Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Мрыглюд, М. В. Токарчук, Статистическая гидродинамика магнитных жидкостей. I. Метод неравновесного статистического оператора, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 1, 132–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf862>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 04:06:41

© 1998 г.

И. М. Мрыглов*, М. В. Токарчук*

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА
МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ.
I. МЕТОД НЕРАВНОВЕСНОГО
СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА**

Методом неравновесного статистического оператора Зубарева описано обобщенное гидродинамическое состояние магнитной жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле. Магнитная жидкость рассматривается как модель, в которой “жидкостная” подсистема описывается классически, а “магнитная” – методами квантовой статистики. Получены уравнения статистической обобщенной гидродинамики для магнитной жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле с гейзенберговским спиновым взаимодействием, когда “жидкостная” и “магнитная” подсистемы характеризуются различными неравновесными температурами. Эти уравнения можно использовать для описания как сильно, так и слабо неравновесных состояний. Проанализированы некоторые предельные случаи, когда переменными одной из подсистем можно формально пренебречь.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач современной теории жидкости, важной с точки зрения возможных применений [1, 2] к различным объектам, является проблема микроскопического описания неравновесных свойств систем частиц с локализованным магнитным моментом, находящихся в жидком состоянии. В теории магнетизма значительный интерес к таким системам связан с тем, что жидкие магнетики в силу их изотропности обладали бы идеальными магнито-мягкими свойствами, что важно для практического применения. С другой стороны, в настоящее время большое внимание уделяется исследованиям динамических свойств магнитных коллоидных суспензий [3–9] с учетом влияния на них магнитной подсистемы, в частности внешнего магнитного поля. Вопрос о влиянии “магнитной” подсистемы на “жидкостную” может также изучаться на основании

*Институт физики конденсированных систем Национальной академии наук Украины, Львов, Украина

предлагаемого в данной работе подхода и для жидких металлов – расплавов переходных 3d-металлов [10, 11].

Теоретическое описание динамических свойств магнитных жидкостей проводилось главным образом с использованием феноменологических подходов или же методом функций Грина. Исследования свободной энергии, намагниченности, жидкостного уравнения состояния и спектра спиновых волн для модели жидкого и аморфного магнетиков методом функционального интегрирования выполнены в работах [12–14], в которых исследовалось также влияние магнитных взаимодействий на структуру жидкости. Предложенная в этих работах микроскопическая теория была обобщена на случай двухкомпонентных жидких магнетиков [15, 16]. Некоторые динамические свойства жидких магнетиков, в частности высокочастотное поведение и спектр колебаний, изучались на основе феноменологических уравнений движения в работах [17, 18]. Следует также отметить работу [19], в которой была предложена равновесная статистическая теория описания термодинамических свойств коллоидных суспензий магнитных частиц большого размера в растворителе.

Важной и малоисследованной проблемой остается последовательное микроскопическое описание неравновесных свойств жидких магнетиков, в частности кинетических коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности, спиновой диффузии), динамического структурного фактора, спектра коллективных колебаний. В работах [20–24] для модели, предложенной в [12–14], с помощью метода неравновесного статистического оператора (НСО) Зубарева [25, 26] получены уравнения обобщенной гидродинамики жидкого магнетика во внешнем неоднородном магнитном поле. Для случая малых отклонений от состояния равновесия найдены линеаризованные уравнения гидродинамики [20, 22].

В данной статье рассматривается статистическая гидродинамика гейзенберговской магнитной жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле, когда “жидкостная” и “магнитная” подсистемы характеризуются различными неравновесными температурами. Такой двухтемпературный анализ оказывается более удобным для исследования взаимного влияния классических жидкостных и квантовых магнитных свойств. Во втором разделе работы получено выражение для НСО магнитной жидкости. Здесь же рассмотрены уравнения неравновесной термодинамики, связывающие параметры сокращенного описания с неравновесной энтропией и неравновесными термодинамическими параметрами. В третьем разделе получены обобщенные уравнения гидродинамики, в которых в отличие от предыдущих результатов [20–25] перенос средней плотности энергии описывается двумя взаимосвязанными уравнениями “жидкостной” и “магнитной” подсистем. Эти уравнения справедливы как для сильно, так и для слабо неравновесных процессов переноса. В случае слабо неравновесных состояний уравнения оказываются линейными и являются хорошей основой для исследования временных корреляционных функций, обобщенных коэффициентов переноса и коллективных мод гейзенберговской

магнитной жидкости. Слабо неравновесный случай рассмотрен в четвертом разделе, где получены уравнения молекулярной магнитогидродинамики для гейзенберговской магнитной жидкости. Проведен их общий анализ и показано, что в предельных случаях, пренебрегая переменными одной из подсистем (“магнитной” или “жидкостной”), мы приходим к известным уравнениям магнитогидродинамики [27] для спиновых систем или же молекулярной гидродинамики простых жидкостей [28, 29].

2. НЕРАВНОВЕСНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР СИСТЕМЫ МАГНИТНЫХ АТОМОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим находящуюся в жидком состоянии систему N магнитных атомов со спином $\mathbf{S}_j$ во внешнем неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Гамильтониан такой системы представим в виде

$$\hat{H}(t) = H_L + \hat{H}_S(t), \quad (2.1)$$

где

$$H_L = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} \Phi(|\mathbf{r}_{jl}|) \quad (2.2)$$

— классическая часть гамильтониана, описывающая “жидкостную” подсистему как простую классическую жидкость, а

$$\hat{H}_S(t) = \hat{H}_S - \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

где

$$\hat{H}_S = -\frac{1}{2} \sum_{f \neq k} J(|\mathbf{r}_{fk}|) \mathbf{S}_f \mathbf{S}_k, \quad (2.4)$$

— квантовая часть гамильтониана “магнитной” подсистемы во внешнем неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{H}_S$ — гамильтониан обменного взаимодействия магнитных атомов. Второе слагаемое в правой части (2.3) описывает взаимодействие спинов с полем $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, где

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) = \mu_0 \sum_{f=1}^N \mathbf{S}_f \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_f) \quad (2.5)$$

— оператор плотности магнитного момента, μ_0 — величина магнитного момента отдельного атома, а $J(|\mathbf{r}_{fk}|)$ — интеграл обменного взаимодействия.

Неравновесное состояние такой системы описывается с помощью НСО $\varrho(x^N; t)$, являющегося решением уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x^N; t) + i \hat{L}_N(t) \varrho(x^N; t) = 0, \quad (2.6)$$

где $i\hat{L}_N(t)$ – оператор Лиувилля, а $x = \{\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}\}$. Для гамильтониана (2.1) оператор Лиувилля $i\hat{L}_N(t)$ имеет следующий вид:

$$i\hat{L}_N(t) = iL_N^L + i\hat{L}_N^S(t), \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} iL_N^L = & \sum_{f=1}^N \frac{\mathbf{p}_f}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_f} - \frac{1}{2} \sum_{f \neq l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_f} \{ \Phi(|\mathbf{r}_{fl}|) - J(|\mathbf{r}_{fl}|) \mathbf{S}_f \mathbf{S}_l \} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_f} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l} \right) + \\ & + \mu_0 \sum_{f=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_f} \mathbf{B}(\mathbf{r}_f, t) \mathbf{S}_f \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_f} \end{aligned} \quad (2.8)$$

– классическая часть оператора $i\hat{L}_N$, во втором слагаемом которой имеется вклад от интеграла обменного взаимодействия $J(|\mathbf{r}_{fl}|)$, а

$$i\hat{L}_N^S(t)\hat{A} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S(t), \hat{A}] = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{A}] - \frac{i}{\hbar} \int d\mathbf{r} [\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})\hat{A}] \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

– квантовая часть оператора Лиувилля. НСО $\varrho(x^N; t)$ нормирован на единицу:

$$\int d\Gamma_N \varrho(x^N; t) = 1, \quad (2.10)$$

где

$$\int d\Gamma_N \dots = \int \dots \int \frac{(d\mathbf{r} d\mathbf{p})^N}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \text{Sp}_{\{S_1, \dots, S_N\}}(\dots). \quad (2.11)$$

Для нахождения НСО $\varrho(x^N; t)$ необходимо сформулировать граничное условие. Следуя методу НСО [25, 26], будем искать решения уравнения Лиувилля (2.6), зависящие от времени лишь через средние значения набора наблюдаемых переменных. Для этого проще всего ввести в правую часть уравнения Лиувилля бесконечно малый источник, который нарушает симметрию уравнения относительно обращения времени и отбирает нужные запаздывающие решения [25, 26]. Таким образом, будем исходить из уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{L}_N(t) \right) \varrho(x^N; t) = -\varepsilon (\varrho(x^N; t) - \varrho_q(x^N; t)), \quad (2.12)$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$ после предельного термодинамического перехода. Вспомогательный квазиравновесный статистический оператор $\varrho_q(x^N; t)$ определяется из условий экстремума информационной энтропии системы при сохранении нормировки

$$\int d\Gamma_N \varrho_q(x^N; t) = 1 \quad (2.13)$$

и выполнении некоторых дополнительных требований, фиксирующих значения наблюдаемых переменных [25, 26].

Поскольку нас больше интересует стадия временной эволюции магнитной жидкости, близкая к гидродинамической, то в качестве параметров сокращенного описания (наблюдаемых переменных) неравновесного состояния следует выбирать консервативные величины, а именно средние значения плотностей числа частиц $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t$, импульса $\langle \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, полной энергии $\langle \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) \rangle^t$ и оператора магнитного момента $\langle \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t$. Однако важным при исследовании жидких магнетиков является учет взаимного влияния жидкостных (классических) и магнитных (квантовых) свойств системы, которое будет отражаться на спектрах коллективных возбуждений, динамических структурных факторах “жидкостной” и “магнитной” подсистем, а также на коэффициентах переноса. При этом одной из главных причин взаимного влияния подсистем являются температурные флуктуации, связанные с флуктуациями плотностей энергии “жидкостной” и “магнитной” подсистем во внешнем неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}; t)$. Поэтому для более полного исследования этих процессов, в отличие от подхода, предложенного в работах [20–22], мы будем исходить из двухтемпературного анализа, вводя соответственно локальные обратные температуры “жидкостной” $\beta_L(\mathbf{r}; t)$ и “магнитной” $\beta_S(\mathbf{r}; t)$ подсистем. При этом параметрами сокращенного описания неравновесного состояния системы будут выступать средние значения плотности числа частиц $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t$, плотности импульса $\langle \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, классической части плотности энергии $\langle \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) \rangle^t$, плотности магнитного момента $\langle \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t$ и квантовой части плотности энергии $\langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t$. Использование двухтемпературного подхода является физически оправданным в случае, когда характерные времена релаксации “жидкостной” и “магнитной” подсистем существенно отличаются. В частности, такая ситуация может иметь место в ферроколлоидных системах [1, 2].

При фиксированных значениях средних от переменных сокращенного описания, а также при выполнении условия (2.13) стандартным путем [25, 26] получаем выражение для квазиравновесного статистического оператора $\varrho_q(x^N; t)$:

$$\begin{aligned} \varrho_q(x^N; t) = \exp \left\{ -\Phi(t) - \int d\mathbf{r} \beta_L(\mathbf{r}; t) \left(\hat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}; t) \hat{n}(\mathbf{r}) \right) - \right. \\ \left. - \int d\mathbf{r} \beta_S(\mathbf{r}; t) \left(\hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) - \mathbf{b}(\mathbf{r}; t) \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \ln \int d\Gamma_N \exp \left\{ - \int d\mathbf{r} \beta_L(\mathbf{r}; t) \left(\hat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}; t) \hat{n}(\mathbf{r}) \right) - \right. \\ \left. - \int d\mathbf{r} \beta_S(\mathbf{r}; t) \left(\hat{\mathcal{E}}_S - \mathbf{b}(\mathbf{r}; t) \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

– функционал Масье–Планка, а

$$\hat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}; t) \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \frac{m}{2} v^2(\mathbf{r}; t) \hat{n}(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

— классическая часть плотности энергии в сопровождающей системе координат, которая движется вместе с элементом жидкости со средней гидродинамической скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}; t)$. Динамические переменные операторов плотностей выглядят следующим образом:

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (2.18)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \Phi(|\mathbf{r}_{lj}|) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (2.19)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq f} J(|\mathbf{r}_{lf}|) \mathbf{S}_l \mathbf{S}_f \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_f). \quad (2.20)$$

Параметры $\mu(\mathbf{r}; t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$, $\beta_L(\mathbf{r}; t)$, $\beta_S(\mathbf{r}; t)$ в (2.14) определяются из условий согласования

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t &= \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_q^t, \\ \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t &= \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle_q^t, \\ \langle \hat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) \rangle^t &= \langle \hat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) \rangle_q^t, \\ \langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t &= \langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle_q^t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для того чтобы выяснить физический смысл введенных параметров, найдем вариационные производные по ним от функционала Масье–Планка (2.15). Учитывая условия (2.21), имеем обобщенные термодинамические равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi(t)}{\delta \beta_L(\mathbf{r}; t)} &= -\langle \hat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) \rangle_q^t = -\langle \hat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) \rangle^t, \\ \frac{\delta \Phi(t)}{\delta (\beta_L(\mathbf{r}; t) \mu(\mathbf{r}; t))} &= \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_q^t = \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t, \\ \frac{\delta \Phi(t)}{\delta \beta_S(\mathbf{r}; t)} &= -\langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle_q^t = -\langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t, \\ \frac{\delta \Phi(t)}{\delta (\beta_S(\mathbf{r}; t) \mathbf{b}(\mathbf{r}; t))} &= \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle_q^t = \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t, \end{aligned}$$

из которых следует, что параметры $\beta_L(\mathbf{r}; t)$, $\mu(\mathbf{r}; t)$, $\beta_S(\mathbf{r}; t)$ и $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$ являются термодинамически сопряженными к средней энергии “жидкостной” подсистемы (в сопровождающей системе координат), средней неравновесной плотности частиц, средней энергии “магнитной” подсистемы и среднему магнитному моменту атомов, соответственно.

Введем энтропию

$$S(t) = \langle \ln \varrho_q(x^N; t) \rangle_q^t$$

квазиравновесного состояния $\varrho_q(x^N; t)$. Используя выражение (2.14) и условия (2.21), получаем

$$\begin{aligned} S(t) = & \Phi(t) + \int d\mathbf{r} \beta_L(\mathbf{r}; t) \langle \widehat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) \rangle^t - \int d\mathbf{r} \beta_L(\mathbf{r}; t) \mu(\mathbf{r}; t) \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t + \\ & + \int d\mathbf{r} \beta_S(\mathbf{r}; t) \langle \widehat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t - \int d\mathbf{r} \beta_S(\mathbf{r}; t) \mathbf{b}(\mathbf{r}; t) \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t. \end{aligned}$$

Теперь находим вариационные производные от $S(t)$ по набору параметров сокращенного описания $\langle \widehat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) \rangle^t$, $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t$, $\langle \widehat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t$, $\langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t$. В результате получим другую группу обобщенных термодинамических соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\delta S(t)}{\delta \langle \widehat{\mathcal{E}}'_L(\mathbf{r}) \rangle^t} &= \beta_L(\mathbf{r}; t), & \frac{\delta S(t)}{\delta \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t} &= -\beta_L(\mathbf{r}; t) \mu(\mathbf{r}; t), \\ \frac{\delta S(t)}{\delta \langle \widehat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t} &= \beta_S(\mathbf{r}; t), & \frac{\delta S(t)}{\delta \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t} &= -\beta_S(\mathbf{r}; t) \mathbf{b}(\mathbf{r}; t), \end{aligned}$$

из которых следует, что $\beta_L(\mathbf{r}; t)$ имеет смысл обратной температуры “жидкостной” подсистемы, а $\mu(\mathbf{r}; t)$ — ее химического потенциала; $\beta_S(\mathbf{r}; t)$ играет роль обратной температуры “магнитной” подсистемы, а $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$ — внутреннего магнитного поля.

Используя далее общую схему метода НСО с учетом проецирования [25, 26], из уравнения (2.12) для квазиравновесного оператора (2.14) находим НСО $\varrho(x^N; t)$. Выражение для $\varrho(x^N; t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varrho(x^N; t) = & \varrho_q(x^N; t) + \int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} T(t', t) \times \\ & \times \left[\int_0^1 d\tau (\varrho_q(t'))^\tau (I_{\mathcal{E}}^L(\mathbf{r}'; t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}'; t') I_p(\mathbf{r}'; t')) (\varrho_q(t'))^{1-\tau} \beta_L(\mathbf{r}'; t') + \right. \\ & \left. + \int_0^1 d\tau (\varrho_q(t'))^\tau (I_{\mathcal{E}}^S(\mathbf{r}'; t') - \mathbf{b}(\mathbf{r}'; t') I_M(\mathbf{r}'; t')) (\varrho_q(t'))^{1-\tau} \beta_S(\mathbf{r}'; t') \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где обобщенные потоки следующие:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{E}}^L(\mathbf{r}; t) &= (1 - \mathcal{P}(t)) \dot{\widehat{\mathcal{E}}}_L(\mathbf{r}), \\ I_p(\mathbf{r}; t) &= (1 - \mathcal{P}(t)) \dot{\widehat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r}), \\ I_{\mathcal{E}}^S(\mathbf{r}; t) &= (1 - \mathcal{P}(t)) \dot{\widehat{\mathcal{E}}}_S(\mathbf{r}), \\ I_M(\mathbf{r}; t) &= (1 - \mathcal{P}(t)) \dot{\widehat{\mathbf{M}}}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

и

$$\dot{\hat{a}}_l(\mathbf{r}) = i\hat{L}_N \hat{a}_l(\mathbf{r}). \quad (2.24)$$

В (2.24) мы использовали обозначение

$$\hat{a}(\mathbf{r}) = \{\hat{a}_l(\mathbf{r})\} = \{\hat{n}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}), \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}), \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})\}.$$

Заметим, что $I_n(\mathbf{r}; t) = (1 - \mathcal{P}(t))\dot{\hat{n}}(\mathbf{r}) = 0$. Оператор $\mathcal{P}(t)$ – зависящий от времени проекционный оператор Мори, который действует на динамические переменные по правилу

$$\mathcal{P}(t)\hat{A}(\mathbf{r}) = \langle \hat{A}(\mathbf{r}) \rangle_q^t + \sum_l \int d\mathbf{r}' \frac{\delta \langle \hat{A}(\mathbf{r}) \rangle_q^t}{\delta \langle \hat{a}_l(\mathbf{r}') \rangle^t} [\hat{a}_l(\mathbf{r}') - \langle \hat{a}_l(\mathbf{r}') \rangle^t] \quad (2.25)$$

и как проекционный оператор обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t') &= \mathcal{P}(t), \\ \mathcal{P}(t)(1 - \mathcal{P}(t')) &= 0, \\ \mathcal{P}(t)\hat{a}_l(\mathbf{r}) &= \hat{a}_l(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

В выражении (2.22) для НСО величина $T(t, t')$ представляет собой так называемый оператор эволюции, который записан с учетом проецирования [20–22].

Таким образом, мы получили НСО жидкого магнетика во внешнем неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}; t)$, который находится в неравновесном состоянии, близком к гидродинамическому. Поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}; t)$ входит в $\varrho(x^N; t)$ через квантовую часть оператора Лиувилля $i\hat{L}_N^S(t)$. В выражение для НСО включены диссипативные обобщенные потоки (2.23), которые описывают процессы переноса во времени классической и квантовой частей плотностей энергии, импульса и магнитного момента. Поскольку в соответствии с принципом сокращенного описания неравновесного состояния НСО является функционалом от наблюдаемых величин (в нашем случае средних значений плотностей числа частиц $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t$, импульса $\langle \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, магнитного момента $\langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, а также классической и квантовой частей плотностей энергии $\langle \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) \rangle^t$ и $\langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t$), которые сами изменяются во времени и пространстве, то для них необходимо построить соответствующие уравнения переноса, или же, другими словами, уравнения обобщенной гидродинамики.

3. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ЖИДКОГО МАГНЕТИКА

Чтобы получить уравнения переноса для усредненных величин $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t$, $\langle \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, $\langle \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) \rangle^t$, $\langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t$ и $\langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, воспользуемся тождествами

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{a}_l \rangle^t = \langle \dot{\hat{a}}_l \rangle^t = \langle \dot{\hat{a}}_l \rangle_q^t + \langle (1 - \mathcal{P}(t))\dot{\hat{a}}_l \rangle^t. \quad (3.1)$$

Рассмотрим сначала результат действия оператора Лиувилля $i\hat{L}_N(t)$ на динамические переменные $\hat{n}(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, $\hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r})$, $\hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})$. При этом для плотности числа частиц получим

$$\dot{\hat{n}}(\mathbf{r}) = i\hat{L}_N(t)\hat{n}(\mathbf{r}) = iL_N^L\hat{n}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{m}\nabla\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

где $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$. Для плотности импульса имеем уравнение

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r}) = iL_N^L\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = -\nabla\overleftrightarrow{T}(\mathbf{r}) + \mathbf{R}_p(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

где $\overleftrightarrow{T}(\mathbf{r})$ – плотность тензора напряжений жидкого магнетика. Компоненты этого тензора имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = & \sum_{j=1}^N \frac{p_j^\alpha p_j^\beta}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} \left(\frac{d\Phi(r_{jl})}{dr_{jl}} - \frac{dJ(r_{jl})}{dr_{jl}} \mathbf{S}_j \mathbf{S}_l \right) \frac{r_{jl}^\alpha r_{jl}^\beta}{r_{jl}} \int_0^1 d\sigma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j + \sigma \mathbf{r}_l). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В уравнении (3.3) величина

$$\mathbf{R}_p(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} (\mathbf{B}(\mathbf{r}_j; t) \mathbf{S}_j) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

представляет собой диссипативную часть обобщенного потока импульса.

Аналогичным образом для $\hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r})$ находим выражение

$$\dot{\hat{\mathcal{E}}}_L(\mathbf{r}) = iL_N^L\hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) = -\nabla\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{E}_L}(\mathbf{r}) + \mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^1(\mathbf{r}), \quad (3.5)$$

где $\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{E}_L}(\mathbf{r})$ – плотность вектора потока “жидкостной” части энергии с компонентами

$$\begin{aligned} \hat{j}_{\mathcal{E}_L}^\alpha(\mathbf{r}) = & \sum_{j=1}^N \left[\frac{p_j^\alpha}{m} \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} \Phi(r_{lj}) \right) \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) - \\ & - \frac{1}{4m} \sum_{j \neq l} \frac{r_{lj}^\alpha r_{lj}^\beta}{r_{lj}} (p_l^\beta + p_j^\beta) \left[\frac{d\Phi(r_{jl})}{dr_{jl}} - \frac{dJ(r_{lj})}{dr_{jl}} \mathbf{S}_l \mathbf{S}_j \right] \int_0^1 d\sigma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j + \sigma \mathbf{r}_j), \end{aligned} \quad (3.6)$$

а члены

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^0(\mathbf{r}) = & \sum_{j=1}^N \mu_0 \frac{\mathbf{p}_j}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} (\mathbf{B}(\mathbf{r}_j; t) \mathbf{S}_j) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \\ \mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^1(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2m} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^N \frac{r_{lj}^\beta}{r_{lj}} (p_j^\beta - p_l^\beta) \frac{\partial J(r_{lj})}{\partial r_{lj}} (\mathbf{S}_l \mathbf{S}_j) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \end{aligned}$$

описывают диссипацию “жидкостной” части плотности энергии, которая обусловлена, с одной стороны, обменным взаимодействием, а с другой стороны, неоднородностью внешнего магнитного поля. Как видно из структуры выражений (3.4), (3.6), в компонентах плотностей тензора напряжений $T^{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ и потока энергии $\hat{j}_{\mathcal{E}_L}^\alpha(\mathbf{r})$, кроме вклада от классической части энергии взаимодействия, имеется также вклад от квантового обменного взаимодействия.

Для величины $\hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r})$ получаем соответственно

$$\dot{\hat{\mathcal{E}}}_S(\mathbf{r}) = -\nabla \hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{E}_S}^1(\mathbf{r}) - \nabla \hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{E}_S}^2(\mathbf{r}) - \mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^1(\mathbf{r}) + \mathbf{R}_{\mathcal{E}_S}^0(\mathbf{r}), \quad (3.7)$$

где $\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{E}_S}^1(\mathbf{r})$ и $\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{E}_S}^2(\mathbf{r})$ – составляющие плотности вектора потока “магнитной” энергии, которые обусловлены соответственно “жидкостной” и “магнитной” динамикой. При этом

$$\hat{j}_{\mathcal{E}_S}^{1,\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^\alpha}{m} \left(-\frac{1}{2} \sum_{l \neq j} J(r_{lj}) \mathbf{S}_l \mathbf{S}_j \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (3.8)$$

а выражение для $\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{E}_S}^2(\mathbf{r})$ является более громоздким, оно приведено в работе [24].

Для $\mathbf{R}_{\mathcal{E}_S}^0(\mathbf{r})$ имеем

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}_S}^0(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\hbar} \int d\mathbf{r} \left[\hat{H}_S \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \right] \mathbf{B}(\mathbf{r}; t).$$

Следует обратить внимание на то, что диссипативный член $\mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^1(\mathbf{r})$ входит в выражения (3.5) и (3.7) с противоположным знаком. Таким образом, при нулевом поле ($\mathbf{B}(\mathbf{r}; t) = 0$) плотность полной энергии системы $\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r})$ является консервативной величиной: $\mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_{\mathcal{E}_S}^0(\mathbf{r}) = 0$. Обмен энергией между подсистемами описывается величиной $\mathbf{R}_{\mathcal{E}_L}^1(\mathbf{r})$, что в конечном счете и приводит к установлению единой равновесной температуры магнитной жидкости.

Для плотности магнитного момента находим

$$\dot{\hat{\mathbf{M}}}(\mathbf{r}) = -\nabla \hat{\mathbf{j}}_M^1(\mathbf{r}) - \nabla \hat{\mathbf{j}}_M^2(\mathbf{r}) - \mathbf{R}_M(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

где

$$\hat{\mathbf{j}}_M^{1,\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^\alpha}{m} \mathbf{S}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (3.10)$$

$$\hat{\mathbf{j}}_M^{2,\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} r_{lj}^\alpha J(r_{lj}) [\mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_l] \int_0^1 d\sigma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j + \sigma \mathbf{r}_l), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{r}) = - \int d\mathbf{r} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{M}(\mathbf{r})].$$

Как видно из структуры (3.7)–(3.11), в выражениях для $\dot{\hat{\mathcal{E}}}_S(\mathbf{r})$ и $\dot{\hat{\mathbf{M}}}(\mathbf{r})$ имеются вклады как чисто квантового характера с явным учетом внешнего неоднородного магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}; t)$, так и смешанные “классически-квантовые” вклады, которые возникли как результат действия классической (“жидкостной”) части оператора Лиувилля iL_N^L .

Используя тождества (3.1), в правых частях которых средние значения $\langle \dots \rangle^t$ вычисляются с помощью НСО (2.22), получим систему уравнений обобщенной гидродинамики для средних значений операторов $\hat{a}(\mathbf{r}) = \{\hat{a}_l(\mathbf{r})\} = \{\hat{n}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}), \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})\}$. В матричном виде имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{a}(\mathbf{r}) \rangle^t = \langle \dot{\hat{a}}(\mathbf{r}) \rangle_q^t - \int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{aa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \tilde{F}(\mathbf{r}'; t'), \quad (3.12)$$

где $\hat{a}(\mathbf{r})$ – вектор-столбец динамических переменных, а $\tilde{F}(\mathbf{r}'; t')$ – вектор, элементами которого являются термодинамически сопряженные величины:

$$\tilde{F}(\mathbf{r}; t) = \left\{ -\beta_L(\mathbf{r}; t) \left(\mu(\mathbf{r}; t) + \frac{m\mathbf{v}^2(\mathbf{r}; t)}{2} \right), \right. \\ \left. -\beta_L(\mathbf{r}; t) \mathbf{v}(\mathbf{r}; t), \beta_L(\mathbf{r}; t), \beta_S(\mathbf{r}; t), -\beta_S(\mathbf{r}; t) \mathbf{b}(\mathbf{r}; t) \right\}.$$

Матрица ядер переноса $\varphi_{aa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ с элементами

$$\varphi_{a_l a_j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \int d\Gamma_N \left\{ I_{a_l}(\mathbf{r}; t) T(t', t) \int_0^1 d\tau (\varrho_q(t'))^\tau I_{a_j}(\mathbf{r}'; t') (\varrho_q(t'))^{1-\tau} \right\},$$

где $I_{a_l}(\mathbf{r}; t)$ принимает соответственно значения $I_p(\mathbf{r}; t)$, $I_{\mathcal{E}}^L(\mathbf{r}; t)$, $I_{\mathcal{E}}^S(\mathbf{r}; t)$, $I_M(\mathbf{r}; t)$ (см. (2.23)), имеет следующую структуру:

$$\varphi_{aa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{pp} & \varphi_{p\mathcal{E}}^L & \varphi_{p\mathcal{E}}^S & \varphi_{pM} \\ 0 & \varphi_{\mathcal{E}p}^L & \varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{LL} & \varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{LS} & \varphi_{\mathcal{E}M}^L \\ 0 & \varphi_{\mathcal{E}p}^S & \varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{SL} & \varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{SS} & \varphi_{\mathcal{E}M}^S \\ 0 & \varphi_{Mp} & \varphi_{M\mathcal{E}}^L & \varphi_{M\mathcal{E}}^{SS} & \varphi_{MM} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Функции $\varphi_{a_l a_j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ – это обобщенные ядра переноса (функции памяти), которые непосредственно связаны с обобщенными коэффициентами переноса магнитной жидкости. К примеру, функция φ_{pp} описывает вязкие процессы в системе; функции $\varphi_{\mathcal{E}p}^S$, $\varphi_{p\mathcal{E}}^S$ и $\varphi_{\mathcal{E}p}^L$, $\varphi_{p\mathcal{E}}^L$ описывают динамические корреляции вязких и тепловых процессов в “жидкостной” и “магнитной” подсистемах, соответственно.

Тепловой перенос в подсистемах характеризуют функции $\varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{LL}$ и $\varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{SS}$, а перекрестные ядра переноса $\varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{LS}$ и $\varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{SL}$ описывают динамические тепловые корреляции между “жидкостной” и “магнитной” подсистемами. Из этих функций можно построить общую функцию $\varphi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ [20–23, 25], которая будет служить характеристикой обобщенной теплопроводности магнитной жидкости в присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}; t)$. Ядро переноса φ_{MM} описывает явление спиновой диффузии в магнитной жидкости с учетом вязких и тепловых процессов.

В итоге мы видим, что система уравнений переноса (3.12) для выбранного набора динамических переменных $\hat{n}(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, $\hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r})$, $\hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r})$ записана в самой общей форме и может быть использована для описания как сильно, так и слабо неравновесных состояний системы, находящейся во внешнем магнитном поле. Для случая слабо неравновесных (близких к равновесию) состояний полученные уравнения можно существенно упростить.

4. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Предположим, что состояние системы мало отличается от равновесного. Определим в квазиравновесном статистическом операторе (2.14) параметры $\beta_L(\mathbf{r}; t)$, $\beta_S(\mathbf{r}; t)$, $\mu(\mathbf{r}; t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$ через средние значения переменных сокращенного описания, используя условия согласования (2.21). Для слабо неравновесных состояний средние значения плотностей числа частиц $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^t$, импульса $\langle \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, энергии $\langle \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) \rangle^t$ и $\langle \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \rangle^t$, оператора магнитного момента $\langle \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \rangle^t$, а также параметры $\beta_L(\mathbf{r}; t)$, $\beta_S(\mathbf{r}; t)$, $\mu(\mathbf{r}; t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}; t)$ и $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$ мало отличаются от своих равновесных значений. Поэтому квазиравновесный статистический оператор $\varrho_q(x^N; t)$ можно разложить по отклонениям параметров $\beta_L(\mathbf{r}; t)$, $\beta_S(\mathbf{r}; t)$, $\mu(\mathbf{r}; t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}; t)$ и $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$ от своих равновесных значений и ограничиться при этом линейным приближением

$$\begin{aligned} \varrho_q(x^N; t) = \varrho_0(x^N) - \int d\mathbf{r} \delta\beta_L(\mathbf{r}; t) \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{r}) \varrho_0(x^N) - \\ - \int d\mathbf{r} \delta\beta_S(\mathbf{r}; t) \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{r}) \varrho_0^{-\tau} \varrho_0(x^N) + \\ + \int d\mathbf{r} \delta[\beta_L \mathbf{v}](\mathbf{r}; t) \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \varrho_0(x^N) + \\ + \int d\mathbf{r} \delta\left[\beta_L \left(\mu - \frac{m}{2} v^2\right)\right](\mathbf{r}; t) \hat{n}(\mathbf{r}) \varrho_0(x^N) + \\ + \int d\mathbf{r} \delta[\beta_S \mathbf{b}](\mathbf{r}; t) \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \varrho_0^{-\tau} \varrho_0(x^N), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где равновесный статистический оператор

$$\varrho_0(x^N) = \exp \left\{ -\Omega - \beta \left(H - \mu N - \int d\mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}; t) \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) \right\},$$

а

$$\Omega = \ln \int d\Gamma_N \exp \left\{ -\beta \left(H - \mu - \int d\mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}; t) \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) \right\}.$$

Величины $\delta\beta_L(\mathbf{r}; t)$, $\delta\beta_S(\mathbf{r}; t)$, $\delta\mu(\mathbf{r}; t)$, $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}; t)$, $\delta\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$ обозначают отклонения соответствующих параметров от своих равновесных значений. При этом β – обратная равновесная температура жидкого магнетика.

В формуле (4.1) с помощью определения

$$A(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} A(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.2)$$

удобно перейти к фурье-компонентам динамических переменных и сопряженных к ним параметров. Тогда, используя условия согласования (2.21), последовательно исключим из рассмотрения в (4.1) параметры

$$\delta[\beta_s \mathbf{b}], \quad \delta \left[\beta_L \left(\mu - \frac{m}{2} v^2 \right) \right], \quad \delta[\beta_L \mathbf{v}], \quad \delta\beta_S, \quad \delta\beta_L.$$

В результате для квазиравновесного статистического оператора $\varrho_q(x^N; t)$ получим

$$\begin{aligned} \varrho_q(x^N; t) = \varrho_0(x^N) & \left\{ 1 + \sum_{\mathbf{k}}' \langle \hat{h}_L(\mathbf{k}) \rangle^t \{ \Phi_{hh}^L(\mathbf{k}) \}^{-1} \hat{h}_L(\mathbf{k}) + \right. \\ & + \sum_{\mathbf{k}}' \langle \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}} \rangle^t \{ \Phi_{pp}(\mathbf{k}) \}^{-1} \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}}' \langle \bar{n}(\mathbf{k}) \rangle^t \{ \Phi_{\bar{n}\bar{n}}(\mathbf{k}) \}^{-1} \bar{n}(\mathbf{k}) + \\ & + \sum_{\mathbf{k}}' \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1} \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} + \\ & \left. + \sum_{\mathbf{k}}' \langle \hat{h}_S(\mathbf{k}) \rangle^t \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1} \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau \hat{h}_S(\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где мы ввели новые ортогонализированные динамические переменные

$$\begin{aligned} \hat{h}_L(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}_h^S)(1 - \mathcal{P}_{\bar{n}})(1 - \mathcal{P}_M) \widehat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{k}), \\ \hat{h}_S(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}_{\bar{n}})(1 - \mathcal{P}_M) \widehat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{k}), \\ \bar{n}(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}_M) \hat{n}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\mathcal{P}_M$, $\mathcal{P}_{\bar{n}}$, $\mathcal{P}_h^S$ – проекционные операторы типа операторов Мори, действующие по правилам

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M \dots &= \sum_{\mathbf{k}}' \left(\dots, \widehat{\mathbf{M}}(-\mathbf{k}) \right)_0 \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \\ \mathcal{P}_{\bar{n}} \dots &= \sum_{\mathbf{k}}' \left(\dots, \bar{n}(-\mathbf{k}) \right)_0 \{ \Phi_{\bar{n}\bar{n}}(\mathbf{k}) \}^{-1} \bar{n}(\mathbf{k}), \\ \mathcal{P}_h^S \dots &= \sum_{\mathbf{k}}' \left(\dots, \hat{h}_S(-\mathbf{k}) \right)_0 \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1} \hat{h}_S(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

и обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M \mathcal{P}_M &= \mathcal{P}_M, & \mathcal{P}_{\bar{n}} \mathcal{P}_{\bar{n}} &= \mathcal{P}_{\bar{n}}, & \mathcal{P}_h^S \mathcal{P}_h^S &= \mathcal{P}_h^S, \\ \mathcal{P}_M (1 - \mathcal{P}_M) &= 0, & \mathcal{P}_{\bar{n}} (1 - \mathcal{P}_{\bar{n}}) &= 0, & \mathcal{P}_h^S (1 - \mathcal{P}_h^S) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Естественно, что при этом

$$\mathcal{P}_M \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{P}_{\bar{n}} \bar{n}(\mathbf{k}) = \bar{n}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{P}_h^S \hat{h}_S(\mathbf{k}) = \hat{h}_S(\mathbf{k}).$$

Отметим, что проекционные операторы $\mathcal{P}_M$, $\mathcal{P}_{\bar{n}}$, $\mathcal{P}_h^S$ возникли как следствие исключения в выражении (4.1) параметров

$$\delta [\beta_s \mathbf{b}], \quad \delta \left[\beta_L \left(\mu - \frac{m}{2} v^2 \right) \right], \quad \delta [\beta_L \mathbf{v}], \quad \delta \beta_S, \quad \delta \beta_L$$

с помощью условий согласований (2.21), что сопровождалось переходом от базисных переменных сокращенного описания $\hat{n}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{k})$, $\hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{k})$, $\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k})$ к ортогональному базису переменных $\bar{n}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$, $\hat{h}_L(\mathbf{k})$, $\hat{h}_S(\mathbf{k})$, $\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k})$. Для последних переменных матрица, элементами которой выступают равновесные корреляционные функции, является уже диагональной, т.е.

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \Phi_{\bar{n}\bar{n}}(\mathbf{k}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{pp}(\mathbf{k}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{hh}^L(\mathbf{k}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{n}\bar{n}}(\mathbf{k}) &= (\bar{n}(\mathbf{k}), \bar{n}(-\mathbf{k}))_0, & \Phi_{pp}(\mathbf{k}) &= (\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{p}}(-\mathbf{k}))_0, \\ \Phi_{hh}^L(\mathbf{k}) &= (\hat{h}_L(\mathbf{k}), \hat{h}_L(-\mathbf{k}))_0, & \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) &= (\hat{h}_S(\mathbf{k}), \hat{h}_S(-\mathbf{k}))_0, \\ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) &= (\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \widehat{\mathbf{M}}(-\mathbf{k}))_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Усреднение двух операторов $(\dots, \dots)_0$ соответствует определению корреляционных функций по Кубо:

$$(\hat{A}, \hat{B})_0 = \int d\Gamma_N \left\{ \left(\hat{A} \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau \hat{B} \varrho_0^{-\tau} \right) \varrho_0(x^N) \right\}.$$

Заметим, что выбор ортогональных переменных в виде (4.4) не является единственным возможным [23, 24]. В зависимости от исследуемой задачи та или иная процедура

ортогонализации может быть более предпочтительной с точки зрения связи равновесных корреляционных функций в гидродинамическом пределе с термодинамическими характеристиками системы, определенными в удобном для рассмотрения статистическом ансамбле. При этом конечные результаты для физических величин не зависят от определения набора ортогонализированных переменных.

Подставляя квазиравновесный статистический оператор $\varrho_q(x^N; t)$ в виде (4.3) в выражение (2.22), находим НСО жидкого магнетика в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \varrho(x^N; t) = & \varrho_q(x^N; t) + \sum_{\mathbf{k}}' \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} T_0(t, t') \left[I_{\bar{n}}(\mathbf{k}; t') \{ \Phi_{\bar{n}\bar{n}}(\mathbf{k}) \}^{-1} \langle \bar{n}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} + \right. \\ & + I_p(\mathbf{k}) \{ \Phi_{pp}(\mathbf{k}) \}^{-1} \langle \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} + I_h^L(\mathbf{k}) \{ \Phi_{hh}^L(\mathbf{k}) \}^{-1} \langle \hat{h}_L(\mathbf{k}) \rangle^{t'} \Big] \varrho_0(x^N) + \\ & + \sum_{\mathbf{k}}' \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} T_0(t, t') \left[\int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau I_M(\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1} \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} + \right. \\ & \left. + \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau I_h^S(\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1} \langle \hat{h}_S(\mathbf{k}) \rangle^{t'} \right] \varrho_0(x^N), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\bar{n}}(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}) \dot{\bar{n}}(\mathbf{k}), & I_p(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}) \dot{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{k}), \\ I_h^L(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}) \dot{\hat{h}}_L(\mathbf{k}), & I_h^S(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}) \dot{\hat{h}}_S(\mathbf{k}), \\ I_M(\mathbf{k}) &= (1 - \mathcal{P}) \dot{\widehat{\mathbf{M}}}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

— соответствующие обобщенные потоки, а

$$T_0(t, t') = \exp \left\{ -(t - t')(1 - \mathcal{P}) i \hat{L}_N \right\} \quad (4.11)$$

является оператором временной эволюции с учетом проецирования. Проекционный оператор $\mathcal{P}$ в выражениях для обобщенных потоков (4.10) и для оператора эволюции (4.11) определен следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \dots = & \sum_{\mathbf{k}}' \left[(\dots, \bar{n}(-\mathbf{k}))_0 \{ \Phi_{\bar{n}\bar{n}}(\mathbf{k}) \}^{-1} \bar{n}(\mathbf{k}) + (\dots, \hat{\mathbf{p}}(-\mathbf{k}))_0 \{ \Phi_{pp}(\mathbf{k}) \}^{-1} \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) + \right. \\ & + (\dots, \hat{h}_L(\mathbf{k}))_0 \{ \Phi_{hh}^L(\mathbf{k}) \}^{-1} \hat{h}_L(\mathbf{k}) + (\dots, \widehat{\mathbf{M}}(-\mathbf{k}))_0 \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) + \\ & \left. + (\dots, \hat{h}_S(-\mathbf{k}))_0 \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1} \hat{h}_S(\mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Он обладает всеми свойствами проекционных операторов (см. (4.6)). С помощью НСО (4.9) нетрудно получить систему уравнений переноса для средних значений динамических переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{b}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\tilde{\Omega}_{bb}(\mathbf{k}) \langle \tilde{b}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\tilde{\Omega}_{bc}(\mathbf{k}) \langle \tilde{c}(\mathbf{k}) \rangle^t + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \tilde{\varphi}_{bb}(\mathbf{k}; t, t') \langle \tilde{b}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} + \\ + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{bc}(\mathbf{k}; t, t') \langle \tilde{c}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{c}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\tilde{\Omega}_{cb}(\mathbf{k}) \langle \tilde{b}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\tilde{\Omega}_{cc}(\mathbf{k}) \langle \tilde{c}(\mathbf{k}) \rangle^t + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \tilde{\varphi}_{cb}(\mathbf{k}; t, t') \langle \tilde{b}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} + \\ + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{cc}(\mathbf{k}; t, t') \langle \tilde{c}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tilde{b}(\mathbf{k}) = \{ \bar{n}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}), \hat{h}_L(\mathbf{k}) \} \quad (4.15)$$

есть вектор-столбец, состоящий из динамических переменных “жидкостной” подсистемы и

$$\tilde{c}(\mathbf{k}) = \{ \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \hat{h}_S(\mathbf{k}) \} \quad (4.16)$$

— вектор-столбец, компонентами которого выступают операторы динамических переменных квантовой “магнитной” подсистемы. Частотные матрицы $i\tilde{\Omega}_{bb}(\mathbf{k})$, $i\tilde{\Omega}_{bc}(\mathbf{k})$, $i\tilde{\Omega}_{cb}(\mathbf{k})$, $i\tilde{\Omega}_{cc}(\mathbf{k})$ в общем случае имеют следующую структуру:

$$i\tilde{\Omega}_{bb}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} i\Omega_{\bar{n}\bar{n}}(\mathbf{k}) & i\Omega_{\bar{n}p}(\mathbf{k}) & i\Omega_{\bar{n}h}^L(\mathbf{k}) \\ i\Omega_{p\bar{n}}(\mathbf{k}) & 0 & i\Omega_{ph}^L(\mathbf{k}) \\ i\Omega_{h\bar{n}}^L(\mathbf{k}) & i\Omega_{hp}^L(\mathbf{k}) & i\Omega_{hh}^L(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$i\tilde{\Omega}_{bc}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} i\Omega_{\bar{n}M}(\mathbf{k}) & i\Omega_{\bar{n}h}^S(\mathbf{k}) \\ i\Omega_{pM}(\mathbf{k}) & i\Omega_{ph}^S(\mathbf{k}) \\ i\Omega_{hM}^L(\mathbf{k}) & i\Omega_{hh}^{LS}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$i\tilde{\Omega}_{cb}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} i\Omega_{M\bar{n}}(\mathbf{k}) & i\Omega_{Mp}^L(\mathbf{k}) & i\Omega_{Mh}^L(\mathbf{k}) \\ i\Omega_{h\bar{n}}^S(\mathbf{k}) & i\Omega_{hp}^S(\mathbf{k}) & i\Omega_{hh}^{SL}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$i\tilde{\Omega}_{cc}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} i\Omega_{MM}(\mathbf{k}) & i\Omega_{Mh}^S(\mathbf{k}) \\ i\Omega_{hM}^S(\mathbf{k}) & i\Omega_{hh}^{SS}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Каждый элемент этих матриц определяется согласно выражению

$$i\Omega_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = (i\hat{L}_N \hat{\alpha}(\mathbf{k}), \hat{\beta}(-\mathbf{k}))_0 (\hat{\beta}(\mathbf{k}), \hat{\beta}(-\mathbf{k}))_0^{-1} \quad (4.21)$$

через соответствующие равновесные корреляционные функции, где

$$\hat{\alpha}(\mathbf{k}), \hat{\beta}(\mathbf{k}) = \left\{ \bar{n}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}), \hat{h}_L(\mathbf{k}), \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \hat{h}_S(\mathbf{k}) \right\}.$$

Структура матриц $\tilde{\varphi}_{bb}(\mathbf{k}; t, t')$, $\tilde{\varphi}_{bc}(\mathbf{k}; t, t')$, $\tilde{\varphi}_{cb}(\mathbf{k}; t, t')$, $\tilde{\varphi}_{cc}(\mathbf{k}; t, t')$ аналогична (4.17)–(4.20), т.е.

$$\tilde{\varphi}_{bb}(\mathbf{k}; t, t') = \begin{bmatrix} \varphi_{\bar{n}\bar{n}} & \varphi_{\bar{n}p} & \varphi_{\bar{n}h}^L \\ \varphi_{p\bar{n}} & \varphi_{pp} & \varphi_{ph}^L \\ \varphi_{h\bar{n}}^L & \varphi_{hp}^L & \varphi_{hh}^{LL} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\tilde{\varphi}_{bc}(\mathbf{k}; t, t') = \begin{bmatrix} \varphi_{\bar{n}M} & \varphi_{\bar{n}h}^S \\ \varphi_{pM} & \varphi_{ph}^S \\ \varphi_{hM}^L & \varphi_{hh}^{LS} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\tilde{\varphi}_{cb}(\mathbf{k}; t, t') = \begin{bmatrix} \varphi_{M\bar{n}} & \varphi_{Mp} & \varphi_{Mh}^L \\ \varphi_{h\bar{n}}^S & \varphi_{hp}^S & \varphi_{hh}^{SL} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\tilde{\varphi}_{cc}(\mathbf{k}; t, t') = \begin{bmatrix} \varphi_{MM} & \varphi_{Mh}^S \\ \varphi_{hM}^S & \varphi_{hh}^{SS} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Элементами матриц (4.22)–(4.25) являются обобщенные функции памяти, описывающие диссипативные процессы в системе. Они могут быть определены следующим образом:

$$\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}; t, t') = (I_\alpha(\mathbf{k}), T_0(t, t') I_\beta(-\mathbf{k}))_0 \left(\hat{\beta}(\mathbf{k}), \hat{\beta}(-\mathbf{k}) \right)_0^{-1}, \quad (4.26)$$

где

$$I_\alpha(\mathbf{k}), I_\beta(\mathbf{k}) = \{ I_{\bar{n}}(\mathbf{k}), I_p(\mathbf{k}), I_n^L(\mathbf{k}), I_M(\mathbf{k}), I_h^S(\mathbf{k}) \}$$

– обобщенные потоки соответствующих переменных сокращенного описания. Система матричных уравнений (4.13) и (4.14) описывает молекулярную магнитогидродинамику жидких магнетиков во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}; t)$ с учетом теплообмена между “жидкостной” и “магнитной” подсистемами. Уравнения записаны в общей форме, которая допускает рассмотрение некоторых предельных случаев, известных в литературе.

4.1. Простая классическая жидкость. Если формально пренебречь переменными “магнитной” подсистемы (4.16), то система матричных уравнений (4.13), (4.14) переходит в уравнения молекулярной гидродинамики, которые похожи по форме на уравнения, известные для простой классической жидкости [27–29]. При этом уравнение (4.14)

отсутствует, а в (4.13) матрицы $i\tilde{\Omega}_{bb}(\mathbf{k})$ и $\varphi_{I_b I_b}(\mathbf{k}; t, t')$ преобразуются в известные матрицы $i\tilde{\Omega}^H(\mathbf{k})$, $\varphi^H(\mathbf{k}; t, t')$, где

$$i\tilde{\Omega}^H(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & i\tilde{\Omega}_{np}^H(\mathbf{k}) & 0 \\ i\tilde{\Omega}_{pn}^H(\mathbf{k}) & 0 & i\tilde{\Omega}_{ph}^H(\mathbf{k}) \\ 0 & i\tilde{\Omega}_{hp}^H(\mathbf{k}) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

с матричными элементами

$$i\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}^H(\mathbf{k}) = \langle iL_N^L \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \hat{\beta}(-\mathbf{k}) \rangle_0 \langle \hat{\beta}(\mathbf{k}) \hat{\beta}(-\mathbf{k}) \rangle_0^{-1}. \quad (4.28)$$

В выражении (4.28) $\hat{\alpha}(\mathbf{k}), \hat{\beta}(\mathbf{k}) = \{\hat{n}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}), \hat{h}(\mathbf{k})\}$ и

$$\hat{h}(\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{k}) - \langle \hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{k}) \hat{n}(-\mathbf{k}) \rangle_0 \langle \hat{n}(\mathbf{k}) \hat{n}(-\mathbf{k}) \rangle_0^{-1} \hat{n}(\mathbf{k}) \quad (4.29)$$

есть фурье-компонента плотности энтальпии.

Матрица функций памяти

$$\varphi^H(\mathbf{k}; t, t') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{pp}^H(\mathbf{k}; t, t') & \varphi_{ph}^H(\mathbf{k}; t, t') \\ 0 & \varphi_{hp}^H(\mathbf{k}; t, t') & \varphi_{hh}^H(\mathbf{k}; t, t') \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

имеет отличные от нуля элементы

$$\begin{aligned} \varphi_{pp}^H(\mathbf{k}; t, t') &= \langle (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{k}) T_0^H(t, t') (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{\mathbf{p}}}(-\mathbf{k}) \rangle_0 \Phi_{pp}^{-1}(\mathbf{k}), \\ \varphi_{ph}^H(\mathbf{k}; t, t') &= \langle (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{k}) T_0^H(t, t') (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{h}}(-\mathbf{k}) \rangle_0 \Phi_{hh}^{-1}(\mathbf{k}), \\ \varphi_{hp}^H(\mathbf{k}; t, t') &= \langle (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{h}}(\mathbf{k}) T_0^H(t, t') (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{\mathbf{p}}}(-\mathbf{k}) \rangle_0 \Phi_{pp}^{-1}(\mathbf{k}), \\ \varphi_{hh}^H(\mathbf{k}; t, t') &= \langle (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{h}}(\mathbf{k}) T_0^H(t, t') (1 - \mathcal{P}_H) \dot{\hat{h}}(-\mathbf{k}) \rangle_0 \Phi_{hh}^{-1}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Эти элементы определяют обобщенные коэффициенты переноса, а также обобщенный коэффициент, описывающий взаимодействие вязких и тепловых процессов [29, 30]. В выражениях (4.31) проекционный оператор Мори $\mathcal{P}_H$, а также оператор эволюции во времени $T_0^H(t, t')$ получаются формальным пренебрежением в (4.11) и (4.12) переменными “магнитной” подсистемы $\hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{k})$ и $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{k})$. Заметим, что в этом случае сходство уравнений переноса для простой и магнитной жидкостей является в значительной степени формальным. В действительности имеют место значительные отличия, которые наиболее четко проявляются при выполнении расчетов. В частности, равновесное усреднение для магнитной жидкости приведет к дополнительным слагаемым, которые отсутствуют в случае простой жидкости. Кроме этого, как указывалось раньше, плотность “жидкостной” части энергии не является консервативной величиной, в связи с чем теплообмен в магнитной жидкости имеет свои особенности.

4.2. Магнетик во внешнем поле. Если в системе матричных уравнений (4.13), (4.14) формально пренебречь переменными “жидкостной” подсистемы $\hat{n}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathcal{E}}_L(\mathbf{k})$, то в результате получим замкнутую систему уравнений для переменных “магнитной” подсистемы $\langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t$ и $\langle \hat{h}'_S(\mathbf{k}) \rangle^t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\Omega_{MM}^S(\mathbf{k}) \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\Omega_{Mh}^S(\mathbf{k}) \langle \hat{h}'_S(\mathbf{k}) \rangle^t + \\ + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{MM}^S(\mathbf{k}; t, t') \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} + \\ + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{Mh}^S(\mathbf{k}; t, t') \langle \hat{h}'_S(\mathbf{k}) \rangle^{t'} = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{h}'_S(\mathbf{k}) \rangle^t - i\Omega_{hM}^S(\mathbf{k}) \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\Omega_{hh}^S(\mathbf{k}) \langle \hat{h}'_S(\mathbf{k}) \rangle^t + \\ + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{hM}^S(\mathbf{k}; t, t') \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} + \\ + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{hh}^S(\mathbf{k}; t, t') \langle \hat{h}'_S(\mathbf{k}) \rangle^{t'} = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где элементы частотной матрицы $i\tilde{\Omega}^S(\mathbf{k})$ имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} i\Omega_{MM}^S(\mathbf{k}) &= \left(iL_N^S \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \widehat{\mathbf{M}}(-\mathbf{k}) \right)_0 \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1}, \\ i\Omega_{Mh}^S(\mathbf{k}) &= \left(iL_N^S \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \hat{h}'_S(-\mathbf{k}) \right)_0 \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1}, \\ i\Omega_{hM}^S(\mathbf{k}) &= \left(iL_N^S \hat{h}'_S(\mathbf{k}), \widehat{\mathbf{M}}(-\mathbf{k}) \right)_0 \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1}, \\ i\Omega_{hh}^S(\mathbf{k}) &= \left(iL_N^S \hat{h}'_S(\mathbf{k}), \hat{h}'_S(-\mathbf{k}) \right)_0 \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Оператор $\hat{h}'_S(\mathbf{k})$ в этом случае определен выражением

$$\hat{h}'_S(\mathbf{k}) = (1 - \mathcal{P}_M) \hat{\mathcal{E}}_S(\mathbf{k}). \quad (4.35)$$

Соответственно функции памяти

$$\begin{aligned} \varphi_{MM}^S(\mathbf{k}; t, t') &= \left\langle (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\widehat{\mathbf{M}}}(\mathbf{k}) T_0^S(t, t') \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\widehat{\mathbf{M}}}(-\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} \right\rangle_0 \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1}, \\ \varphi_{Mh}^S(\mathbf{k}; t, t') &= \left\langle (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\widehat{\mathbf{M}}}(\mathbf{k}) T_0^S(t, t') \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\hat{h}}'_S(-\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} \right\rangle_0 \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1}, \\ \varphi_{hM}^S(\mathbf{k}; t, t') &= \left\langle (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\hat{h}}'_S(\mathbf{k}) T_0^S(t, t') \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\widehat{\mathbf{M}}}(-\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} \right\rangle_0 \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1}, \\ \varphi_{hh}^S(\mathbf{k}; t, t') &= \left\langle (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\hat{h}}'_S(\mathbf{k}) T_0^S(t, t') \int_0^1 d\tau \varrho_0^\tau (1 - \mathcal{P}_S) \dot{\hat{h}}'_S(-\mathbf{k}) \varrho_0^{-\tau} \right\rangle_0 \{ \Phi_{hh}^S(\mathbf{k}) \}^{-1} \end{aligned} \quad (4.36)$$

выступают как ядра переноса для “магнитной” подсистемы. Проекционный оператор Мори $\mathcal{P}_S$ и оператор временной эволюции $T_0^S(t, t')$ получаются из (4.11) и (4.12) формальным пренебрежением переменными “жидкостной” подсистемы $\hat{n}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$, $\hat{h}_L(\mathbf{k})$ и определяются с помощью переменных сокращенного описания “магнитной” подсистемы $\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k})$, $\hat{h}'_S(\mathbf{k})$.

В случае изотермических процессов, т.е. при пренебрежении процессами переноса энергии “магнитной” подсистемы ($\hat{h}_S(\mathbf{k}) = 0$), из системы уравнений (4.32), (4.33) получим уравнение для среднего значения магнитного момента $\langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t$ – обобщенное уравнение Блоха во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{k}; t)$, выводу которого посвящены, в частности, работы [27, 31]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t - i\tilde{\Omega}_{MM}^S(\mathbf{k}) \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t + \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon(t'-t)} \varphi_{MM}^S(\mathbf{k}; t, t') \langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^{t'} = 0. \quad (4.37)$$

Выражения для $i\tilde{\Omega}_{MM}^S(\mathbf{k})$ и $\varphi_{MM}^S(\mathbf{k}; t, t')$ в (4.37) аналогичны по своей структуре выражениям (4.34) и (4.36) с той лишь разницей, что для оператора проецирования имеем

$$\mathcal{P} \dots = \sum_{\mathbf{k}}' (\dots \widehat{\mathbf{M}}(-\mathbf{k}))_0 \{ \Phi_{MM}(\mathbf{k}) \}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}).$$

Если рассмотреть случай слабого внешнего поля $\mathbf{B}(\mathbf{k}; t)$ и записать уравнение (4.37) в линейном приближении по $\mathbf{B}(\mathbf{k}; t)$, учитывая, что

$$\langle \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) \rangle^t = - \left(\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{k}), \mathbf{M}(-\mathbf{k}) \right) \delta \mathbf{b}(\mathbf{k}; t), \quad (4.38)$$

где $\delta \mathbf{b}(\mathbf{k}; t) = \mathbf{b}(\mathbf{k}; t) - \mathbf{B}(\mathbf{k}; t)$, то получим линеаризованное уравнение для магнитного момента системы. Это уравнение было ранее получено и проанализировано в работе [27]. Отметим, что в отличие от твердотельных магнетиков уравнение (4.37), а также система уравнений (4.32) и (4.33) учитывают особенности, связанные с наличием жидкостной структуры. В частности, усреднение всех величин проводится по полному статистическому оператору системы $\varrho_0(x^N)$. Более того, понятно, что динамика “жидкостной” подсистемы будет также влиять на “магнитную” подсистему. Убедиться в этом можно путем решения системы уравнений (4.13), (4.14) относительно средних значений переменных “жидкостной” подсистемы. Понятно, что при этом получают уравнения, аналогичные уравнениям (4.32) и (4.33). Однако для соответствующих функций памяти возникает более тонкая структура, которая учитывает в явном виде динамику “жидкостной” подсистемы.

Суммируя результаты данной работы, отметим некоторые наиболее важные моменты. Используя метод НСО, мы получили обобщенные уравнения переноса для магнитной жидкости, в которых учитываются в явном виде процессы теплообмена между

“жидкостной” и “магнитной” подсистемами. На этой основе возможно дальнейшее более детальное исследование динамических свойств реальных феррофлюидов. Проанализированы некоторые наиболее простые предельные случаи, в которых система уравнений переноса может быть записана в формально более простом виде. Проведено сравнение с ранее известными в литературе результатами. При этом ясно, что формальное упрощение уравнений не решает задачу по существу. Однако такое упрощение может быть полезным в случае, если речь идет об изучении лишь отдельных свойств системы без конкретизации физических особенностей, обусловленных влиянием той или иной из подсистем.

В следующей работе мы проведем анализ коллективных мод жидкого магнетика исходя из системы уравнений переноса (4.13), (4.14), а также проанализируем систему уравнений для временных корреляционных функций, построенных на переменных $\bar{n}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$, $\hat{h}_L(\mathbf{k})$, $\hat{h}_S(\mathbf{k})$, $\mathbf{M}(\mathbf{k})$. Это даст возможность исследовать динамический структурный фактор магнитной жидкости, а также магнитный динамический структурный фактор с учетом магнитострикции и взаимовлияния обмена между “жидкостной” и “магнитной” подсистемами.

Список литературы

- [1] К. Хандрих, С. Кобе. Аморфные ферро- и ферримангнетики. М.: Мир, 1982.
- [2] 6th International Conference on Magnetic Fluids: Programme and Abstracts (Paris, 1992, July 20–24). Paris: Univ. Curie Press, 1992.
- [3] K. Shinichi, F. Fumio, O. Masaaki. Exp. Therm. and Fluids Sci. 1992. V. 5. № 5. P. 641.
- [4] Y. Ido, T. Tanahashi. J. Phys. Soc. Jap. 1991. V. 60. № 2. P. 466.
- [5] Y. Ido, T. Tanahashi, M. Kiya. A complete set of basic equation for magnetic fluids. In: 6th International Conference on Magnetic Fluids: Programme and Abstracts (Paris, 1992, July 20–24). Paris: Univ. Curie Press, 1992.
- [6] C. Saluena, A. Peves-Madrid, J. M. Rubi. The viscosity of a suspension of elongated magnetic dipoles. In: 6th International Conference on Magnetic Fluids: Programme and Abstracts (Paris, 1992, July 20–24). Paris: Univ. Curie Press, 1992.
- [7] Yu. L. Raikher, V. V. Rusakov. Orientational dynamics of a magnetic fluid with a viscoelastic base. In: 6th International Conference on Magnetic Fluids: Programme and Abstracts (Paris, 1992, July 20–24). Paris: Univ. Curie Press, 1992.
- [8] B. N. Felderhof, R. B. Jones. Phys. Rev. E. 1993. V. 48. № 2. P. 1142.
- [9] B. N. Felderhof, R. B. Jones. Phys. Rev. E. 1993. V. 48. № 2. P. 1084.
- [10] T. K. Kalaf, T. M. Wu. Phys. Rev. B. 1978. V. 18. № 1. P. 448.
- [11] M. Muller, H.-J. Guntherodt. J. Magn. Mater. 1980. V. 15. № 18. P. 1345.
- [12] И. А. Вакарчук, Ю. К. Рудаковский, Г. В. Понедилок. Микроскопическая теория жидкого состояния системы магнитных атомов. Препринт ИТФ-80-135Р. Киев: ИТФ, 1980.
- [13] И. А. Вакарчук, Ю. К. Рудаковский, Г. В. Понедилок. УФЖ. 1982. Т. 27. № 9. С. 1414.
- [14] И. А. Вакарчук, Г. В. Понедилок, Ю. К. Рудаковский. ТМФ. 1984. Т. 58. № 3. С. 445.
- [15] И. А. Вакарчук, И. Ф. Марголыч. Теория многосортных неупорядоченных магнетиков. Свободная энергия. Препринт ИТФ-83-163Р. Киев: ИТФ, 1984.
- [16] И. А. Вакарчук, И. Ф. Марголыч. ТМФ. 1987. Т. 72. № 3. С. 462.

- [17] *И. А. Ахиезер, И. Т. Ахиезер.* ЖЭТФ. 1984. Т. 86. № 1. С. 120.
- [18] *И. А. Ахиезер, И. Т. Ахиезер.* ФТТ. 1987. Т. 29. № 7. С. 2167.
- [19] *V. I. Kalikmanov.* Physica A. 1992. V. 183. P. 25.
- [20] *И. М. Мрыглов, М. В. Токарчук.* Уравнения обобщенной гидродинамики для жидких магнетиков. Препринт ИФКС-93-5У. Киев: ИФКС АН Украины, 1993.
- [21] *I. M. Mryglod, M. V. Tokarchuk.* Cond. Math. Phys. 1993. № 2. P. 102.
- [22] *И. М. Мрыглов, М. В. Токарчук.* УФЖ. 1994. Т. 39. № 7, 8. С. 838.
- [23] *I. M. Mryglod, M. V. Tokarchuk, R. Folk.* Physica A. 1995. V. 220. P. 325.
- [24] *I. M. Mryglod, R. Folk.* Physica A. 1996. V. 234. P. 129.
- [25] *Д. Н. Зубарев.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
- [26] *Д. Н. Зубарев.* Современные методы статистической теории неравновесных процессов. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1980. С. 131.
- [27] *В. П. Калашиников, М. И. Ауслендер.* ФММ. 1977. Т. 44. Вып. 4. С. 710.
- [28] *J. P. Boon, S. Yip.* Molecular Hydrodynamic. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [29] *И. М. Мрыглов, М. В. Токарчук.* К статистической гидродинамике простых жидкостей. В сб.: Вопросы атомной науки и техники. Сер. ядерно-физические исследования. Вып. 3 (24). Харьков: ХФТИ, 1992. С. 134.
- [30] *И. М. Мрыглов, М. В. Токарчук.* К статистической гидродинамике простых жидкостей. Обобщенные коэффициенты переноса. Препринт ИФКС-91-6У. Киев: ИФКС АН Украины, 1991.
- [31] *B. Robertson.* Phys. Rev. 1966. V. 144. P. 151; 1967. V. 160. P. 175.

Поступила в редакцию 15.IX.1997 г.,
после доработки 17.X.1997 г.