = \cos \mu,\end{aligned}\tag{32}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} &= \\ &= \begin{cases} O(x^{\varkappa-1/2}), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \geq 1, \\ \frac{1}{\tilde{B}(\mu, w)} \frac{(vx)^{\varkappa-1/2}}{1 + (\tilde{A}(\mu, w)/\tilde{B}(\mu, w))(vx)^{2\varkappa}} + \\ \quad + O(x^{3/2+\varkappa}), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \in (0, 1), \\ O(x^{-1/2-\varkappa}), & \mu = \frac{\pi}{2}, \quad \varkappa > 0, \end{cases} \quad x \rightarrow 0,\end{aligned}\tag{33}$$

⁹⁾ Как правило, мы указываем в формулах области изменения параметров μ и w лишь тогда, когда они отличаются от полных областей изменения, в данном случае это $[0, \pi/2]$ для μ и (w_0, ∞) для w , область изменения параметра $\varkappa$ указана в заголовке раздела или подраздела, в данном случае это $(0, \infty)$. Что же касается главных результирующих формул, мы указываем области изменения всех параметров, включая $\varkappa$.

а их асимптотики на бесконечности – соответственно вид

$$\begin{aligned} \phi(\mu, w; x) = \\ = \begin{cases} \sin \mu \frac{\Gamma(1 + \varkappa)}{\Gamma((1 + \varkappa)/2 + w)} (vx)^{-1/2+2w} e^{(vx)^2/2} (1 + O(x^{-2})), \\ \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varkappa > 0, \\ \frac{\Gamma((1 + \varkappa)/2 + w)}{\Gamma(\varkappa)} (vx)^{-1/2-2w} e^{-(vx)^2/2} (1 + O(x^{-2})), \\ \mu = 0, \quad \varkappa > 0, \end{cases} \quad x \rightarrow \infty, \quad (34) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(\mu, w; x)} = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\sin \mu} \frac{\Gamma((1 + \varkappa)/2 + w)}{\Gamma(1 + \varkappa)} (vx)^{1/2-2w} e^{-(vx)^2/2} (1 + O(x^{-2})), \\ \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varkappa > 0, \\ \frac{\Gamma(\varkappa)}{\Gamma((1 + \varkappa)/2 + w)} (vx)^{1/2+2w} e^{(vx)^2/2} (1 + O(x^{-2})), \\ \mu = 0, \quad \varkappa > 0, \end{cases} \quad x \rightarrow \infty. \quad (35) \end{aligned}$$

2.2.2. Начальные операторы $\hat{a}$ и $\hat{b}$. Введем пары начальных дифференциальных операторов $\hat{a}(\mu, w)$ и $\hat{b}(\mu, w)$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определенных на подпространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ гладких функций с компактным носителем, $D_{a(\mu, w)} = D_{b(\mu, w)} = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, и ассоциированных с каждой парой соответствующих дифференциальных операций $\check{a}(\mu, w)$ и $\check{b}(\mu, w)$ (30). Эти операторы обладают свойством

$$(\psi, \hat{a}(\mu, w)\xi) = (\hat{b}(\mu, w)\psi, \xi), \quad \psi(x), \xi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+), \quad (36)$$

которое легко проверяется интегрированием по частям. Согласно (31) начальный симметрический оператор $\hat{H}$, ассоциированный с $\check{H}$ и определенный на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, допускает представления

$$\hat{H} = \hat{a}(\mu, w)\hat{b}(\mu, w) - 4v^2w\hat{I}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w > w_0, \quad \varkappa > 0, \quad (37)$$

из которых, в частности, следует, что оператор $\hat{H}$ с $g_1 > -1/4$, $g_2 > 0$ ограничен снизу величиной $-4v^2w$,

$$\begin{aligned} (\xi, \hat{H}\xi) &= (\xi, (\hat{b}(\mu, w)\hat{a}(\mu, w) - 4v^2w\hat{I})\xi) = \\ &= (\hat{a}(\mu, w)\xi, \hat{a}(\mu, w)\xi) - 4v^2w(\xi, \xi) \geq -4v^2w(\xi, \xi), \quad \xi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Взяв нижнюю грань w , которая равна w_0 , получаем, что оператор $\hat{H}$ с $g_1 > -1/4$, $g_2 > 0$ ограничен снизу величиной $-4v^2w_0 = 2v^2(1 + \varkappa)$. Эти представления являются основой для построения самосопряженных обобщенных гамильтонианов Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ в обобщенной осцилляторной форме как самосопряженных расширений оператора $\hat{H}$ (37) в соответствии с программой, сформулированной в разделе 1. Именно, мы должны построить все возможные расширения каждой пары $\hat{a}(\mu, w)$,

$\hat{b}(\mu, w)$ начальных операторов с данными μ и w до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{c}(\mu, w)$, $\hat{c}^+(\mu, w)$, $\hat{a}(\mu, w) \subset \hat{c}(\mu, w)$, $\hat{b}(\mu, w) \subset \hat{c}^+(\mu, w)$, начиная с замыкания $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ оператора $\hat{a}(\mu, w)$, или до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{d}(\mu, w)$, $\hat{d}^+(\mu, w)$, $\hat{a}(\mu, w) \subset \hat{d}^+(\mu, w)$, $\hat{b}(\mu, w) \subset \hat{d}(\mu, w)$, начиная с замыкания $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ оператора $\hat{b}(\mu, w)$. Эти расширения порождают соответствующие самосопряженные операторы

$$\hat{H}_{ec(\mu, w)} = \hat{c}^+(\mu, w)\hat{c}(\mu, w) - 4v^2w\hat{I} \quad (38)$$

и

$$\hat{H}_{ed(\mu, w)} = \hat{d}(\mu, w)\hat{d}^+(\mu, w) - 4v^2w\hat{I}, \quad (39)$$

которые являются некоторыми самосопряженными обобщенными гамильтонианами Калоджеро в обобщенной осцилляторной форме. После этого остается идентифицировать операторы $\hat{H}_{ec(\mu, w)}$ и $\hat{H}_{ed(\mu, w)}$ с известными обобщенными гамильтонианами Калоджеро. Следует отметить, что операторы $\hat{H}_{ec(\mu, w)}$ и $\hat{H}_{ed(\mu, w)}$ необязательно различны, даже если $c(\mu, w) \neq \hat{d}^+(\mu, w)$, более того, левые части формул (38) или (39) могут не зависеть от μ и w .

Перейдем к построению всех возможных расширений произвольных пар начальных операторов $\hat{a}(\mu, w)$, $\hat{b}(\mu, w)$ до пар замкнутых взаимно сопряженных операторов.

2.2.3. Сопряженные операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{b}^+$, замкнутые операторы $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$. Поскольку все операторы $\hat{a}(\mu, w)$ и $\hat{b}(\mu, w)$ плотно определены, существуют сопряженные им операторы $\hat{a}^+(\mu, w)$ и $\hat{b}^+(\mu, w)$ соответственно. Определяющее уравнение для $\hat{a}^+(\mu, w)$, т. е. уравнение для пар $\psi(x) \in D_{a^+(\mu, w)}$ и $\eta(x) = \hat{a}^+(\mu, w)\psi(x)$, образующих граф оператора $\hat{a}^+(\mu, w)$ (см. [2], раздел 2.6), имеет вид

$$(\psi, \hat{a}(\mu, w)\xi) = (\eta, \xi), \quad \xi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+). \quad (40)$$

Равенство (36) означает, что уравнение (40) имеет решения

$$\psi(x) = \zeta(x), \quad \eta(x) = \hat{b}(\mu, w)\zeta(x), \quad \zeta(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+),$$

откуда следует, что $\hat{b}(\mu, w) \subset \hat{a}^+(\mu, w)$. Тем самым оператор $\hat{a}^+(\mu, w)$ плотно определен, и, значит, существует сопряженный ему оператор $(\hat{a}^+(\mu, w))^+$, а оператор $\hat{a}(\mu, w)$ допускает замыкание $\bar{\hat{a}}(\mu, w) = (\hat{a}^+(\mu, w))^+ \subseteq \hat{b}^+(\mu, w)$, и $(\bar{\hat{a}}(\mu, w))^+ = \hat{a}^+(\mu, w)$. Аналогично получаем, что $\hat{a}(\mu, w) \subset \hat{b}^+(\mu, w)$, следовательно, существует оператор $(\hat{b}^+(\mu, w))^+$, сопряженный $\hat{b}^+(\mu, w)$, оператор $\hat{b}(\mu, w)$ допускает замыкание $\bar{\hat{b}}(\mu, w) = (\hat{b}^+(\mu, w))^+ \subseteq \hat{a}^+(\mu, w)$, и $(\bar{\hat{b}}(\mu, w))^+ = \hat{b}^+(\mu, w)$. Таким образом, мы получаем цепочки включений

$$\begin{aligned} \hat{a}(\mu, w) \subset \bar{\hat{a}}(\mu, w) &= (\hat{a}^+(\mu, w))^+ \subseteq \hat{b}^+(\mu, w), \\ \hat{b}(\mu, w) \subset \bar{\hat{b}}(\mu, w) &= (\hat{b}^+(\mu, w))^+ \subseteq \hat{a}^+(\mu, w). \end{aligned} \quad (41)$$

2.2.4. Области определения операторов $\hat{a}^+$, $\hat{b}^+$, $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$. При вычислении операторов $\hat{a}^+(\mu, w)$, $\hat{b}^+(\mu, w)$, $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ и $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ мы следуем работе [1], где был рассмотрен случай $g_2 = 0$. Операторы $\hat{a}^+(\mu, w)$ и $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ ассоциированы с дифференциальной

операцией $\check{b}(\mu, w) = \check{a}^*(\mu, w)$, а операторы $\hat{b}^+(\mu, w)$ и $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ ассоциированы с дифференциальной операцией $\check{a}(\mu, w) = \check{b}^*(\mu, w)$. Поэтому достаточно вычислить области определения рассматриваемых операторов, которые или совпадают с естественными областями для соответствующих дифференциальных операций, или содержатся в них¹⁰⁾.

А. Область определения $D_{a^+(\mu, w)}$ оператора $\hat{a}^+(\mu, w)$ есть естественная область для $\check{b}(\mu, w)$:

$$D_{a^+(\mu, w)} = D_{\check{b}(\mu, w)}^n = \left\{ \psi(x) : \psi(x) \text{ а. н. в } \mathbb{R}_+; \right. \\ \left. \psi(x), \check{b}(\mu, w)\psi(x) = -\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \frac{d}{dx}(\phi(\mu, w; x)\psi(x)) \equiv \eta(x) \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}, \quad (42)$$

где сокращение “а. н.” означает “абсолютно непрерывный”.

Согласно (42) произвольную функцию $\psi(x)$, принадлежащую $D_{a^+(\mu, w)}$, можно рассматривать как решение неоднородного дифференциального уравнения $\check{b}_{(\mu, w)}\psi(x) = \eta(x)$ при дополнительном условии, что $\psi(x)$ и $\eta(x)$ квадратично-интегрируемы на $\mathbb{R}_+$. С учетом оценок (32), (33) и (34), (35) отсюда следует, что функции $\psi(x) \in D_{a^+(\mu, w)}$ допускают представление

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \left[C - \int_{x_0}^x dy \phi(\mu, w; y) \eta(y) \right], \quad \eta(x) = \check{b}_{(\mu, w)}\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad (43)$$

где точка x_0 и константа C зависят от значений параметров μ и $\varkappa$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu = 0: & \begin{cases} x_0 \in (0, \infty) & \text{при } \varkappa \geq 1, \\ x_0 = 0 & \text{при } \varkappa \in (0, 1), \end{cases} & C = \int_{x_0}^{\infty} dy \phi(0, w; y) \eta(y), \\ \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): & \begin{cases} x_0 \in (0, \infty) & \text{при } \varkappa \geq 1, \\ x_0 = 0 & \text{при } \varkappa \in (0, 1), \end{cases} & C - \text{произвольная константа}, \\ \mu = \frac{\pi}{2}: & x_0 = 0, \quad C = 0, \quad \varkappa > 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Тонкость состоит в том, что для $\mu \in [0, \pi/2)$ константа C в (43) может принимать произвольные значения, но для $\mu \in (0, \pi/2)$ константа C не зависит от функции $\eta(x)$, в то время как для $\mu = 0$ она однозначно связана с η , так что представление (43), (44) с $\mu = 0$ для $\psi(x) \in D_{a^+(0, w)}$ эквивалентно следующему представлению:

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(0, w; x)} \int_x^{\infty} dy \phi(0, w; y) \eta(y), \quad \eta(x) = \check{b}_{(0, w)}\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad (45) \\ \mu = 0, \quad \varkappa > 0.$$

Используя оценки (32)–(35) и оценивая интегральные члены в (43) и (45) с помощью неравенства Коши–Буняковского, получаем, что асимптотика функций

¹⁰⁾ Напомним, что естественная область $D_{\check{f}}^n \subset L^2(\mathbb{R}_+)$ для данной дифференциальной операции $\check{f}$ есть максимальная из всех возможных областей определения операторов, ассоциированных с $\check{f}$ (см. [2]).

$\psi(x) \in D_{a^+(\mu, w)}$ при $x \rightarrow 0$ имеет следующий вид:

$$\psi(x) = \begin{cases} O(x^{1/2}) & \forall \mu, \kappa > 1 \text{ или } \mu = \frac{\pi}{2}, \kappa \in (0, 1], \\ O\left(x^{1/2} \sqrt{\ln \frac{1}{x}}\right), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \kappa = 1, \\ \frac{C}{\tilde{B}(\mu, w)} (vx)^{\kappa-1/2} [1 + O(x^{2\kappa})] + O(x^{1/2}), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \kappa \in (0, 1), \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \quad (46)$$

а на бесконечности $\psi(x) \in D_{a^+(\mu, w)}$ стремится к нулю,

$$\psi(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall \mu, \kappa > 0. \quad (47)$$

Отметим, что при $\kappa \in (0, 1)$ область определения $D_{a^+(\mu, w)}$ оператора $\hat{a}^+(\mu, w)$ с $\mu \in [0, \pi/2)$ может быть представлена как прямая сумма вида

$$D_{a^+(\mu, w)} = \{C\psi_0(\mu, w; x)\} + \tilde{D}_{a^+(\mu, w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \kappa \in (0, 1),$$

где функция $\psi_0(\mu, w; x)$, принадлежащая $D_{a^+(\mu, w)}$, дается формулой

$$\psi_0(\mu, w; x) = \frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \zeta(x),$$

так что

$$\check{b}(\mu, w)\psi_0(\mu, w; x) = -\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \zeta'(x),$$

$\zeta(x)$ – фиксированная гладкая функция с компактным носителем, равная единице в некоторой окрестности нуля, а $\tilde{D}_{a^+(\mu, w)}$ – подпространство функций, принадлежащих $D_{a^+(\mu, w)}$ и обращающихся в нуль в нуле:

$$\tilde{D}_{a^+(\mu, w)} = \{\psi(x) \in D_{a^+(\mu, w)} : \psi(x) = O(x^{1/2}), x \rightarrow 0\}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \kappa \in (0, 1). \quad (48)$$

Б. Совершенно аналогично описывается область определения $D_{b^+(\mu, w)}$ оператора $\hat{b}^+(\mu, w)$. Она есть естественная область для $\check{a}(\mu, w) = \check{b}^*(\mu, w)$:

$$D_{b^+(\mu, w)} = D_{\check{a}(\mu, w)}^n = \left\{ \chi(x) : \chi(x) \text{ а. н. в } \mathbb{R}_+; \right. \\ \left. \chi(x), \check{a}(\mu, w)\chi(x) = \phi(\mu, w; x) d_x \left(\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \chi(x) \right) = \eta(x) \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}. \quad (49)$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в пункте А, относящимся к функции $\psi(x)$, принадлежащей $D_{a^+(\mu, w)}$ (42), с естественной заменой $\phi(\mu, w) \leftrightarrow 1/\phi(\mu, w)$, устанавливаем, что произвольная функция $\chi(x)$, принадлежащая $D_{b^+(\mu, w)}$, допускает представление

$$\chi(x) = \phi(\mu, w; x) \left[D + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{\phi(\mu, w; y)} \eta(y) \right], \quad (50) \\ \eta(x) = \check{a}(\mu, w; x) \chi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

где точка x_0 и константа D зависят от значений параметров μ и $\varkappa$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu = 0: \quad x_0 = 0 \text{ и } \begin{cases} D = 0 & \text{при } \varkappa \geq 1, \\ D - \text{произвольная константа} & \text{при } \varkappa \in (0, 1), \end{cases} \\ \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): \quad x_0 = 0 \text{ и } \begin{cases} D = \int_0^\infty dy \frac{1}{\phi(\mu, w; y)} \eta(y) = 0 & \text{при } \varkappa \geq 1, \\ D = - \int_0^\infty dy \frac{1}{\phi(\mu, w; y)} \eta(y), & \varkappa \in (0, 1), \end{cases} \\ \mu = \frac{\pi}{2}: \quad 0 < x_0 < \infty \text{ и } D = - \int_{x_0}^\infty dy \frac{1}{\phi(\pi/2, w; y)} \eta(y), \quad \varkappa > 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Тонкость состоит в том, что при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \in (0, 1)$ и при $\mu = \pi/2$ и любых $\varkappa > 0$ константа D в (50) может принимать произвольные значения, но при $\mu = 0$ константа D не зависит от функции $\eta(x)$, в то время как при $\mu \in (0, \pi/2)$, $\varkappa \in (0, 1)$ и при $\mu = \pi/2$ и любых $\varkappa > 0$ она однозначно связана с η .

Все вместе это означает, что представление (50), (51) для $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$ при $\mu \in (0, \pi/2]$ и любых $\varkappa > 0$ эквивалентно следующему представлению:

$$\begin{aligned} \chi(x) = -\phi(\mu, w; x) \int_x^\infty dy \frac{1}{\phi(\mu, w; y)} \eta(y), \quad \eta(x) = \check{a}_{(\mu, w)} \chi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \\ \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varkappa > 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Используя асимптотики (32)–(35) и неравенства Коши–Буняковского для оценки интегральных членов в (50) и (52), можно найти асимптотики функций $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$ в нуле и на бесконечности. Они имеют вид

$$\chi(x) = \begin{cases} O(x^{1/2}) & \forall \mu, \varkappa \geq 1 \text{ или } \mu = \frac{\pi}{2}, \varkappa \in (0, 1), \\ D\tilde{B}(\mu, w)(vx)^{1/2-\varkappa} \times \\ \times [1 + O(x^{2\varkappa})] + O(x^{1/2}), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \varkappa \in (0, 1), \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \quad (53)$$

и

$$\chi(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall \mu, \quad \varkappa > 0. \quad (54)$$

Из формул (50), (51) с $\eta(x) = 0$ следует, что ядро оператора $\hat{b}^+(\mu, w)$ нетривиально только при $\mu = 0$, $\varkappa \in (0, 1)$:

$$\ker \hat{b}^+(\mu, w) = \begin{cases} \{0\} & \forall \mu, \varkappa \geq 1 \text{ и } \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \varkappa \in (0, 1), \\ \left\{ c \left(\phi(0, w; x) = e^{-(vx)^2/2} (vx)^{1/2+\varkappa} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\varkappa)} \Psi(\alpha, \beta; (vx)^2) \right) \right\}, & \mu = 0, \quad \varkappa \in (0, 1). \end{cases} \quad (55)$$

Простая причина этого состоит в том, что общим решением уравнения $\hat{b}^+(\mu, w)\chi(x) = \check{a}(\mu, w)\chi(x) = 0$ является $\chi(x) = c\phi(\mu, w; x)$, а функция $\phi(\mu, w; x)$ (29) квадратично-интегрируема на $\mathbb{R}_+$ только при $\mu = 0$ и $\varkappa \in (0, 1)$ (см. (32) и (34)).

При $\varkappa \in (0, 1)$ область определения $D_{b^+(\mu, w)}$ оператора $\hat{b}^+(\mu, w)$ с $\mu \in [0, \pi/2)$ может быть представлена как прямая сумма вида

$$D_{b^+(\mu, w)} = \{D\chi_0(\mu, w; x)\} + \tilde{D}_{b^+(\mu, w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (56)$$

где функция $\chi_0(\mu, w; x)$, принадлежащая $D_{b^+(\mu, w)}$, дается формулой

$$\chi_0(\mu, w; x) = \phi(\mu, w; x)\zeta(x), \quad \text{так что} \quad \check{a}(\mu, w)\chi_0(\mu, w; x) = \phi(\mu, w; x)\zeta'(x),$$

$\zeta(x)$ – фиксированная гладкая функция с компактным носителем, равная единице в некоторой окрестности нуля, а $\tilde{D}_{b^+(\mu, w)}$ – подпространство функций, принадлежащих $D_{b^+(\mu, w)}$ и обращающихся в нуль в нуле:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{b^+(\mu, w)} &= \{\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)} : \chi(x) = O(x^{1/2}), x \rightarrow 0\}, \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \in (0, 1). \end{aligned} \quad (57)$$

В. Оператор $\bar{a}(\mu, w)$ вычисляется в соответствии с формулой (41): как сужение $\hat{b}^+(\mu, w)$ этот оператор ассоциирован с $\check{a}(\mu, w)$, и его область определения принадлежит $D_{b^+(\mu, w)}$ или совпадает с ней, а определяющее уравнение для $\bar{a}(\mu, w)$ как оператора $(\hat{a}^+(\mu, w))^+$,

$$(\chi, \hat{a}^+(\mu, w)\psi) - (\bar{a}(\mu, w)\chi, \psi) = 0, \quad \chi(x) \in D_{\bar{a}(\mu, w)}, \quad \psi(x) \in D_{a^+(\mu, w)},$$

сводится к уравнению для $D_{\bar{a}(\mu, w)}$, т. е. для функций $\chi(x) \in D_{\bar{a}(\mu, w)} \subseteq D_{b^+(\mu, w)}$, вида

$$\begin{aligned} (\chi, \check{b}(\mu, w)\psi) - (\check{a}(\mu, w)\chi, \psi) &= 0, \quad \chi(x) \in D_{\bar{a}(\mu, w)} \subseteq D_{b^+(\mu, w)}, \\ \psi(x) &\in D_{a^+(\mu, w)}. \end{aligned} \quad (58)$$

Интегрируя по частям в интегральном выражении для $(\check{a}(\mu, w)\chi, \psi)$ с учетом оценок (46), (47) и (53), (54), находим, что при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \geq 1$ и при $\mu = \pi/2$ и любых $\varkappa > 0$ уравнение (58) удовлетворяется тождественно для всех $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$, а при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \in (0, 1)$ оно сводится к уравнению

$$\overline{D}C = 0 \quad \forall C,$$

откуда следует, что $D = 0$.

Окончательно получаем, что

$$\bar{a}(\mu, w) = \hat{b}^+(\mu, w), \quad D_{\bar{a}(\mu, w)} = D_{b^+(\mu, w)}, \quad \forall \mu, \quad \varkappa \geq 1 \quad \text{или} \quad \mu = \frac{\pi}{2}, \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (59)$$

где $D_{b^+(\mu, w)}$ дается формулой (49), и

$$\bar{a}(\mu, w) \subset \hat{b}^+(\mu, w), \quad D_{\bar{a}(\mu, w)} = \tilde{D}_{b^+(\mu, w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (60)$$

где $\tilde{D}_{b^+(\mu, w)}$ дается формулой (57), откуда, в частности, следует, что при $\varkappa \in (0, 1)$ асимптотика в нуле функций, принадлежащих области определения любого оператора $\bar{a}(\mu, w)$, оценивается как $O(x^{1/2})$,

$$D_{\bar{a}(\mu, w)} \ni \chi(x) = O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad \forall \mu, \quad w > w_0, \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (61)$$

при $\mu = \pi/2$ это следует из (59) и (53), а при $\mu \in [0, \pi/2)$ – из (60) и (57).

Ядро любого оператора $\bar{a}(\mu, w)$ тривиально,

$$\ker \bar{a}(\mu, w) = \{0\} \quad \forall \mu, \quad w > w_0, \quad \varkappa > 0, \quad (62)$$

при $\varkappa \geq 1$ и при $\mu = \pi/2$, $\varkappa \in (0, 1)$ это следует из (59) и (55), а при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \in (0, 1)$ – из того, что общим решением уравнения $\bar{a}(\mu, w)\chi(x) = \check{a}(\mu, w)\chi(x) = 0$ является $\chi(x) = c\phi(\mu, w; x)$, но функция $\phi(\mu, w; x)$ ведет себя в нуле как $O(x^{1/2-\varkappa})$ (см. (32)), поэтому не может принадлежать $D_{\bar{a}(\mu, w)}$ согласно (61) (кроме того, $\phi(\mu, w; x)$ с $\mu \in (0, \pi/2)$ не является квадратично-интегрируемой на $\mathbb{R}_+$, см. (34)).

Г. Совершенно аналогично находим, что

$$\bar{b}(\mu, w) = \hat{a}^+(\mu, w), \quad D_{\bar{b}(\mu, w)} = D_{\hat{a}^+(\mu, w)} \quad \forall \mu, \quad \varkappa \geq 1 \quad \text{и} \quad \mu = \frac{\pi}{2}, \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (63)$$

где $D_{\hat{a}^+}(\mu, w)$ дается формулой (42), и

$$\bar{\tilde{b}}(\mu, w) \subset \hat{a}^+(\mu, w), \quad D_{\bar{\tilde{b}}(\mu, w)} = \tilde{D}_{\hat{a}^+(\mu, w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (64)$$

где $\tilde{D}_{\hat{a}^+}(\mu, w)$ дается формулой (48), откуда, в частности, следует, что при $\varkappa \in (0, 1)$ асимптотика в нуле функций, принадлежащих области определения любого оператора $\bar{\tilde{b}}(\mu, w)$ с $\mu \in [0, \pi/2)$, оценивается как $O(x^{1/2})$,

$$D_{\bar{\tilde{b}}(\mu, w)} \ni \psi(x) = O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad w \in (w_0, \infty), \quad \varkappa \in (0, 1). \quad (65)$$

Заметим, что равенство (63) и включение (64) получаются из предыдущих равенства (59) и включения (60) соответственно эрмитовым сопряжением, и только область определения $D_{\bar{\tilde{b}}(\mu, w)}$ требует вычисления в последнем случае.

Легко доказать, что для каждой пары исходных операторов $\hat{a}(\mu, w)$, $\hat{b}(\mu, w)$ не существует других пар замкнутых взаимно сопряженных операторов, которые являются их расширениями. Действительно, пусть $\hat{g}$, $\hat{g}^+$ – такая пара, тогда, поскольку $\bar{a}(\mu, w)$ и $\bar{\tilde{b}}(\mu, w)$ являются минимальными замкнутыми расширениями операторов $\hat{a}(\mu, w)$ и $\hat{b}(\mu, w)$ соответственно, справедливы включения

$$\hat{a}(\mu, w) \subset \bar{a}(\mu, w) \subseteq \hat{g} = \bar{\hat{g}} = (\hat{g}^+)^+, \quad \hat{b}(\mu, w) \subset \bar{\tilde{b}}(\mu, w) \subseteq \hat{g}^+.$$

Эрмитово сопряжение этих включений дает новые включения

$$\hat{g}^+ \subseteq \hat{a}^+(\mu, w), \quad \hat{g} \subseteq \hat{b}^+(\mu, w),$$

и мы окончательно получаем, что

$$\bar{a}(\mu, w) \subseteq \hat{g} \subseteq \hat{b}^+(\mu, w),$$

в частности

$$D_{\bar{a}(\mu, w)} \subseteq D_{\hat{g}} \subseteq D_{\hat{b}^+(\mu, w)}.$$

Тогда из (59) сразу же следует, что $\hat{g} = \bar{a}(\mu, w) = \hat{b}^+(\mu, w)$, и поэтому $\hat{g}^+ = \bar{\tilde{b}}(\mu, w) = \hat{a}^+(\mu, w)$ при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \geq 1$ и при $\mu = \pi/2$ и любых $\varkappa > 0$, а при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \in (0, 1)$ из (60), (56) следует, что области определения $D_{\hat{b}^+(\mu, w)}$ и $D_{\bar{a}(\mu, w)} = \tilde{D}_{\hat{b}^+(\mu, w)}$

отличаются одномерным подпространством, так что или $\hat{g} = \bar{\hat{a}}(\mu, w)$, и поэтому $\hat{g}^+ = \hat{a}^+(\mu, w)$, или $\hat{g} = \hat{b}^+(\mu, w)$, и поэтому $\hat{g}^+ = \bar{\hat{b}}(\mu, w)$.

Таким образом, показано, что каждая пара $\check{a}(\mu, w)$, $\check{b}(\mu, w)$, $\mu \in [0, \pi/2]$, $w \in (w_0, \infty)$, $w_0 = -(1 + \varkappa)/2$, $\varkappa > 0$, взаимно сопряженных по Лагранжу дифференциальных операций (30), обеспечивающих обобщенное осцилляторное представление (31) с $w \in (w_0, \infty)$ для $\check{H}$ (1) с $g_1 > -1/4$ и $g_2 > 0$, порождает единственную пару $\bar{\hat{a}}(\mu, w) = \hat{b}^+(\mu, w)$, $\hat{a}^+(\mu, w) = \bar{\hat{b}}(\mu, w)$ замкнутых взаимно сопряженных операторов при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \geq 1$ и при $\mu = \pi/2$ и любых $\varkappa > 0$, а при $\mu \in [0, \pi/2)$, $\varkappa \in (0, 1)$ каждая пара $\check{a}(\mu, w)$, $\check{b}(\mu, w)$ порождает две разные пары $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$, $\hat{a}^+(\mu, w)$ и $\hat{b}^+(\mu, w)$, $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ замкнутых взаимно сопряженных операторов, таких что $\bar{\hat{a}}(\mu, w) \subset \hat{b}^+(\mu, w)$ и $\bar{\hat{b}}(\mu, w) \subset \hat{a}^+(\mu, w)$. Операторы $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ и $\hat{b}^+(\mu, w)$ являются расширениями начальных операторов $\hat{a}(\mu, w)$, они ассоциированы с $\check{a}(\mu, w)$, и их области определения даются формулами (59), (60) и (49) соответственно. Операторы $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ и $\hat{a}^+(\mu, w)$ являются расширениями начальных операторов $\hat{b}(\mu, w)$, они ассоциированы с $\check{b}(\mu, w)$, и их области определения даются формулами (63), (64) и (42) соответственно.

2.3. Область $g_1 > -1/4$ ($\varkappa > 0$), $w = w_0 = -(1 + \varkappa)/2$ ($\alpha = 0$). Рассмотрение для этой области параметров следует стандартной схеме, изложенной в п. 2.2, в которой $w > w_0$. Отличительной чертой данного случая является то, что здесь мы имеем дело только с одной парой дифференциальных операций $\check{a}(u)$ и $\check{b}(u)$, обеспечивающих обобщенное осцилляторное представление (6) с $u = u_0 = 4v^2w_0$ для $\check{H}$ (1) с $g_1 > -1/4$ и $g_2 > 0$.

2.3.1. *Обобщенное осцилляторное представление для $\check{H}$, дифференциальные операции $\check{a}$ и $\check{b}$.* В этой области параметров общее решение дифференциального уравнения (9) с $u = u_0 = 4v^2w_0$ дается формулой (28). Функция $\Psi(\beta, \rho)$, определяемая формулой (25), монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞ , когда $\rho = (vx)^2$ вместе с x изменяется от 0 до ∞ . Отсюда следует, что уравнение (9) при этих значениях параметров имеет единственное, с точностью до постоянного положительного множителя, вещественнозначное положительное решение

$$\phi(w_0; x) = e^{-\rho/2} \rho^{1/4 + \varkappa/2}, \quad \rho = (vx)^2, \quad (66)$$

а это значит (см. текст после формулы (11)), что в этом случае мы имеем единственную (с точностью до несущественного фазового фактора) пару взаимно сопряженных дифференциальных операций первого порядка $\check{a}(w_0)$ и $\check{b}(w_0)$, определяемых формулой (11) с очевидными подстановками $\check{a}(u) \rightarrow \check{a}(w_0)$, $\check{b}(u) \rightarrow \check{b}(w_0)$, $h(u; x) \rightarrow h(w_0; x)$ и $\phi(u; x) \rightarrow \phi(w_0; x)$:

$$\begin{aligned} \check{a}(w_0) &= \phi(w_0; x) d_x \frac{1}{\phi(w_0; x)} = \check{b}^*(w_0), \\ \check{b}(w_0) &= -\frac{1}{\phi(w_0; x)} d_x \phi(w_0; x) = \check{a}^*(w_0), \quad \varkappa > 0, \end{aligned} \quad (67)$$

и обеспечивающих единственное обобщенное осцилляторное представление (6) с $u = 4v^2w_0$ для обобщенной дифференциальной операции Калоджеро $\check{H}$ (1) с $g_1 > -1/4$ и $g_2 > 0$:

$$\check{H} = -d_x^2 + g_1 x^{-2} + g_2 x^2 = \check{b}(w_0) \check{a}(w_0) - 4v^2 w_0, \quad \varkappa > 0. \quad (68)$$

Асимптотическое поведение функций $\phi(w_0; x)$ и $1/\phi(w_0; x)$ в нуле и на бесконечности очевидно из (66).

Отметим, что все результаты настоящего подраздела могут быть получены из соответствующих результатов п. 2.2 при $\mu = \pi/2$ предельным переходом $w \rightarrow w_0$.

2.3.2. *Начальные операторы $\hat{a}$ и $\hat{b}$.* Следуя п. 2.2.2, вводим пару начальных дифференциальных операторов $\hat{a}(w_0)$ и $\hat{b}(w_0)$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, ассоциированных с дифференциальными операциями $\check{a}(w_0)$ и $\check{b}(w_0)$ (67) соответственно и определенных на подпространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ гладких функций с компактным носителем, $D_{a(w_0)} = D_{b(w_0)} = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Для них справедливо соотношение

$$(\psi, \hat{a}(w_0)\xi) = (\hat{b}(w_0)\psi, \xi), \quad \psi(x), \xi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+). \quad (69)$$

Представление (68) для $\check{H}$ обеспечивает представление

$$\hat{H} = \hat{b}(w_0)\hat{a}(w_0) - 4v^2w_0\hat{I}, \quad \varkappa > 0 \quad (70)$$

для начального симметрического оператора $\hat{H}$, ассоциированного с $\check{H}$ и определенного на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, которое, в частности, подтверждает, что оператор $\hat{H}$ с $g_1 > -1/4$, $g_2 > 0$ ограничен снизу величиной $-4v^2w_0 = 2v^2(1 + \varkappa)$,

$$(\xi, \hat{H}\xi) = (\hat{a}(w_0)\xi, \hat{a}(w_0)\xi) - 4v^2w_0(\xi, \xi) \geq 2v^2(1 + \varkappa)(\xi, \xi), \quad \xi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+).$$

Это представление является основой для построения, быть может, новых самосопряженных обобщенных гамильтонианов Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ как самосопряженных расширений оператора $\hat{H}$ (70) в обобщенной осцилляторной форме (7) или (8) посредством построения всех возможных расширений пары начальных операторов $\hat{a}(w_0)$, $\hat{b}(w_0)$ до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{c}(w_0)$, $\hat{c}^+(w_0)$, $\hat{a}(w_0) \subset \hat{c}(w_0)$, $\hat{b}(w_0) \subset \hat{c}^+(w_0)$, начиная с замыкания $\tilde{\hat{a}}(w_0)$ оператора $\hat{a}(w_0)$, или до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{d}(w_0)$, $\hat{d}^+(w_0)$, $\hat{a}(w_0) \subset \hat{d}^+(w_0)$, $\hat{b}(w_0) \subset \hat{d}(w_0)$, начиная с замыкания $\tilde{\hat{b}}(w_0)$ оператора $\hat{b}(w_0)$.

2.3.3. *Сопряженные операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{b}^+$, замкнутые операторы $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$.* В полной аналогии с рассуждениями п. 2.2.3, 2.2.4 устанавливается, что замыкания $\bar{\hat{a}}(w_0)$ и $\bar{\hat{b}}(w_0)$ операторов $\hat{a}(w_0)$ и $\hat{b}(w_0)$, так же как и сопряженные последним операторы $\hat{a}^+(w_0)$ и $\hat{b}^+(w_0)$, существуют и справедливы цепочки включений

$$\begin{aligned} \hat{a}(w_0) \subset \bar{\hat{a}}(w_0) &= (\hat{a}^+(w_0))^+ \subseteq \hat{b}^+(w_0), \\ \hat{b}(w_0) \subset \bar{\hat{b}}(w_0) &= (\hat{b}^+(w_0))^+ \subseteq \hat{a}^+(w_0). \end{aligned} \quad (71)$$

Операторы $\bar{\hat{a}}(w_0)$ и $\hat{b}^+(w_0)$ ассоциированы с $\check{a}(w_0)$, а операторы $\bar{\hat{b}}(w_0)$ и $\hat{a}^+(w_0)$ — с $\check{b}(w_0)$, так что для точного определения этих операторов достаточно вычислить их области определения, следуя методу из п. 2.2.4.

2.3.4. *Области определения операторов $\hat{a}^+$, $\hat{b}^+$, $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$.*

А. Область определения оператора $\hat{a}^+(w_0)$ есть естественная область для $\check{b}(w_0)$, которая определяется копией формулы (42) с заменой $\check{b}(\mu, w) \rightarrow \check{b}(w_0)$:

$$\begin{aligned} D_{a^+(w_0)} &= D_{\bar{\hat{b}}(w_0)}^n = \left\{ \psi(x) : \psi \text{ а. н. в } \mathbb{R}_+; \right. \\ &\quad \left. \psi(x), \check{b}(w_0)\psi(x) = -\frac{1}{\phi(w_0; x)} \frac{d}{dx}(\phi(w_0; x)\psi(x)) = \eta(x) \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}. \end{aligned} \quad (72)$$

Отсюда по аналогии с рассуждениями пункта А в п. 2.2.4 следует, что произвольная функция $\psi(x)$ из $D_{a^+(w_0)}$ допускает представления

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\frac{1}{\phi(w_0; x)} \int_0^x dy \phi(w_0; y) \eta(y) = \frac{1}{\phi(w_0, x)} \int_x^\infty dy \phi(w_0; y) \eta(y), \\ \eta(x) &= \check{b}_{(w_0)} \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad \int_0^\infty dy \phi(w_0; y) \eta(y) = 0.\end{aligned}\quad (73)$$

Последнее равенство означает, что область значений $R_{a^+(w_0)}$ оператора $\hat{a}^+(w_0)$ ортогональна одномерному подпространству $\{c\phi(w_0; x)\} \subset L^2(\mathbb{R}_+)$, $R_{a^+(w_0)} \perp \{c\phi(w_0; x)\}$, и поэтому ее замыкание $\bar{R}_{a^+(w_0)}$ не может совпадать с $L^2(\mathbb{R}_+)$, откуда следует, что ядро сопряженного оператора $(\hat{a}^+(w_0))^+ = \bar{\hat{a}}(w_0)$ нетривиально, $\{c\phi(w_0; x)\} \subseteq \ker \bar{\hat{a}}(w_0) \neq \{0\}$ (см. ниже).

Оценивая интегральные члены в (73) с помощью неравенства Коши–Буняковского, получаем, что асимптотики функций $\psi(x) \in D_{a^+(w_0)}$ в нуле и на бесконечности имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}\psi(x) &= O(x^{1/2}), & x \rightarrow 0, \\ \psi(x) &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty, \quad \varkappa > 0.\end{aligned}\quad (74)$$

Б. Область определения $D_{b^+(w_0)}$ оператора $\hat{b}^+(w_0)$ есть естественная область для $\check{a}(w_0)$, которая определяется копией формулы (49) с заменой $\check{a}(\mu, w) \rightarrow \check{a}(w_0)$:

$$\begin{aligned}D_{b^+(w_0)} &= D_{\check{a}(w_0)}^n = \left\{ \chi(x) : \chi \text{ а. н. в } \mathbb{R}_+; \right. \\ &\quad \left. \chi(x), \check{a}(w_0)\chi(x) = \phi(w_0; x) d_x \left(\frac{1}{\phi(w_0; x)} \chi(x) \right) = \eta(x) \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\},\end{aligned}\quad (75)$$

откуда следует, что произвольная функция $\chi(x) \in D_{b^+(w_0)}$ допускает представление

$$\chi(x) = \phi(w_0; x) \left[D + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{\phi(w_0; y)} \eta(y) \right], \quad \eta(x) = \check{b}(w_0) \chi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad (76)$$

где $x_0 \in (0, \infty)$, D произвольно. Ее асимптотики в нуле и на бесконечности, оцениваемые с помощью неравенства Коши–Буняковского, имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}\chi(x) &= O(x^{1/2}), & x \rightarrow 0, \\ \chi(x) &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty, \quad \varkappa > 0.\end{aligned}\quad (77)$$

Как следует из (76) с $\eta(x) = 0$ и (66), ядро оператора $\hat{b}^+(w_0)$ нетривиально,

$$\ker \hat{b}^+(w_0) = \{c(\phi(w_0; x) = (vx)^{1/2+\varkappa} e^{-(vx)^2/2})\}, \quad \varkappa > 0.$$

В. Область определения $D_{\bar{a}(w_0)}$ оператора $\bar{\hat{a}}(w_0)$ мы вычисляем в соответствии с формулой (71), опираясь на рассуждения, аналогичные рассуждениям в пункте В в п. 2.2.4: определяющее уравнение для $\bar{\hat{a}}(w_0)$ как оператора $(\hat{a}^+)^+(w_0)$, являющегося сужением оператора $\hat{b}^+(w_0)$, сводится к уравнению для $D_{\bar{a}(w_0)} \subseteq D_{b^+(w_0)}$ вида

$$(\chi, \check{b}(w_0)\psi) - (\check{a}(w_0)\chi, \psi) = 0, \quad \chi(x) \in D_{\bar{a}(w_0)} \subseteq D_{b^+(w_0)}, \quad \psi(x) \in D_{a^+(w_0)}. \quad (78)$$

Интегрируя по частям в интегральном выражении для $(\check{a}(w_0)\chi, \psi)$ с учетом оценок (74) и (77), устанавливаем, что уравнение (78) удовлетворяется тождественно для всех $\chi(x) \in D_{b^+}(w_0)$, а это означает, что

$$\bar{\hat{a}}(w_0) = \hat{b}^+(w_0), \quad D_{\bar{\hat{a}}(w_0)} = D_{b^+(w_0)}, \quad \varkappa > 0, \quad (79)$$

где $D_{b^+}(w_0)$ дается формулой (75). В частности, асимптотика в нуле функций $\chi(x)$ из области определения оператора $\bar{\hat{a}}(w_0)$ дается копией формулы (77),

$$\chi(x) = O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad \varkappa > 0, \quad (80)$$

и

$$\ker \bar{\hat{a}}(w_0) = \{c(\phi(w_0; x) = (vx)^{1/2+\varkappa}e^{-(vx)^2/2})\}, \quad \varkappa > 0. \quad (81)$$

Г. Выполняя эрмитово сопряжение равенства (79), сразу же получаем, что

$$\bar{\hat{b}}(w_0) = \hat{a}^+(w_0), \quad D_{\bar{\hat{b}}(w_0)} = D_{a^+(w_0)}, \quad \varkappa > 0, \quad (82)$$

где $D_{a^+}(w_0)$ дается формулой (72).

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в конце п. 2.2.4, легко показать, что не существует других пар $\hat{g} = \bar{\hat{g}}$ и $\hat{g}^+$ замкнутых взаимно сопряженных операторов, которые являются расширениями операторов $\hat{a}(w_0)$ и $\hat{b}(w_0)$ соответственно, $\hat{a}(w_0) \subset \hat{g}$, $\hat{b}(w_0) \subset \hat{g}^+$.

Таким образом, показано, что пара $\check{a}(w_0), \check{b}(w_0)$ взаимно сопряженных по Лагранжу дифференциальных операций (67), обеспечивающих единственное обобщенное осцилляторное представление (68) для $\check{H}$ (1) с $g_1 > -1/4$, $g_2 > 0$, порождает единственную пару $\bar{\hat{a}}(w_0) = \hat{b}^+(w_0)$, $\hat{a}^+(w_0) = \bar{\hat{b}}(w_0)$ замкнутых взаимно сопряженных операторов. Оператор $\bar{\hat{a}}(w_0) = \hat{b}^+(\mu, w)$ является расширением начального оператора $\hat{a}(w_0)$, он ассоциирован с $\check{a}(w_0)$, и его область определения дается формулой (75). Оператор $\bar{\hat{b}}(w_0) = \hat{a}^+(w_0)$ является расширением начального оператора $\hat{b}(w_0)$, он ассоциирован с $\check{b}(w_0)$, и его область определения дается формулой (72).

2.4. Область $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$), $w > w_0 = -1/2$ ($\alpha > 0$). Рассмотрение для этой области параметров дословно следует схеме п. 2.2, мы даже не меняем обозначений, имея в виду, что в этом разделе $\varkappa = 0$, $\beta = 1$. Единственное различие заключается в специфической форме асимптотик в нуле вещественнозначных положительных функций ϕ_1 и ϕ_2 (27) с $\beta = 1$, образующих фундаментальную систему решений уравнения (9) с $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$).

2.4.1. Обобщенные осцилляторные представления для $\check{H}$, дифференциальные операции $\check{a}$ и $\check{b}$. Общее вещественнозначное положительное решение уравнения (9) с $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$) и $u = 4v^2w > -2v^2$, определяемое по модулю постоянного положительного фактора, имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(\mu, w; x) &= e^{-\rho/2} \rho^{1/4} [\Phi(\alpha, 1; \rho) \sin \mu + \Gamma(\alpha) \Psi(\alpha, 1; \rho) \cos \mu], \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \alpha = \frac{1}{2} + w > 0, \quad \rho = (vx)^2, \end{aligned} \quad (83)$$

где $\Phi(\alpha, 1; \rho)$ и $\Psi(\alpha, 1; \rho)$ даются соответственно формулами (16) с $\beta = 1$ и (18).

Это означает, что в данном случае мы имеем двухпараметрическое семейство $\{\check{a}(\mu, w), \check{b}(\mu, w); \mu \in [0, \pi/2], w \in (-1/2, \infty)\}$ различных пар взаимно сопряженных дифференциальных операций первого порядка $\check{a}(\mu, w)$ и $\check{b}(\mu, w)$, определяемых копией формул (30) с $\phi(\mu, w; x)$ (83) вместо $\phi(\mu, w; x)$ (29) и обеспечивающих двухпараметрическое семейство различных обобщенных осцилляторных представлений обобщенных дифференциальных операций Калоджеро $\check{H}$ (1) с $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$,

$$\check{H} = -d_x^2 - \frac{1}{4}x^{-2} + g_2x^2 = \check{b}(\mu, w)\check{a}(\mu, w) - 4v^2w, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right), \quad (84)$$

которые являются копиями формул (31) с $\varkappa = 0$. Согласно (21), (22) и (23), (24) асимптотики функций $\phi(\mu, w; x)$ (83) и $1/\phi(\mu, w; x)$ в нуле имеют вид

$$\phi(\mu, w; x) = \begin{cases} \tilde{A}(vx)^{1/2} + \tilde{B}(vx)^{1/2} \ln(vx) + O(x^{5/2} \ln x), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ (vx)^{1/2} + O(x^{5/2}), & \mu = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \quad (85)$$

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\mu, w) = \sin \mu + \cos \mu (2\psi(1) - \psi(\alpha)), \quad \alpha = \frac{1}{2} + w > 0,$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}(\mu, w) = -2 \cos \mu,$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, и

$$\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{B}(\mu, w)} \frac{(vx)^{-1/2}}{\ln(vx)} \frac{1}{1 + (\tilde{A}/\tilde{B})/\ln(vx)} + \\ + O(x^{3/2}/\ln x), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ (vx)^{-1/2} + O(x^{3/2}), & \mu = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \quad (86)$$

а их асимптотики на бесконечности имеют вид

$$\phi(\mu, w; x) = \begin{cases} \sin \mu \frac{1}{\Gamma(1/2 + w)} (vx)^{-1/2+2w} \times \\ \times e^{(vx)^2/2} (1 + O(x^{-2})), & \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \Gamma(1/2 + w) (vx)^{-1/2-2w} e^{-(vx)^2/2} \times \\ \times (1 + O(x^{-2})), & \mu = 0, \end{cases} \quad x \rightarrow \infty, \quad (87)$$

и

$$\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} = \begin{cases} \frac{\Gamma(1/2 + w)}{\sin \mu} (vx)^{1/2-2w} e^{-(vx)^2/2} \times \\ \times (1 + O(x^{-2})), & \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{1}{\Gamma(1/2 + w)} (vx)^{1/2+2w} e^{(vx)^2/2} \times \\ \times (1 + O(x^{-2})), & \mu = 0, \end{cases} \quad x \rightarrow \infty. \quad (88)$$

2.4.2. *Начальные операторы $\hat{a}$ и $\hat{b}$.* В полной аналогии с п. 2.2.2 вводим пары $\hat{a}(\mu, w)$, $\hat{b}(\mu, w)$ начальных дифференциальных операторов, определенных на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ и ассоциированных с соответствующими парами дифференциальных операций $\check{a}(\mu, w)$, $\check{b}(\mu, w)$. Для этих операторов справедливо соотношение, которое является копией соотношения (36). Как следствие представлений (84), начальный симметрический оператор $\hat{H}$, определенный на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ и ассоциированный с $\check{H}$, может быть представлен в виде

$$\hat{H} = \hat{b}(\mu, w)\hat{a}(\mu, w) - 4v^2w\hat{I}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w > -\frac{1}{2}, \quad (89)$$

откуда, в частности, следует, что оператор $\hat{H}$ с $g = -1/4$, $g_2 > 0$ ограничен снизу величиной $2v^2$.

Представления (89) являются основой для построения самосопряженных обобщенных гамильтонианов Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ с $g = -1/4$, $g_2 > 0$ как самосопряженных расширений операторов $\hat{H}$ в обобщенной осцилляторной форме, копирующей (38) или (39), путем построения всех возможных расширений каждой пары $\hat{a}(\mu, w)$, $\hat{b}(\mu, w)$ начальных операторов до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{c}(\mu, w)$, $\hat{c}^+(\mu, w)$, начиная с пары $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$, $\hat{a}^+(\mu, w)$ – замыкания $\hat{a}(\mu, w)$ и сопряженного ему оператора, или до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{d}(\mu, w)$, $\hat{d}^+(\mu, w)$, начиная с пары $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$, $\hat{b}^+(\mu, w)$ – замыкания $\hat{b}(\mu, w)$ и сопряженного ему оператора.

2.4.3. *Сопряженные операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{b}^+$, замкнутые операторы $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$.* Рассуждениями, аналогичными рассуждениям в п. 2.2.3, 2.2.4, устанавливается, что все эти операторы – замкнутые операторы $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$, $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ и сопряженные операторы $\hat{a}^+(\mu, w)$, $\hat{b}^+(\mu, w)$ – существуют и удовлетворяют цепочкам включений, которые являются копиями цепочек (41).

Операторы первой цепочки ассоциированы с $\check{a}(\mu, w)$, а операторы второй цепочки – с $\check{b}(\mu, w)$, и чтобы полностью описать эти операторы, достаточно вычислить их области определения, фактически повторяя рассуждения из п. 2.2.4.

2.4.4. *Области определения операторов $\hat{a}^+$, $\hat{b}^+$, $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$.* Содержание настоящего подраздела фактически повторяет содержание п. 2.2.4 в той части, которая относится к случаю $\varkappa \in (0, 1)$, с подстановкой $\phi(\mu, w; x)$ (83) ($\varkappa = 0$) вместо $\phi(\mu, w; x)$ (29) ($\varkappa \in (0, 1)$).

А. Область определения $D_{a^+(\mu, w)}$ оператора $\hat{a}^+(\mu, w)$ есть естественная область для $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$, которая определяется копией формулы (42). Произвольная функция $\psi(x)$ из $D_{a^+(\mu, w)}$ допускает представление

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \left[C - \int_0^x dy \phi(\mu, w; y) \eta(y) \right], \quad \eta(x) = \bar{\hat{b}}_{(\mu, w)} \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad (90)$$

где константа C зависит от значений μ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu = 0: \quad & C = \int_0^\infty dy \phi(\mu, w; y) \eta(y), \\ \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): \quad & C - \text{произвольная константа}, \\ \mu = \frac{\pi}{2}: \quad & C = 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Тонкость состоит в том, что при $\mu \in [0, \pi/2)$ константа C в (91) может принимать произвольные значения, но при $\mu \in (0, \pi/2)$ константа C не зависит от функции $\eta(x)$, в то время как при $\mu = 0$ она однозначно связана с η , так что представление (90), (91) с $\mu = 0$ для $\psi(x) \in D_{a^+(0,w)}$ эквивалентно представлению

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(0, w; x)} \int_x^\infty dy \phi(0, w; y) \eta(y), \quad \eta(x) = \check{b}_{(0,w)} \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad \mu = 0. \quad (92)$$

Используя оценки (85)–(88) и неравенства Коши–Буняковского для интегральных членов в (90) и (92), можно получить асимптотики функций $\psi(x) \in D_{a^+(\mu,w)}$ в нуле и на бесконечности, они имеют соответственно вид

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{\tilde{B}(\mu, w)} \frac{(vx)^{-1/2}}{\ln(vx)} [1 + O(1/\ln x)] + O(x^{1/2}), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ O(x^{1/2}), & \mu = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \quad (93)$$

и

$$\psi(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall \mu. \quad (94)$$

Область определения $D_{a^+(\mu,w)}$ оператора $\hat{a}^+(\mu, w)$ с $\mu \in [0, \pi/2)$ может быть представлена как прямая сумма вида

$$D_{a^+(\mu,w)} = \{C\psi_0(\mu, w; x)\} + \tilde{D}_{a^+(\mu,w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

где функция $\psi_0(\mu, w; x)$, принадлежащая $D_{a^+(\mu,w)}$, дается формулой

$$\psi_0(\mu, w; x) = \frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \zeta(x), \quad \check{b}(\mu, w) \psi_0(\mu, w; x) = -\frac{1}{\phi(\mu, w; x)} \zeta'(x), \quad (95)$$

$\zeta(x)$ – фиксированная гладкая функция с компактным носителем, равная единице в некоторой окрестности нуля, а $\tilde{D}_{a^+(\mu,w)}$ – подпространство функций, принадлежащих $D_{a^+(\mu,w)}$ и обращающихся в нуль в нуле:

$$\tilde{D}_{a^+(\mu,w)} = \left\{ \psi(x) \in D_{a^+(\mu,w)} : \psi(x) = O(x^{1/2}), x \rightarrow 0 \right\}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (96)$$

Б. Область определения $D_{b^+(\mu,w)}$ оператора $\hat{b}^+(\mu, w)$ есть естественная область для $\check{a}(\mu, w)$, которая определяется копией формулы (49). Произвольная функция $\chi(x)$ из $D_{b^+(\mu,w)}$ допускает представление

$$\chi(x) = \phi(\mu, w; x) \left[D + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{\phi(\mu, w; y)} \eta(y) \right], \quad (97)$$

$$\eta(x) = \check{a}(\mu, w; x) \chi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

где точка x_0 и константа D зависят от значений μ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu = 0: \quad & x_0 = 0, \quad D - \text{произвольная константа,} \\ \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): \quad & x_0 = 0, \quad D = - \int_0^\infty dy \frac{1}{\phi(\mu, w; y)} \eta(y), \\ \mu = \frac{\pi}{2}: \quad & x_0 \in (0, \infty), \quad D = - \int_{x_0}^\infty dy \frac{1}{\phi(\pi/2, w; y)} \eta(y). \end{aligned} \quad (98)$$

Тонкость состоит в том, что константа D может принимать произвольные значения, но при $\mu = 0$ константа D не зависит от функции $\eta(x)$, в то время как при $\mu \in (0, \pi/2]$ она однозначно связана с η , так что представление (97), (98) для $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$ с $\mu \in (0, \pi/2]$ эквивалентно представлению

$$\begin{aligned}\chi(x) &= -\phi(\mu, w; x) \int_x^\infty dy \frac{1}{\phi(\mu, w; y)} \eta(y), \\ \eta(x) &= \check{a}_{(\mu, w)} \chi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}\quad (99)$$

Используя оценки (85)–(88) и неравенства Коши–Буняковского для интегральных членов в (97) и (99), находим, что асимптотики функций $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$ в нуле и на бесконечности имеют вид

$$\chi(x) = \begin{cases} D\tilde{B}(\mu, w)(vx)^{1/2} \ln(vx) \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right] + \\ + O(x^{1/2} \ln^{1/2} x), & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ O(x^{1/2} \ln^{1/2} x), & \mu = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \quad (100)$$

и

$$\chi(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall \mu. \quad (101)$$

Как следует из (97), (98), ядро оператора $\hat{b}^+(\mu, w)$ нетривиально только при $\mu = 0$:

$$\ker \hat{b}^+(\mu, w) = \begin{cases} \{0\}, & \mu \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \{c(\phi(0, w; x) = e^{-(vx)^2/2} (vx)^{1/2} \times \\ \times \Gamma(\alpha) \Psi(\alpha, 1; (vx)^2))\}, & \mu = 0. \end{cases} \quad (102)$$

Простая причина этого состоит в том, что общее решение уравнения $\hat{b}^+(\mu, w)\chi(x) = \check{a}(\mu, w)\chi(x) = 0$ имеет вид $\chi(x) = c\phi(\mu, w; x)$, а функция $\phi(\mu, w; x)$ (83) квадратично-интегрируема на $\mathbb{R}_+$ только при $\mu = 0$ (см. (85), (87)).

Область определения $D_{b^+(\mu, w)}$ оператора $\hat{b}^+(\mu, w)$ с $\mu \in [0, \pi/2)$ может быть представлена как прямая сумма вида

$$D_{b^+(\mu, w)} = \{D\chi_0(\mu, w)(x)\} + \tilde{D}_{b^+(\mu, w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

где функция $\chi_0(\mu, w; x)$, принадлежащая $D_{b^+(\mu, w)}$, дается формулой

$$\chi_0(\mu, w; x) = \phi(\mu, w; x)\zeta(x), \quad \check{a}(\mu, w)\chi_0(\mu, w; x) = \phi(\mu, w; x)\zeta'(x),$$

$\zeta(x)$ – фиксированная гладкая функция с компактным носителем, равная единице в некоторой окрестности нуля, а $\tilde{D}_{b^+(\mu, w)}$ – подпространство функций, принадлежащих $D_{b^+(\mu, w)}$ и обращающихся в нуль в нуле как $O(x^{1/2} \ln^{1/2} x)$:

$$\tilde{D}_{b^+(\mu, w)} = \{\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)} : \chi(x) = O(x^{1/2} \ln^{1/2} x), \quad x \rightarrow 0\}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (103)$$

В. Область определения $D_{\bar{a}(\mu, w)}$ оператора $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ вычисляется в соответствии с копией формулы (41): определяющее уравнение для $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ как оператора $(\hat{a}^+(\mu, w))^+$,

который является сужением $\hat{b}^+(\mu, w)$, сводится к уравнению для $D_{\bar{a}(\mu, w)} \subseteq D_{b^+(\mu, w)}$ вида

$$\begin{aligned} (\chi, \check{b}(\mu, w)\psi) - (\check{a}(\mu, w)\chi, \psi) &= 0, \\ \chi(x) \in D_{\bar{a}(\mu, w)} \subseteq D_{b^+(\mu, w)}, \quad \forall \psi(x) \in D_{a^+(\mu, w)}. \end{aligned} \quad (104)$$

Интегрируя по частям в интегральном выражении для $(\check{a}(\mu, w)\chi, \psi)$ с учетом оценок (93), (94) и (100), (101), находим, что при $\mu = \pi/2$ уравнение (104) удовлетворяется тождественно для всех $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$, а при $\mu \in [0, \pi/2)$ оно сводится к уравнению

$$\overline{D}C = 0 \quad \forall C,$$

откуда следует, что $D = 0$.

Окончательно получаем, что

$$\bar{\hat{a}}\left(\frac{\pi}{2}, w\right) = \hat{b}^+\left(\frac{\pi}{2}, w\right), \quad D_{\bar{a}(\pi/2, w)} = D_{b^+(\pi/2, w)}, \quad (105)$$

где $D_{b^+(\pi/2, w)}$ дается копией формулы (49) с $\mu = \pi/2$, и

$$\bar{\hat{a}}(\mu, w) \subset \hat{b}^+(\mu, w), \quad D_{\bar{a}(\mu, w)} = \tilde{D}_{b^+(\mu, w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (106)$$

где $\tilde{D}_{b^+(\mu, w)}$ дается формулой (103), откуда, в частности, следует, что асимптотика в нуле функций, принадлежащих области определения любого оператора $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$, оценивается как $O(x^{1/2} \ln^{1/2} x)$,

$$D_{\bar{a}(\mu, w)} \ni \chi(x) = O(x^{1/2} \ln^{1/2} x), \quad x \rightarrow 0, \quad \forall \mu, \quad w > -\frac{1}{2}. \quad (107)$$

При $\mu = \pi/2$ это следует из (105) и (100), а при $\mu \in [0, \pi/2)$ – из (106) и (103).

Ядро любого оператора $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ тривиально,

$$\ker \bar{\hat{a}}(\mu, w) = \{0\} \quad \forall \mu, \quad \forall w > -\frac{1}{2}, \quad (108)$$

при $\mu = \pi/2$ это следует из (105) и (102), а при $\mu \in [0, \pi/2)$ – из того, что общее решение уравнения $\bar{\hat{a}}(\mu, w)\chi(x) = \check{a}(\mu, w)\chi(x) = 0$ имеет вид $\chi(x) = c\phi(\mu, w; x)$, но функция $\phi(\mu, w; x)$ ведет себя в нуле как $-2 \cos \mu (vx)^{1/2} \ln(vx) + O(x^{1/2})$ (см. (85)) и поэтому не может принадлежать $D_{\bar{a}(\mu, w)}$ (см. (107)), кроме того, функция $\phi(\mu, w; x)$ с $\mu \in (0, \pi/2)$ не является квадратично-интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ (см. (87)).

Г. Совершенно аналогично находим, что

$$\bar{\hat{b}}\left(\frac{\pi}{2}, w\right) = \hat{a}^+\left(\frac{\pi}{2}, w\right), \quad D_{\bar{b}(\pi/2, w)} = D_{a^+(\pi/2, w)}, \quad (109)$$

где $D_{a^+(\pi/2, w)}$ дается копией формулы (42) с $\mu = \pi/2$, и

$$\bar{\hat{b}}(\mu, w) \subset \hat{a}^+(\mu, w), \quad D_{\bar{b}(\mu, w)} = \tilde{D}_{a^+(\mu, w)}, \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (110)$$

где $\tilde{D}_{a^+(\mu, w)}$ дается формулой (96), откуда, в частности, следует, что асимптотическое поведение в нуле функций, принадлежащих области определения любого оператора $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$, оценивается как $O(x^{1/2})$,

$$D_{\bar{b}(\mu, w)} \ni \psi(x) = O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad \forall \mu, \quad w > -\frac{1}{2}, \quad (111)$$

для $\mu = \pi/2$ это следует из (109) и (93), а для $\mu \in [0, \pi/2)$ – из (110) и (96).

Заметим, что равенство (109) и включение (110) получаются из предыдущих равенства (105) и включения (106) соответственно эрмитовым сопряжением, и только область определения $D_{\tilde{b}(\mu, w)}$ требует вычисления в последнем случае.

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в конце п. 2.2.4, легко показать, что не существует других пар $\hat{g} = \tilde{g}$ и $\hat{g}^+$ замкнутых взаимно сопряженных операторов, которые являются расширениями операторов $\hat{a}(\mu, w)$ и $\hat{b}(\mu, w)$ соответственно, $\hat{a}(\mu, w) \subset \hat{g}$, $\hat{b}(\mu, w) \subset \hat{g}^+$.

Таким образом, мы показали, что каждая пара $\check{a}(\mu, w)$, $\check{b}(\mu, w)$, $\mu \in [0, \pi/2]$, $w \in (-1/2, \infty)$, взаимно сопряженных по Лагранжу дифференциальных операций, определяемых копией формулы (30) с $\phi(\mu, w; x)$ (83) и обеспечивающих двухпараметрическое семейство различных обобщенных осцилляторных представлений (89) для обобщенных дифференциальных операций Калоджеро $\check{H}$ (1) с $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$, порождает единственную пару $\bar{\hat{a}}(\pi/2, w) = \hat{b}^+(\pi/2, w)$, $\hat{a}^+(\pi/2, w) = \bar{\hat{b}}(\pi/2, w)$ замкнутых взаимно сопряженных операторов при $\mu = \pi/2$, в то время как при $\mu \in [0, \pi/2)$ каждая пара $\check{a}(\mu, w)$, $\check{b}(\mu, w)$ порождает две разные пары $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$, $\hat{a}^+(\mu, w)$ и $\hat{b}^+(\mu, w)$, $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ замкнутых взаимно сопряженных операторов, таких что $\bar{\hat{a}}(\mu, w) \subset \hat{b}^+(\mu, w)$ и $\bar{\hat{b}}(\mu, w) \subset \hat{a}^+(\mu, w)$. Операторы $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ и $\hat{b}^+(\mu, w)$ являются расширениями начального оператора $\hat{a}(\mu, w)$, они ассоциированы с $\check{a}(\mu, w)$, и их области определения даются соответственно формулами (105), (106) и копией формулы (49). Операторы $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ и $\hat{a}^+(\mu, w)$ являются расширениями начального оператора $\hat{b}(\mu, w)$, они ассоциированы с $\check{b}(\mu, w)$, и их области определения даются соответственно формулами (109), (110) и копией формулы (42).

2.5. Область $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$), $w = w_0 = -1/2$ ($\alpha = 0$). По своему содержанию настоящий подраздел полностью аналогичен п. 2.3, и все нижеследующие результаты могут быть получены из результатов п. 2.3 предельным переходом $\varkappa \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow 1$). Мы даже не меняем обозначений, имея в виду, что здесь $\varkappa = 0$ ($\beta = 1$). С другой стороны, все результаты настоящего подраздела могут быть получены из результатов п. 2.4, относящихся к случаю $\mu = \pi/2$, предельным переходом $w \rightarrow w_0 = -1/2$.

2.5.1. Обобщенное осцилляторное представление для $\check{H}$, дифференциальные операции $\check{a}$ и $\check{b}$. При этих значениях параметров общее решение дифференциального уравнения (9) с $u = u_0 = 4v^2 w_0 = -2v^2$ дается формулой (28) с $\varkappa = 0$, $\beta = 1$. Функция $\Psi(1, \rho)$, определяемая формулой (25) с $\beta = 1$, монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞ , когда $\rho = (vx)^2$ вместе с x изменяется от 0 до ∞ . Отсюда следует, что уравнение (9) с этими значениями параметров имеет единственное, с точностью до постоянного положительного множителя, вещественнозначное положительное решение

$$\phi(w_0; x) = e^{-\rho/2} \rho^{1/4}, \quad \rho = (vx)^2, \quad (112)$$

что есть копия (66) с $\varkappa = 0$. А это значит, что в рассматриваемом случае мы имеем единственную (с точностью до несущественного фазового фактора) пару взаимно сопряженных дифференциальных операций первого порядка $\check{a}(w_0)$ и $\check{b}(w_0)$, определяемых копией формулы (67) с $\phi(w_0; x)$ (112) вместо $\phi(w_0; x)$ (66) и обеспечивающих

единственное обобщенное осцилляторное представление (6) с $u = -2v^2$ для обобщенной дифференциальной операции Калоджеро $\check{H}$ (1) с $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$:

$$\check{H} = -d_x^2 - \frac{1}{4}x^{-2} + g_2x^2 = \check{b}(w_0)\check{a}(w_0) + 2v^2. \quad (113)$$

Это представление получается из (68) предельным переходом $g_1 \rightarrow -1/4$ ($\varkappa \rightarrow 0$). Таким образом, рассмотрения настоящего подраздела являются копией рассмотренных п. 2.3 с заменой $\phi(w_0; x)$ (66) на $\phi(w_0; x)$ (112).

Асимптотическое поведение функций $\phi(w_0; x)$ и $1/\phi(w_0; x)$ в нуле и на бесконечности очевидно из (112).

2.5.2. *Начальные операторы $\hat{a}$ и $\hat{b}$.* В полной аналогии с п. 2.3.2 вводим пару $\hat{a}(w_0)$, $\hat{b}(w_0)$ начальных дифференциальных операторов в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определенных на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ и ассоциированных с соответствующей парой дифференциальных операций $\check{a}(w_0)$, $\check{b}(w_0)$. Эти операторы удовлетворяют соотношению, которое является копией соотношения (69). Представление (113) для $\check{H}$ обеспечивает представление

$$\hat{H} = \hat{b}(w_0)\hat{a}(w_0) + 2v^2\hat{I} \quad (114)$$

для начального симметрического оператора $\hat{H}$, ассоциированного с $\check{H}$ и определенного на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, которое, в частности, подтверждает, что $\hat{H}$ с $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$ ограничен снизу величиной $2v^2$.

Представление (114) является основой построения, возможно новых, самосопряженных обобщенных гамильтонианов Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ с $g = -1/4$, $g_2 > 0$ как самосопряженных расширений оператора $\hat{H}$ (114) в обобщенной осцилляторной форме (7) или (8) посредством построения всех возможных расширений пар начальных операторов $\hat{a}(w_0)$, $\hat{b}(w_0)$ до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{c}(w_0)$, $\hat{c}^+(w_0)$, $\hat{a}(w_0) \subset \hat{c}(w_0)$, $\hat{b}(w_0) \subset \hat{c}^+(w_0)$, начиная с пары $\bar{\hat{a}}(w_0)$, $\hat{a}^+(w_0)$, или до пары замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{d}(w_0)$, $\hat{d}^+(w_0)$, $\hat{a}(w_0) \subset \hat{d}^+(w_0)$, $\hat{b}(w_0) \subset \hat{d}(w_0)$, начиная с пары $\bar{\hat{b}}(w_0)$, $\hat{b}^+(w_0)$.

2.5.3. *Сопряженные операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{b}^+$, замкнутые операторы $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$.* По аналогии с рассуждениями в п. 2.2.3, 2.2.4 устанавливаем, что замыкания $\bar{\hat{a}}(w_0)$ и $\bar{\hat{b}}(w_0)$ соответствующих операторов $\hat{a}(w_0)$ и $\hat{b}(w_0)$, так же как и сопряженные последним операторы $\hat{a}^+(w_0)$ и $\hat{b}^+(w_0)$, существуют и удовлетворяют цепочкам включений, которые являются копиями цепочек (71). Операторы $\bar{\hat{a}}(w_0)$ и $\bar{\hat{b}}(w_0)$ ассоциированы с $\check{a}(w_0)$, а операторы $\bar{\hat{b}}(w_0)$ и $\hat{a}^+(w_0)$ ассоциированы с $\check{b}(w_0)$, так что для полного описания этих операторов достаточно вычислить их области определения, фактически повторяя содержание п. 2.3.4 с заменой $\phi(w_0; x)$ (66) на $\phi(w_0; x)$ (112).

2.5.4. *Области определения операторов $\hat{a}^+$, $\hat{b}^+$, $\bar{\hat{a}}$ и $\bar{\hat{b}}$.*

А. Область определения оператора $\hat{a}^+(w_0)$ есть естественная область для $\check{b}(w_0)$, которая дается копией формулы (72). Произвольная функция $\psi(x)$, принадлежащая $D_{a^+(w_0)}$, допускает представления

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{\phi(w_0, x)} \int_0^x dy \phi(w_0, y) \eta(y) = \frac{1}{\phi(w_0, x)} \int_x^\infty dy \phi(w_0, y) \eta(y), \\ \eta(x) &= \check{b}(w_0) \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad \int_0^\infty dy \phi(w_0, y) \eta(y) = 0. \end{aligned} \quad (115)$$

Последнее равенство означает, что область значений $R_{a^+(w_0)}$ оператора $\hat{a}^+(w_0)$ ортогональна одномерному подпространству $\{c\phi(w_0; x)\} \subset L^2(\mathbb{R}_+)$, $R_{a^+(w_0)} \perp \{c\phi(w_0; x)\}$, и поэтому ее замыкание $\overline{R_{a^+(w_0)}}$ не может совпадать со всем пространством $L^2(\mathbb{R}_+)$, откуда следует, что ядро сопряженного оператора $(\hat{a}^+(w_0))^+ = \tilde{a}(w_0)$ нетривиально, $\{c\phi(w_0; x)\} \subseteq \ker \tilde{a}(w_0) \neq \{0\}$ (см. ниже).

Оценивая интегральные члены в (115) с помощью неравенства Коши–Буняковского, находим, что асимптотики функций $\psi(x) \in D_{a^+(w_0)}$ в нуле и на бесконечности имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= O(x^{1/2}), & x \rightarrow 0, \\ \psi(x) &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (116)$$

Б. Область определения $D_{b^+(w_0)}$ оператора $\hat{b}^+(w_0)$ есть естественная область для $\check{a}(w_0)$, которая дается копией формулы (75). Произвольная функция $\chi(x)$, принадлежащая $D_{b^+(w_0)}$, допускает представление

$$\chi(x) = \phi(w_0, x) \left[D + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{\phi(w_0, y)} \eta(y) \right], \quad \eta(x) = \check{b}(w_0) \chi(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad (117)$$

где $x_0 \in (0, \infty)$, а D – произвольная константа. Ее асимптотики в нуле и на бесконечности, оцениваемые с помощью неравенства Коши–Буняковского, имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \chi(x) &= O(x^{1/2} \ln^{1/2} x), & x \rightarrow 0, \\ \chi(x) &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (118)$$

Как следует из формул (117) с $\eta(x) = 0$ и (112), ядро оператора $\hat{b}^+(w_0)$ нетривиально,

$$\ker \hat{b}^+(w_0) = \{c(\phi(w_0; x) = (vx)^{1/2} e^{-(vx)^2/2})\}. \quad (119)$$

В. Область определения $D_{\bar{a}(w_0)}$ оператора $\bar{a}(w_0)$ вычисляется в соответствии с копией формулы (71): определяющее уравнение для оператора $\bar{a}(w_0)$ как $(\hat{a}^+(w_0))^+$, который является сужением оператора $\hat{b}^+(w_0)$, сводится к уравнению для $D_{\bar{a}(w_0)} \subseteq D_{b^+(w_0)}$ вида

$$(\chi, \check{b}(w_0)\psi) - (\check{a}(w_0)\chi, \psi) = 0, \quad \chi(x) \in D_{\bar{a}(w_0)} \subseteq D_{b^+(w_0)}, \quad \psi(x) \in D_{a^+(w_0)}. \quad (120)$$

Интегрируя по частям в интегральном выражении для $(\check{a}(w_0)\chi, \psi)$ и используя оценки (116) и (118), находим, что уравнение (120) выполняется тождественно для всех $\chi(x) \in D_{b^+(w_0)}$, откуда следует, что

$$\bar{a}(w_0) = \hat{b}^+(w_0), \quad D_{\bar{a}(w_0)} = D_{b^+(w_0)}, \quad (121)$$

где $D_{b^+(w_0)}$ дается копией формулы (75). В частности, асимптотическое поведение в нуле функций $\chi(x)$, принадлежащих области определения оператора $\bar{a}(w_0)$, дается формулой (118), и

$$\ker \bar{a}(w_0) = \{c(\phi(w_0; x) = (vx)^{1/2} e^{-(vx)^2/2})\}. \quad (122)$$

Г. Эрмитовым сопряжением равенства (121) сразу же получаем, что

$$\bar{b}(w_0) = \hat{a}^+(w_0), \quad D_{\bar{b}(w_0)} = D_{a^+(w_0)}, \quad (123)$$

где $D_{a^+}(w_0)$ дается копией формулы (72).

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в конце п. 2.2.4, легко показать, что не существует других пар замкнутых взаимно сопряженных операторов $\hat{g} = \bar{\hat{g}}$ и $\hat{g}^+$, которые являются расширениями соответственно $\hat{a}(w_0)$ и $\hat{b}(w_0)$, $\hat{a}(w_0) \subset \hat{g}$, $\hat{b}(w_0) \subset \hat{g}^+$.

Таким образом, мы показали, что пара $\check{a}(w_0)$, $\check{b}(w_0)$ взаимно сопряженных по Лагранжу дифференциальных операций, определяемых копией формулы (67) с $\phi(w_0; x)$ (112) и обеспечивающих единственное обобщенное осцилляторное представление (113) для $\check{H}$ (1) с $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$, порождает единственную пару замкнутых взаимно сопряженных операторов $\bar{\hat{a}}(w_0) = \hat{b}^+(w_0)$, $\hat{a}^+(w_0) = \bar{\hat{b}}(w_0)$. Оператор $\bar{\hat{a}}(w_0) = \hat{b}^+(w_0)$ является расширением начального оператора $\hat{a}(w_0)$, он ассоциирован с $\check{a}(w_0)$, и его область определения дается копией формулы (75). Оператор $\bar{\hat{b}}(w_0) = \hat{a}^+(w_0)$ является расширением начального оператора $\hat{b}(w_0)$, он ассоциирован с $\check{b}(w_0)$, и его область определения дается копией формулы (72).

2.6. Подведение итогов. Окончательным результатом настоящего раздела является утверждение, что для каждой пары констант связи $g_1 \geq -1/4$, $g_2 > 0$ мы имеем два двухпараметрических семейства обобщенных гамильтонианов Калоджеро в обобщенной осцилляторной форме, семейство $\{\hat{H}_{\epsilon a}\}$ гамильтонианов

$$\hat{H}_{\epsilon a} = \begin{cases} \hat{H}_{\epsilon a(\mu, w)} = \hat{a}^+(\mu, w) \bar{\hat{a}}(\mu, w) - 4v^2 w \hat{I}, & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty), \\ \hat{H}_{\epsilon a(w_0)} = \hat{a}^+(w_0) \bar{\hat{a}}(w_0) - 4v^2 w_0 \hat{I}, \end{cases} \quad (124)$$

$$v = \sqrt[4]{g_2} > 0, \quad w_0 = -\frac{1}{2}(1 + \varkappa), \quad \varkappa = \sqrt{1/4 + g_1} \geq 0,$$

где операторы $\hat{a}^+(\mu, w)$ и $\bar{\hat{a}}(\mu, w)$ описаны соответственно в пунктах А и В в п. 2.2.4 для случая $g_1 > -1/4$ ($\varkappa > 0$) и в п. 2.4.4 для случая $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$), а операторы $\hat{a}^+(w_0)$ и $\bar{\hat{a}}(w_0)$ описаны соответственно в пунктах А и В в п. 2.3.4 для случая $g_1 > -1/4$ ($\varkappa > 0$) и в п. 2.5.4 для случая $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$), и семейство $\{\hat{H}_{\epsilon b}\}$ гамильтонианов

$$\hat{H}_{\epsilon b} = \begin{cases} \hat{H}_{\epsilon b(\mu, w)} = \bar{\hat{b}}(\mu, w) \hat{b}^+(\mu, w) - 4v^2 w \hat{I}, & \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty), \\ \hat{H}_{\epsilon b(w_0)} = \bar{\hat{b}}(w_0) \hat{b}^+(w_0) - 4v^2 w_0 \hat{I}, \end{cases} \quad (125)$$

где операторы $\hat{b}^+(\mu, w)$ и $\bar{\hat{b}}(\mu, w)$ описаны соответственно в пунктах Б и Г в п. 2.2.4 для случая $g_1 > -1/4$ ($\varkappa > 0$) и в п. 2.4.4 для случая $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$), а операторы $\hat{b}^+(w_0)$ и $\bar{\hat{b}}(w_0)$ описаны соответственно в пунктах Б и Г в п. 2.3.4 для случая $g_1 > -1/4$ ($\varkappa > 0$) и в п. 2.5.4 для случая $g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$).

Для некоторых значений констант связи эти семейства перекрываются. В частности, гамильтонианы $\hat{H}_{\epsilon a(\mu, w)}$ и $\hat{H}_{\epsilon b(\mu, w)}$ при $g_1 \geq 3/4$ совпадают (см. (59) и (63)). То же самое справедливо для гамильтонианов $\hat{H}_{\epsilon a(w_0)}$ и $\hat{H}_{\epsilon b(w_0)}$ при любых $g_1 \geq -1/4$ (см. (79), (82) и (121), (123)), так что $\{\hat{H}_{\epsilon a}\} = \{\hat{H}_{\epsilon b}\}$ при $g_1 \geq 3/4$ и, кроме того, $\hat{H}_{\epsilon a(w_0)} = \hat{H}_{\epsilon b(w_0)}$ при $g_1 \in [-1/4, 3/4]$.

3. ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВСЕХ ГАМИЛЬТониАНОВ С $G_1 \geq -1/4$, $G_2 > 0$

3.1. Предварительные комментарии. В заключение, не боясь повториться, мы даем здесь полный ответ на поставленный в разделе 1 вопрос о существовании обобщенных осцилляторных представлений (7) или (эквивалентно) (8) для всех обобщенных гамильтонианов Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$, ассоциированных с обобщенной дифференциальной операцией Калоджеро $\hat{H}$ (1) с любыми константами связи $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^2$.

Ответ на этот вопрос существенно различен для разных областей в плоскости $\mathbb{R}^2$ констант связи, именно: для открытых полуплоскостей $\{g_1 < -1/4\}$ и $\{g_2 < 0\}$ (эти области пересекаются вдоль открытого квадранта $\{g_1 < -1/4, g_2 < 0\}$) и для квадранта $\{g_1 \geq -1/4, g_2 \geq 0\}$.

Как уже упоминалось в начале раздела 1 и в п. 2.1, любой обобщенный гамильтониан Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ с константами связи, лежащими в полуплоскости $\{g_1 < -1/4\}$ или в полуплоскости $\{g_2 < 0\}$, не допускает обобщенного осцилляторного представления, поскольку такое представление означало бы, что $\hat{H}_\epsilon$ ограничен снизу, тогда как любой обобщенный гамильтониан Калоджеро с такими константами связи не ограничен снизу [2]. Этот вывод находится в полном согласии с тем, что согласно п. 2.1 не существует обобщенного осцилляторного представления (6) для обобщенной дифференциальной операции Калоджеро $\hat{H}$ (1) с $g_1 < -1/4$ или с $g_2 < 0$.

Что касается квадранта $\{g_1 \geq -1/4, g_2 \geq 0\}$, напомним, что, как было показано в [1], любой гамильтониан Калоджеро¹¹⁾ $\hat{H}_\epsilon$ с константами связи, лежащими на горизонтальной граничной полуоси $\{g_1 \geq -1/4, g_2 = 0\}$ этого квадранта, допускает обобщенное осцилляторное представление, более того, он допускает одно- или двухпараметрическое семейство таких представлений. Таким образом, остается рассмотреть только полуоткрытый квадрант $\{g_1 \geq -1/4, g_2 > 0\}$. Следуя рассуждениям в конце раздела 1, мы покажем ниже, что любой обобщенный гамильтониан Калоджеро $\hat{H}_\epsilon$ с константами связи, лежащими в этом квадранте, также допускает семейство обобщенных осцилляторных представлений, однопараметрическое или двухпараметрическое. Для полноты мы повторим расширенную версию этих рассуждений.

Гипотеза состоит в том, что два семейства (124) и (125) обобщенных гамильтонианов Калоджеро в обобщенной осцилляторной форме покрывают все множество известных обобщенных гамильтонианов Калоджеро с константами связи, лежащими в полуоткрытом квадранте $\{g_1 \geq -1/4, g_2 > 0\}$ (см. [2]). Именно, каждый обобщенный гамильтониан Калоджеро с данными $g_1 \geq -1/4$, $g_2 > 0$ может быть идентифицирован с одним или более членами семейства (124) или семейства (125). Это отождествление тривиально в случае $g_1 \in [3/4, \infty)$ (полуоткрытый квадрант $\{g_1 \geq 3/4, g_2 > 0\}$), когда имеется единственный обобщенный гамильтониан Калоджеро $\hat{H}_1$ с данными g_1, g_2 , так что в этом случае как $\{\hat{H}_{\epsilon a}\}$, так и $\{\hat{H}_{\epsilon b}\}$ сводятся к одноточечному множеству, $\{\hat{H}_{\epsilon a}\} = \{\hat{H}_{\epsilon b}\} = \hat{H}_1$. В случае $g_1 \in [-1/4, 3/4)$ ($\epsilon \in [0, 1)$) (полуоткрытая полоса $\{-1/4 \leq g_1 < 3/4, g_2 > 0\}$) процедура идентификации усложняется. Согласно [2] для каждой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих в открытой полосе $\{-1/4 < g_1 < 3/4, g_2 > 0\}$, существует однопарамет-

¹¹⁾ Напомним, что мы традиционно опускаем термин “обобщенный” для гамильтонианов Калоджеро с $g_2 = 0$.

рическое семейство $\{\hat{H}_{2,\nu}, \nu \in [-\pi/2, \pi/2], \nu = -\pi/2 \sim \nu = \pi/2\}$ обобщенных гамильтонианов Калоджеро, различающихся своими областями определения $D_{H_{2,\nu}}$, тогда как для каждой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих на граничной открытой полуоси $\{g = -1/4, g_2 > 0\}$, существует однопараметрическое семейство $\{\hat{H}_{3,\nu}, \nu \in [-\pi/2, \pi/2], \nu = -\pi/2 \sim \nu = \pi/2\}$ обобщенных гамильтонианов Калоджеро¹²⁾, различающихся своими областями определения $D_{H_{3,\nu}}$. Области определения $D_{H_{2,\nu}}$ и $D_{H_{3,\nu}}$ являются подпространствами естественных областей D_H^g для соответствующих $\hat{H}$, именно подпространствами, которые задаются различными самосопряженными асимптотическими граничными условиями в нуле соответственно вида

$$D_{H_{2,\nu}} \ni \chi(x) = c[(vx)^{1/2+\kappa} \sin \nu + (vx)^{1/2-\kappa} \cos \nu] + O(x^{3/2}), \quad (126)$$

$$x \rightarrow 0, \quad \kappa \in (0, 1),$$

и

$$D_{H_{3,\nu}} \ni \chi(x) = c[(vx)^{1/2} \sin \nu + 2(vx)^{1/2} \ln(vx) \cos \nu] + O(x^{3/2}), \quad (127)$$

$$x \rightarrow 0, \quad \kappa = 0.$$

Соответственно, отождествление данного $\hat{H}_{2,\nu}$ с некоторым $\hat{H}_{\epsilon a}$ или $\hat{H}_{\epsilon b}$ идет через вычисление асимптотического поведения в нуле функций из области определения $\hat{H}_{\epsilon a}$ или $\hat{H}_{\epsilon b}$ и его отождествления с асимптотическими граничными условиями для определенного $\hat{H}_{2,\nu}$; то же справедливо для $\hat{H}_{3,\nu}$. Может случиться, и это действительно происходит, что $\hat{H}_{\epsilon a(\mu,w)}$ или $\hat{H}_{\epsilon b(\mu,w)}$ с разными μ, w имеют одинаковое асимптотическое поведение функций из их областей определения и тем самым определяют один и тот же гамильтониан.

Асимптотические граничные условия для гамильтонианов с $g_1 \in (-1/4, 3/4)$ и с $g_1 = -1/4$ сильно различаются по виду, что вынуждает нас рассматривать отдельно открытую полосу $\{-1/4 < g_1 < 3/4, g_2 > 0\}$ и вертикальную открытую граничную полуось $\{g_1 = -1/4, g_2 > 0\}$, как это уже делалось в разделе 2.

Начнем с подробного изучения семейства гамильтонианов $\{\hat{H}_{\epsilon a}\}$ (124).

3.2. Семейство $\{\hat{H}_{\epsilon a}\}$.

3.2.1. Квадрант $\{g_1 \geq 3/4 (\kappa \geq 1), g_2 > 0\}$. Согласно [2] для любой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих в этом квадранте, существует единственный самосопряженный гамильтониан Калоджеро $\hat{H}_1$, определенный на естественной области D_H^g . Отсюда следует, что гамильтониан $\hat{H}_1$ с данными $g_1 \geq 3/4, g_2 > 0$ должен быть отождествлен со всем семейством $\{\hat{H}_{\epsilon a}\}$ с теми же g_1, g_2 , $\{\hat{H}_{\epsilon a}\} = \hat{H}_1$, что обеспечивает наличие двух типов обобщенных осцилляторных представлений для этого гамильтониана:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{\epsilon a(\mu,w)} = \hat{a}^+(\mu, w) \bar{\hat{a}}(\mu, w) - 4v^2 w \hat{I}, \quad (128)$$

$$\mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty), \quad w_0 = -\frac{1}{2}(1 + \kappa), \quad \kappa \geq 1,$$

и

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{\epsilon a(w_0)} = \hat{a}^+(w_0) \bar{\hat{a}}(w_0) + 2v^2(1 + \kappa), \quad \kappa \geq 1. \quad (129)$$

¹²⁾ Мы слегка изменили обозначения по сравнению с [2]: параметр расширения ν , входящий в индекс гамильтониана $\hat{H}_{3,\nu}$, обозначался в [2] буквой ϑ , так что $\hat{H}_{3,\nu}$ здесь совпадает с $\hat{H}_{3,\vartheta}$ из [2].

Формула (128) фактически дает двухпараметрическое семейство обобщенных осцилляторных представлений для единственного обобщенного гамильтониана Калоджеро $\hat{H}_1$ с данными константами связи $g_1 \geq 3/4$, $g_2 > 0$. Согласно (62) ядро любого оператора $\hat{a}(\mu, w)$ тривиально. Это означает, что любое из представлений (128) не является оптимальным в том смысле, что оно не позволяет определить основное состояние гамильтониана $\hat{H}_1$ и его энергию; мы можем только сказать, что спектр $\hat{H}_1$ ограничен снизу величиной $2v^2(1 + \varkappa)$.

В отличие от представления (128), представление (129) является оптимальным: ядро $\ker \hat{a}(w_0)$ нетривиально, оно дается формулой (81), а это означает, что $\ker \hat{a}(w_0)$ есть одномерное пространство основного состояния гамильтониана $\hat{H}_1$, и энергия этого состояния E_0 , которая есть нижняя граница спектра $\hat{H}_1$, дается формулой

$$E_0^{(1)} = 2v^2(1 + \varkappa), \quad \varkappa \geq 1. \quad (130)$$

Нормированное основное состояние $U^{(1)}(x)$ гамильтониана $\hat{H}_1$ имеет вид

$$U^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2v}{\Gamma(1 + \varkappa)}} (vx)^{1/2 + \varkappa} e^{-(vx)^2/2}, \quad \varkappa \geq 1. \quad (131)$$

3.2.2. Полоса $\{-1/4 < g_1 < 3/4 \text{ } (0 < \varkappa < 1), g_2 > 0\}$. Рассуждения здесь оказываются аналогичными рассуждениям в п. 3.2.1.

Согласно [2] для любой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих в этой полосе, существует однопараметрическое семейство $\{\hat{H}_{2,\nu}, \nu \in [-\pi/2, \pi/2], \nu = -\pi/2 \sim \nu = \pi/2\}$ обобщенных гамильтонианов Калоджеро $\hat{H}_{2,\nu}$, задаваемых самосопряженными асимптотическими граничными условиями (126) в нуле. Асимптотическое поведение в нуле функций из областей определения гамильтонианов $\hat{H}_{\epsilon a}$ (124) с константами связи g_1, g_2 , лежащими в этой полосе, оценивается следующим образом. По определению любого оператора $\hat{H}_{\epsilon a(\mu, w)}$ его область определения принадлежит области определения оператора $\hat{a}(\mu, w)$ или совпадает с ней, $D_{H_{\epsilon a(\mu, w)}} \subseteq D_{\bar{a}(\mu, w)}$; то же справедливо для оператора $\hat{H}_{\epsilon a(w_0)}$, $D_{H_{\epsilon a(w_0)}} \subseteq D_{\bar{a}(w_0)}$. Но согласно (61) и (80) асимптотическое поведение функций $\chi(x)$, принадлежащих соответственно $D_{\bar{a}(\mu, w)}$ и $D_{\bar{a}(w_0)}$, оценивается как $\chi(x) = O(x^{1/2})$, а это означает, что функции, принадлежащие $D_{H_{\epsilon a(\mu, w)}}$, $\forall \mu, w \in (w_0, \infty)$, и $D_{H_{\epsilon a(w_0)}}$, стремятся к нулю не слабее, чем $x^{1/2}$, при $x \rightarrow 0$. Сравнение этой оценки с формулой (126) показывает, что существует только один самосопряженный обобщенный гамильтониан Калоджеро с таким асимптотическим поведением функций из его области определения, а именно $\hat{H}_{2, \pm\pi/2}$. Отсюда следует, что гамильтониан $\hat{H}_{2, \pm\pi/2}$ с данными константами связи $g_1 \in (-1/4, 3/4)$, $g_2 > 0$ должен быть отождествлен со всем семейством $\{\hat{H}_{\epsilon a}\}$ с теми же g_1, g_2 , $\{\hat{H}_{\epsilon a}\} = \hat{H}_{2, \pm\pi/2}$, что обеспечивает два типа обобщенных осцилляторных представлений для этого гамильтониана:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2, \pm\pi/2} &= \hat{H}_{\epsilon a(\mu, w)} = \hat{a}^+(\mu, w) \bar{a}(\mu, w) - 4v^2 w \hat{I}, \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty), \quad \varkappa \in (0, 1), \end{aligned} \quad (132)$$

и

$$\hat{H}_{2, \pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon a(w_0)} = \hat{a}^+(w_0) \bar{a}(w_0) + 2v^2(1 + \varkappa), \quad \varkappa \in (0, 1). \quad (133)$$

Эти представления – очевидные продолжения предыдущих представлений (128) и (129) на $\varkappa \in (0, 1)$, и комментарий к ним является продолжением предыдущего комментария: формула (132) фактически дает двухпараметрическое семейство различных обобщенных осцилляторных представлений для единственного обобщенного гамильтониана Калоджеро $\hat{H}_{2,\pm\pi/2}$ с данными константами связи $g_1 \in (-1, 4, 3/4)$, $g_2 > 0$, любое из представлений (132) не является оптимальным в силу (62), тогда как представление (133) является оптимальным в силу (81), энергия $E_0^{(2)}(\pm\pi/2)$ основного состояния гамильтониана $\hat{H}_{2,\pm\pi/2}$, которая есть нижняя граница его спектра, дается формулой

$$E_0^{(2)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 2v^2(1 + \varkappa), \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (134)$$

что является продолжением формулы (130) на $\varkappa \in (0, 1)$, а нормированное основное состояние $U_{\pm\pi/2}^{(2)}(x)$ гамильтониана $\hat{H}_{2,\pm\pi/2}$ имеет вид

$$U_{\pm\pi/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2v}{\Gamma(1 + \varkappa)}} (vx)^{1/2+\varkappa} e^{-(vx)^2/2}, \quad \varkappa \in (0, 1), \quad (135)$$

что является продолжением формулы (131) на $\varkappa \in (0, 1)$.

3.2.3. *Полуось* $\{g_1 = -1/4$ ($\varkappa = 0$), $g_2 > 0\}$. Рассуждения в этом случае ($\varkappa = 0$) полностью аналогичны рассуждениям в предыдущем случае $\varkappa \in (0, 1)$.

Согласно [2] для любой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих на этой полуоси, существует однопараметрическое семейство $\{\hat{H}_{3,\nu}, \nu \in [-\pi/2, \pi/2], \nu = -\pi/2 \sim \nu = \pi/2\}$ обобщенных гамильтонианов Калоджеро $\hat{H}_{3,\nu}$, задаваемых самосопряженными асимптотическими граничными условиями (127) в нуле. Асимптотическое поведение в нуле функций из областей определения гамильтонианов $\hat{H}_{\epsilon a}$ (124) с константами связи g_1, g_2 , лежащими в этой полосе, оценивается следующим образом. По определению любого оператора $\hat{H}_{\epsilon a}$ его область определения принадлежит области определения оператора $\bar{a}$ ($\bar{a}$ есть $\bar{a}(\mu, w)$ или $\bar{a}(w_0)$) или совпадает с ней, т. е. $D_{H_{\epsilon a}} \subseteq D_{\bar{a}}$. Но согласно (107) и (118) асимптотическое поведение функций $\chi(x)$, принадлежащих любой области $D_{\bar{a}}$, оценивается как $\chi(x) = O(x^{1/2} \ln^{1/2} x)$, а это означает, что функции, принадлежащие любой области $D_{H_{\epsilon a}}$, стремятся к нулю не слабее, чем $x^{1/2} \ln^{1/2} x$, при $x \rightarrow 0$. Сравнение этой оценки с (126) показывает, что существует только один самосопряженный обобщенный гамильтониан Калоджеро с таким асимптотическим поведением функций из его области определения, а именно $\hat{H}_{3,\pm\pi/2}$. Отсюда следует, что гамильтониан $\hat{H}_{3,\pm\pi/2}$ с данными константами связи $g_1 = -1/4, g_2 > 0$ должен быть отождествлен со всем семейством $\{\hat{H}_{\epsilon a}\}$ с теми же g_1, g_2 , $\{\hat{H}_{\epsilon a}\} = \hat{H}_{3,\pm\pi/2}$, что обеспечивает два типа обобщенных осцилляторных представлений для этого гамильтониана:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{3,\pm\pi/2} &= \hat{H}_{\epsilon a(\mu,w)} = \hat{a}^+(\mu, w) \bar{a}(\mu, w) - 4v^2 w \hat{I}, \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty), \quad w_0 = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (136)$$

и

$$\hat{H}_{3,\pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon a(w_0)} = \hat{a}^+(w_0) \bar{a}(w_0) + 2v^2. \quad (137)$$

Эти представления – очевидные продолжения предыдущих представлений (132) и (133) на $\varkappa = 0$, и комментарий к ним является продолжением предыдущего комментария: формула (136) фактически дает двухпараметрическое семейство различных обобщенных осцилляторных представлений для единственного обобщенного гамильтониана Калоджеро $\hat{H}_{3,\pm\pi/2}$ с данными константами связи $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$, любое из представлений (136) не является оптимальным в силу (108), тогда как представление (137) является оптимальным в силу (122), энергия $E_0^{(3)}(\pm\pi/2)$ основного состояния гамильтониана $\hat{H}_{3,\pm\pi/2}$, которая есть нижняя граница его спектра, дается формулой

$$E_0^{(3)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 2v^2, \quad (138)$$

что является продолжением формулы (134) на $\varkappa = 0$, а нормированное основное состояние $U_{\pm\pi/2}^{(3)}(x)$ гамильтониана $\hat{H}_{3,\pm\pi/2}$ дается формулой

$$U_{\pm\pi/2}^{(3)}(x) = \sqrt{2v}(vx)^{1/2}e^{-(vx)^2/2}, \quad (139)$$

что является продолжением формулы (135) на $\varkappa = 0$.

3.3. Семейство $\{\hat{H}_{\epsilon b}\}$.

3.3.1. *Квадрант* $\{g_1 \geq 3/4 \ (\varkappa \geq 1), \ g_2 > 0\}$. Для любой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих в этом квадранте, мы имеем тождества $\bar{b}(\mu, w) = \hat{a}^+(\mu, w)$, $\hat{b}^+(\mu, w) = \bar{a}(\mu, w)$ (см. соответственно (63) и (59)) и $\bar{b}(w_0) = \hat{a}^+(w_0)$, $\hat{b}^+(w_0) = \bar{a}(w_0)$ (см. соответственно (82) и (79)). Эти тождества и результат п. 3.2.1 приводят к тождествам $\{\hat{H}_{\epsilon b}\} = \{\hat{H}_{\epsilon a}\} = \hat{H}_1$ и обеспечивают эквивалентные формы обобщенных осцилляторных представлений для гамильтонианов $\hat{H}_1$, приведенных в п. 3.2.1:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \hat{H}_{\epsilon b(\mu, w)} = \bar{b}(\mu, w)\hat{b}^+(\mu, w) - 4v^2w\hat{I}, \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad w \in (w_0, \infty), \quad \varkappa \geq 1, \end{aligned}$$

что является эквивалентной формой известного двухпараметрического семейства неоптимальных обобщенных осцилляторных представлений (128) для гамильтониана $\hat{H}_1$, и

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{\epsilon b(w_0)} = \bar{b}(w_0)\hat{b}^+(w_0) + 2v^2(1 + \varkappa), \quad \varkappa \geq 1,$$

что является эквивалентной формой известного оптимального обобщенного осцилляторного представления (129) для $\hat{H}_1$. Конечно, комментарий, сопровождающий (129), остается справедливым, включая формулы (130) и (131).

Переходя к семейству гамильтонианов $\hat{H}_{\epsilon b}$ с константами связи g_1, g_2 , лежащими в открытой полосе $\{-1/4 < g_1 < 3/4, g_2 > 0\}$, мы должны, в силу (59), (63) и (79), (82), рассматривать случаи $\mu = \pi/2$, $w > w_0$ и $w = w_0$ отдельно от случая $\mu \in [0, \pi/2)$, $w > w_0$.

3.3.2. *Полоса* $\{-1/4 < g_1 < 3/4 \ (0 < \varkappa < 1), \ g_2 > 0\}$, случаи $\mu = \pi/2$, $w > w_0 = -(1 + \varkappa)/2$ и $w = w_0$. Рассуждения в настоящем подразделе полностью аналогичны рассуждениям в п. 3.3.1.

Для любой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих в этой полосе, и этих значений параметров μ, w мы имеем тождества $\hat{b}(\pi/2, w) = \hat{a}^+(\pi/2, w)$, $\hat{b}^+(\pi/2, w) = \hat{a}(\pi/2, w)$ (см. соответственно (63) и (59)) и $\hat{b}(w_0) = \hat{a}^+(w_0)$, $\hat{b}^+(w_0) = \hat{a}(w_0)$ (см. соответственно (82) и (79)). Эти тождества и результат п. 3.2.2 приводят к тождествам $\hat{H}_{\epsilon b(\pi/2, w)} = \hat{H}_{\epsilon a(\pi/2, w)} = \hat{H}_{2, \pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon a(w_0)} = \hat{H}_{\epsilon b(w_0)}$ и обеспечивают эквивалентные формы части обобщенных осцилляторных представлений для гамильтониана $\hat{H}_{2, \pm\pi/2}$, приведенных в п. 3.2.2:

$$\hat{H}_{2, \pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon b(\pi/2, w)} = \bar{b}\left(\frac{\pi}{2}, w\right)\hat{b}^+\left(\frac{\pi}{2}, w\right) - 4v^2w\hat{I}, \quad w \in (w_0, \infty), \quad \varkappa \in (0, 1),$$

что является эквивалентной формой однопараметрического семейства неоптимальных обобщенных осцилляторных представлений для гамильтониана $\hat{H}_{2, \pm\pi/2}$, которое является сужением известного двухпараметрического семейства представлений (132) на $\mu = \pi/2$, и

$$\hat{H}_{2, \pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon b(w_0)} = \bar{b}(w_0)\hat{b}^+(w_0) + 2v^2(1 + \varkappa), \quad \varkappa \in (0, 1),$$

что является эквивалентной формой известного оптимального обобщенного осцилляторного представления (133) для $\hat{H}_{2, \pm\pi/2}$. Конечно, комментарий, сопровождающий формулу (133), остается справедливым, включая формулы (134) и (135).

3.3.3. Полоса $\{-1/4 < g_1 < 3/4$ ($0 < \varkappa < 1$), $g_2 > 0\}$, случай $\mu \in [0, \pi/2)$, $w > w_0 = -(1 + \varkappa)/2$. В этом случае мы имеем дело только с операторами $\hat{H}_{\epsilon b(\mu, w)}$ и должны находить асимптотическое поведение в нуле функций из их областей определения.

Начнем с функций $\phi(\mu, w; x)$ (29) с указанными значениями параметров, а именно с представления их асимптотик в нуле (см. (32)) в новой форме:

$$\begin{aligned} \phi(\mu, w; x) &= c(\mu, w)[(vx)^{1/2+\varkappa} \sin \theta(\mu, w) + (vx)^{1/2-\varkappa} \cos \theta(\mu, w)] + \\ &\quad + O(x^{5/2-\varkappa}), \quad x \rightarrow 0, \\ \operatorname{tg} \theta(\mu, w) &= \operatorname{tg} \mu - \frac{\Gamma(1 - \varkappa)}{\Gamma(1 + \varkappa)} \frac{\Gamma((1 + \varkappa)/2 + w)}{\Gamma((1 - \varkappa)/2 + w)}, \quad \operatorname{tg} \mu \geq 0, \\ c(\mu, w) &= \frac{\cos \mu}{\cos \theta(\mu, w)}, \quad \theta(\mu, w) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad w \in (w_0, \infty), \quad \varkappa \in (0, 1). \end{aligned}$$

По определению оператора $\hat{H}_{\epsilon b(\mu, w)}$ его область определения $D_{H_{\epsilon b(\mu, w)}}$ состоит из функций $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$, таких что $\hat{b}^+(\mu, w)\chi(x) = \check{a}(\mu, w)\chi(x) = \eta(x) \in D_{\bar{b}(\mu, w)}$. Первое условие означает, что $\chi(x)$ допускает представление (50) с $x_0 = 0$ и, вообще говоря, $D \neq 0$ (см. (51)), тогда как второе условие означает, что $\eta(x) = O(x^{1/2})$, $x \rightarrow 0$ (см. (65)). Оценивая интегральный член в (50) с такой функцией $\eta(x)$, получаем, что асимптотическое поведение функций $\chi(x) \in D_{H_{\epsilon b(\mu, w)}}$, $\mu \in [0, \pi/2)$, $w \in (w_0, \infty)$, $\varkappa \in (0, 1)$, в нуле дается формулой

$$\chi(x) = c[(vx)^{1/2+\varkappa} \sin \theta(\mu, w) + (vx)^{1/2-\varkappa} \cos \theta(\mu, w)] + O(x^{3/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad (140)$$

где $c = Dc(\mu, w)$ произвольно. Сравнение (140) и (126) естественным образом отождествляет параметр ν в (126) с углом $\theta(\mu, w)$ в (140) и устанавливает, что гамильтониан $\hat{H}_{2,\nu}$ с данными константами связи $g_1 \in (-1/4, 3/4)$, $g_2 > 0$ и $\nu \in (-\pi/2, \pi/2)$ должен быть отождествлен со всеми теми гамильтонианами $\hat{H}_{b(\mu,w)}$ с теми же константами связи g_1, g_2 , для которых параметры μ и w связаны соотношением $\theta(\mu, w) = \nu$, т. е. $\{\hat{H}_{b(\mu,w)}, \theta(\mu, w) = \nu\} = \hat{H}_{2,\nu}$. Удобно выбрать μ в качестве независимого параметра, тогда w определяется из равенства $\operatorname{tg} \theta(\mu, w) = \operatorname{tg} \nu$, или соотношения

$$\frac{\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)} \frac{\Gamma((1+\kappa)/2 + w)}{\Gamma((1-\kappa)/2 + w)} = \operatorname{tg} \mu - \operatorname{tg} \nu, \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (141)$$

$$\mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \kappa \in (0, 1),$$

которое рассматривается как уравнение относительно w при дополнительном условии $w > w_0$. Можно показать, что левая часть уравнения (141) как функция $w > w_0$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией¹³⁾, изменяющейся от $-\infty$ до ∞ , когда w меняется от $w_0 + 0$ до ∞ . Отсюда следует, что уравнение (141) всегда имеет единственное решение $w = w(\mu, \nu)$ и $w(\mu, \nu)$ как функция μ монотонно возрастает от $w(0, \nu) > -(1+\kappa)/2$ до ∞ , когда μ меняется от 0 до $\pi/2 - 0$. Предыдущий результат тогда может быть записан в виде $\{\hat{H}_{b(\mu,w(\mu,\nu))}\} = \hat{H}_{2,\nu}$, что обеспечивает однопараметрическое семейство обобщенных осцилляторных представлений для гамильтониана $\hat{H}_{2,\nu}$ с данными константами связи $g_1 \in (-1/4, 3/4)$, $g_2 > 0$:

$$\hat{H}_{2,\nu} = \hat{H}_{\mathfrak{c}b(\mu,w(\mu,\nu))} = \bar{\hat{b}}(\mu, w(\mu, \nu)) \hat{b}^+(\mu, w(\mu, \nu)) - 4v^2 w(\mu, \nu) \hat{I}, \quad (142)$$

$$\nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \kappa \in (0, 1),$$

параметром является μ , а $w = w(\mu, \nu)$ есть решение уравнения (141).

Согласно (55) любое из представлений (142) с $\mu \in (0, \pi/2)$ не является оптимальным, мы можем лишь сказать, что гамильтониан $\hat{H}_{2,\nu}$ ограничен снизу величиной $-4v^2 w(0, \nu)$, тогда как представление с $\mu = 0$ является оптимальным, энергия $E_0^{(2)}(\nu)$ основного состояния гамильтониана $\hat{H}_{2,\nu}$, которая есть нижняя граница его спектра, дается формулой

$$E_0^{(2)}(\nu) = -4v^2 w(0, \nu), \quad \kappa \in (0, 1),$$

и нормированное основное состояние $U_\nu^{(2)}(x)$ гамильтониана $\hat{H}_{2,\nu}$ имеет вид

$$U_\nu^{(2)}(x) = Q_0(\nu) e^{-(vx)^2/2} (vx)^{1/2+\kappa} \Psi\left(\frac{1}{2}(1+\kappa) + w(0, \nu), 1+\kappa; (vx)^2\right), \quad \kappa \in (0, 1),$$

где $Q_0(\nu)$ – нормировочный множитель.

Энергия $E_0^{(2)}(\nu)$ основного состояния есть единственное решение уравнения

$$\frac{\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)} \frac{\Gamma((1+\kappa)/2 - E/4v^2)}{\Gamma((1-\kappa)/2 - E/4v^2)} = -\operatorname{tg} \nu, \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (143)$$

рассматриваемого как уравнение для E при дополнительном условии $E < 2v^2(1+\kappa)$. Мы не можем предъявить явное выражение для $E_0(\nu)$, за исключением случая

¹³⁾ Это фактически было показано в [2].

$E_0(0) = 2v^2(1 - \varkappa)$, но можем утверждать, что $E_0^{(2)}(\nu)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $2v^2(1 + \varkappa) - 0$, когда ν меняется от $-\pi/2 + 0$ до $\pi/2 - 0$. Заметим, что согласно [2] уравнение (143) определяет спектр гамильтониана $\hat{H}_{2,\nu}$, который является дискретным, $\text{спес } \hat{H}_{2,\nu} = \{E_n(\nu)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $E_{n+1}(\nu) > E_n(\nu)$, а условие $E < 2v^2(1 + \varkappa)$ выделяет минимальное собственное значение – энергию $E_0^{(2)}(\nu)$ основного состояния.

Остается рассмотреть гамильтонианы $\hat{H}_{\epsilon b}$ с константами связи g_1, g_2 , лежащими на открытой полуоси $\{g_1 = -1/4, g_2 > 0\}$. Согласно (105), (109) и (121), (123) мы должны рассматривать случаи $\mu = \pi/2$, $w > w_0 = -1/2$ и $w = w_0 = -1/2$ отдельно от случая $\mu \in [0, \pi/2)$, $w > w_0$.

3.3.4. Полуось $\{g_1 = -1/4 (\varkappa = 0), g_2 > 0\}$, случай $\mu = \pi/2$, $w > w_0 = -1/2$ и $w = w_0$. Рассуждения здесь полностью аналогичны рассуждениям в п. 3.3.2.

Для любой пары констант связи g_1, g_2 , лежащих на этой полуоси, и этих значений параметров μ, w мы имеем тождества $\hat{b}(\pi/2, w) = \hat{a}^+(\pi/2, w)$, $\hat{b}^+(\pi/2, w) = \bar{a}(\pi/2, w)$ (см. соответственно (109) и (105)) и $\bar{b}(w_0) = \hat{a}^+(w_0)$, $\hat{b}^+(w_0) = \bar{a}(w_0)$ (см. соответственно (123) и (121)). Эти тождества и результат п. 3.2.3 приводят к тождествам $\hat{H}_{\epsilon b(\pi/2, w)} = \hat{H}_{\epsilon a(\pi/2, w)} = \hat{H}_{3, \pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon a(w_0)} = \hat{H}_{\epsilon b(w_0)}$ и обеспечивают эквивалентные формы части обобщенных осцилляторных представлений для гамильтониана $\hat{H}_{3, \pm\pi/2}$, приведенных в п. 3.2.3:

$$\hat{H}_{3, \pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon b(\pi/2, w)} = \bar{b}\left(\frac{\pi}{2}, w\right)\hat{b}^+\left(\frac{\pi}{2}, w\right) - 4v^2w\hat{I}, \quad w \in (w_0, \infty),$$

что представляет собой эквивалентную форму однопараметрического семейства неоптимальных обобщенных осцилляторных представлений для гамильтониана $\hat{H}_{3, \pm\pi/2}$, параметром является w , которое есть сужение известного двухпараметрического семейства представлений (136) на $\mu = \pi/2$, и

$$\hat{H}_{3, \pm\pi/2} = \hat{H}_{\epsilon b(w_0)} = \bar{b}(w_0)\hat{b}^+(w_0) + 2v^2,$$

что представляет собой эквивалентную форму известного оптимального обобщенного осцилляторного представления (137) для $\hat{H}_{3, \pm\pi/2}$. Конечно, комментарий, сопровождающий формулу (137), остается справедливым, включая формулы (138) и (139).

3.3.5. Полуось $\{g_1 = -1/4 (\varkappa = 0), g_2 > 0\}$, случай $\mu \in [0, \pi/2)$, $w > w_0 = -1/2$. Рассуждения в этом случае полностью аналогичны рассуждениям в п. 3.3.3.

Начнем с функций $\phi(\mu, w; x)$ (83) с указанными значениями параметров, а именно с представления их асимптотик в нуле (см. (85)) в новой форме:

$$\phi(\mu, w; x) = c(\mu, w)[(vx)^{1/2} \sin \theta(\mu, w) + 2(vx)^{1/2} \ln(vx) \cos \theta(\mu, w)] + \\ + O(x^{5/2} \ln x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\text{tg } \theta(\mu, w) = \psi\left(\frac{1}{2} + w\right) - 2\psi(1) - \text{tg } \mu, \quad \text{tg } \mu \geq 0,$$

$$c(\mu, w) = -\frac{\cos \mu}{\cos \theta(\mu, w)}, \quad \theta(\mu, w) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad w \in (w_0, \infty), \quad w_0 = -\frac{1}{2}, \quad \varkappa = 0.$$

По определению оператора $\hat{H}_{\epsilon b(\mu, w)}$ его область определения $D_{H_{\epsilon b(\mu, w)}}$ состоит из функций $\chi(x) \in D_{b^+(\mu, w)}$, таких что $\hat{b}^+(\mu, w)\chi(x) = \hat{a}(\mu, w)\chi(x) = \eta(x) \in D_{\bar{b}(\mu, w)}$. Первое условие означает, что $\chi(x)$ допускает представление (97) с $x_0 = 0$ и, вообще говоря, $D \neq 0$ (см. (98)), в то время как второе условие означает, что $\eta(x) = O(x^{1/2})$, $x \rightarrow 0$ (см. (111)). Оценивая интегральный член в (97) с такой функцией $\eta(x)$, мы получаем, что асимптотическое поведение функций $\chi(x) \in D_{H_{\epsilon b(\mu, w)}}$, $\mu \in [0, \pi/2)$, $w \in (w_0, \infty)$, $w_0 = -1/2$, $\kappa = 0$, в нуле дается формулой

$$\chi(x) = c[(vx)^{1/2} \sin \theta(\mu, w) + 2(vx)^{1/2} \ln(vx) \cos \theta(\mu, w)] + O(x^{3/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad (144)$$

где $c = Dc(\mu, w)$ произвольно. Сравнение (144) и (127) естественным образом отождествляет параметр ν в (127) с углом $\theta(\mu, w) \in (-\pi/2, \pi/2)$ в (144) и устанавливает, что гамильтониан $\hat{H}_{3, \nu}$ с данными константами связи $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$ и $\nu \in (-\pi/2, \pi/2)$ должен быть отождествлен со всеми теми гамильтонианами $\hat{H}_{b(\mu, w)}$ с теми же g_1 , g_2 , для которых параметры μ и w связаны соотношением $\theta(\mu, w) = \nu$, т. е. $\{\hat{H}_{b(\mu, w)}, \theta(\mu, w) = \nu\} = \hat{H}_{3, \nu}$. Удобно взять μ в качестве независимого параметра, тогда w определяется из соотношения $\operatorname{tg} \theta(\mu, w) = \operatorname{tg} \nu$, или уравнения

$$\psi\left(\frac{1}{2} + w\right) = \operatorname{tg} \nu + \operatorname{tg} \mu + 2\psi(1), \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (145)$$

которое рассматривается как уравнение относительно w при дополнительном условии $w > w_0$. Функция $\psi(1/2 + w)$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией w , изменяющейся от $-\infty$ до ∞ , когда w меняется от $w_0 + 0$ до ∞ . Отсюда следует, что уравнение (145) всегда имеет единственное решение $w = w(\mu, \nu)$ и $w(\mu, \nu)$ как функция μ монотонно возрастает от $w(0, \nu) > -1/2$ до ∞ , когда μ меняется от 0 до $\pi/2 - 0$. Предыдущий результат тогда может быть записан в виде $\{\hat{H}_{b(\mu, w(\mu, \nu))}\} = \hat{H}_{3, \nu}$, что обеспечивает однопараметрическое семейство обобщенных осцилляторных представлений для гамильтониана $\hat{H}_{3, \nu}$ с данными константами связи $g_1 = -1/4$, $g_2 > 0$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{3, \nu} = \hat{H}_{\epsilon b(\mu, w(\mu, \nu))} &= \bar{\hat{b}}(\mu, w(\mu, \nu))\hat{b}^+(\mu, w(\mu, \nu)) - 4v^2w(\mu, \nu)\hat{I}, \\ \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \mu &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (146)$$

параметром является функция μ , а $w = w(\mu, \nu)$ есть решение уравнения (145).

Согласно (102) любое из представлений (146) с $\mu \in (0, \pi/2)$ не является оптимальным, мы можем только сказать, что гамильтониан $\hat{H}_{3, \nu}$ ограничен снизу величиной $-4v^2w(0, \nu)$, тогда как представление с $\mu = 0$ является оптимальным, энергия $E_0^{(3)}(\nu)$ основного состояния гамильтониана $\hat{H}_{3, \nu}$, которая является нижней границей его спектра, дается формулой

$$E_0^{(3)}(\nu) = -4v^2w(0, \nu),$$

и нормированное основное состояние $U_\nu^{(3)}(x)$ гамильтониана $\hat{H}_{3, \nu}$ имеет вид

$$U_\nu^{(3)}(x) = Q_0(\nu)e^{-(vx)^2/2}(vx)^{1/2}\Psi\left(\frac{1}{2} + w(0, \nu), 1; (vx)^2\right),$$

где $Q_0(\nu)$ – нормировочный множитель.

Энергия $E_0^{(3)}(\nu)$ основного состояния является единственным решением уравнения

$$\psi\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{4\nu^2}\right) = \operatorname{tg} \nu + 2\psi(1), \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (147)$$

рассматриваемого как уравнение для E при дополнительном условии $E < 2\nu^2$. Мы не можем предъявить явное выражение для $E_0^{(3)}(\nu)$, но можем утверждать, что $E_0^{(3)}(\nu)$ монотонно убывает от $2\nu^2 - 0$ до $-\infty$, когда ν изменяется от $-\pi/2 + 0$ до $\pi/2 - 0$.

Заметим, что согласно [2] уравнение (147) определяет спектр гамильтониана $\hat{H}_{3,\nu}$, который является дискретным, $\operatorname{spec} \hat{H}_{3,\nu} = \{E_n(\nu)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $E_{n+1}(\nu) > E_n(\nu)$, а условие $E < 2\nu^2$ выделяет минимальное собственное значение – энергию $E_0^{(3)}(\nu)$ основного состояния.

Благодарности. Авторы благодарны за частичную поддержку РФФИ (гранты № 11-02-00685 (Б. Л. Воронов) и 11-01-00830 (И. В. Тютин)).

Список литературы

- [1] I. V. Tyutin, B. L. Voronov, *Phys. Scr.*, **87**:3 (2013), 038119, 14 pp., arXiv: 1211.6331.
- [2] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, B. L. Voronov, *Self-Adjoint Extensions in Quantum Mechanics. General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials*, Progress in Mathematical Physics, **62**, Birkhäuser, Boston, MA, 2012.
- [3] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.
- [4] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [5] J. von Neumann, *Functional Operators*, v. 2: *The Geometry of Orthogonal Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1950.
- [6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1965.
- [7] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.

Поступила в редакцию 24.11.2013