Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Муминов, А. М. Хуррамов, О кратности виртуального уровня нижнего края непрерывного спектра одного двухчастичного гамильтониана на решетке, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 3, 329–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:57:48

© 2014 г. М. Э. Муминов^{*†}, А. М. Хуррамов^{*}

О КРАТНОСТИ ВИРТУАЛЬНОГО УРОВНЯ НИЖНЕГО КРАЯ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ОДНОГО ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке со специальными дисперсионными функциями (описывающими перенос частицы с узла на узел), взаимодействующих с помощью выбранного потенциала притяжения. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов $h(k)$ от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$ (где $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор). В зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых левый край непрерывного спектра является многократным и одновременно и виртуальным уровнем, и собственным значением оператора $h(0)$.

Ключевые слова: двухчастичный гамильтониан на решетке, виртуальный уровень, кратность виртуального уровня, собственное значение.

DOI: 10.4213/tmf8624

1. ВВЕДЕНИЕ

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шредингера с помощью выделения энергии движения центра масс, при этом одночастичные связанные состояния суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом [1] (такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса). На решетке выделению центра масс системы отвечает реализация гамильтониана как “расслоенного” оператора, т. е. прямого интеграла семейства операторов $h(k)$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^d$ ($\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор) [2], [3]. Конечность и бесконечность числа дискретных собственных значений многочастичных систем зависят от числа виртуальных

^{*}Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: mmuminov@mail.ru, xurramov@mail.ru

[†]Universiti Teknologi Malaysia, Johor, Malaysia

уровней подсистем. В трехчастичной системе, если две или три двухчастичные подсистемы имеют виртуальные уровни, дискретный спектр гамильтониана бесконечен [4], [5], и если в системе таких подсистем не более одной, то дискретный спектр гамильтониана конечен [6], [7].

Вопрос о существовании виртуального уровня для системы n частиц ($n > 3$) рассматривался в работах Жислина [7], [8]. Для системы двух частиц на решетке существование виртуального уровня изучалось в работах [3], [9], [10] в случае, когда дисперсионные соотношения частиц линейно зависимы и имеют единственный невырожденный минимум в нуле.

Двухчастичные гамильтонианы на решетке исследованы в работах [11], [12]. В работе [11] показано появление уровней связанных состояний, отстоящих от непрерывного спектра на определенное расстояние, при некоторых значениях полного квазиимпульса системы. Спектральные свойства двухчастичного оператора в зависимости от полного квазиимпульса изучены в работе [12].

В работе [3] доказано, что в случае, когда оператор $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень на левом крае существенного спектра, дискретный спектр оператора $h(k)$, лежащий левее существенного спектра, является не пустым при всех $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. В работе [13] в предположении, что дисперсионные соотношения частиц $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$ – линейно зависимые функции, доказано, что из положительности $h(\mathbf{0})$ следует положительность $h(k)$ при всех $k \in \mathbb{T}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (где $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор).

В работе [14] рассмотрена система двух частиц на трехмерной решетке с некоторой дисперсионной функцией, описывающей перенос частицы с узла на соседний узел. Частицы взаимодействуют с помощью потенциала притяжения только в ближайших соседних узлах. Изучены спектральные свойства семейства операторов $h(k)$ в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$. Кроме того, в зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых оператор $h(\mathbf{0})$ имеет простой, двукратный и трехкратный виртуальные уровни в нуле.

Настоящая работа является обобщением работы [14]. Мы изучаем двухчастичный оператор Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, соответствующий системе двух частиц на трехмерной решетке, где в качестве потенциала берется некоторый $6N$ -мерный интегральный оператор и в зависимости от N выбрана дисперсионная функция. Изучается вопрос о существовании или отсутствии собственных значений семейства операторов $h(k)$ в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса k . Кроме того, в зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых оператор $h(\mathbf{0})$ имеет на левом крае существенного спектра одновременно и $3N$ -кратный виртуальный уровень, и $3N$ -кратное собственное значение (см. ниже замечания 1, 2). Следует отметить, что рассматриваемый оператор при $N = 1$ совпадает с оператором из работы [14].

Для существования бесконечного числа связанных состояний (эффекта Ефимова) гамильтониана системы трех частиц, взаимодействующих на трехмерной решетке с помощью парных контактных потенциалов притяжения, важно достижение виртуального уровня в нуле двухчастичных подгамильтонианов $h_\alpha(\mathbf{0})$, $\alpha = 1, 2, 3$, а также положительность $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha = 1, 2, 3$. В работах [9], [10], [15], посвященных эффекту Ефимова, виртуальные уровни двухчастичных подгамильтонианов $h_\alpha(\mathbf{0})$,

$\alpha = 1, 2, 3$, являются простыми (однократными, см. ниже определение 1). Поэтому с учетом результатов настоящей работы появляется новая задача о существовании или отсутствии эффекта Ефимова для трехчастичного дискретного оператора Шредингера в случае, когда двухчастичные подгамильтонианы достигают кратного виртуального уровня в нуле.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка, $(\mathbb{Z}^3)^2 = \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$ – декартова степень $\mathbb{Z}^3$, $l_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^2$. Рассмотрим координатное представление гамильтониана системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с парным короткодействующим потенциалом $\hat{v}(\cdot)$ на трехмерной решетке, действующего в пространстве $l_2((\mathbb{Z}^3)^2)$:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где $\hat{h}_0$ и $\hat{v}$ действуют по правилам

$$\begin{aligned} (\hat{h}_0 \hat{\psi})(n_1, n_2) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} [\hat{\varepsilon}_1(s) \hat{\psi}(n_1 + s, n_2) + \hat{\varepsilon}_2(s) \hat{\psi}(n_1, n_2 + s)], \\ (\hat{v} \hat{\psi})(n_1, n_2) &= \hat{v}(n_1 - n_2) \hat{\psi}(n_1, n_2). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_1(s)$ и $\hat{\varepsilon}_2(s)$ – вещественнозначные четные функции, описывающие перенос частицы с узла на соседний узел,

$$\hat{\varepsilon}_i(s) = \begin{cases} \frac{3}{m_i} & \text{при } s = 0, \\ -\frac{1}{2m_i} & \text{при } s = \pm 2ne_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и функция $\hat{v}(\cdot)$ задается следующей формулой:

$$\hat{v}(s) = \begin{cases} 4\pi^3 \mu_{l\alpha} & \text{при } s = \pm le_\alpha, \quad l = \overline{1, N}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $m_i > 0$ – масса i -й частицы, $i = 1, 2$, $\mu_{l\alpha} > 0$, e_α , $\alpha = 1, 2, 3$, – единичные орты, n – натуральное число.

Отметим, что рассматриваемый оператор $\hat{h}$ является ограниченным и самосопряженным в $l_2((\mathbb{Z}^3)^2)$.

Пусть $T = (-\pi, \pi]$, $L_2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. С помощью преобразования Фурье [3], [13]

$$\mathfrak{F}: l_2((\mathbb{Z}^3)^2) \rightarrow L_2((\mathbb{T}^3)^2), \quad (\mathfrak{F}\hat{f})(p) = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{s \in (\mathbb{Z}^3)^2} \hat{f}(s) e^{-ips}$$

получим импульсное представление h оператора $\hat{h}$, т. е. $h = \mathfrak{F}\hat{h}\mathfrak{F}^{-1}$. Далее разложим оператор h в прямой операторный интеграл

$$h = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus h(k) dk,$$

где $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, – самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v},$$

здесь $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(p - k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \hat{\varepsilon}(s) e^{ips} = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos 2np_i),$$

и $\mathbf{v}$ – интегральный оператор с ядром

$$v(p - q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \hat{v}(s) e^{-i(p-q)s} = \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^3 \mu_{li} \cos l(p_i - q_i).$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [16] следует, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ совпадает с областью значений функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

где $m(k) = \min_p \mathcal{E}_k(p)$, $M(k) = \max_p \mathcal{E}_k(p)$.

Поскольку $\mathbf{v} \geq 0$, то

$$\sup(h(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т. е.

$$\sigma(h(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$n = \begin{cases} \text{НОК}\{2, 4, \dots, 2(N-1)\} & \text{при } N > 1, \\ 1 & \text{при } N = 1, \end{cases}$$

где НОК – наименьшее общее кратное. Следует отметить, что если N представляется в виде степени простого числа, то число $n/2N$ является дробным. В противном случае число $n/2N$ является натуральным.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что $m = m_1 = m_2$ и $k \in \Pi$, где Π есть множество тех $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3$, для которых $k_\alpha = -\pi/2n$ или $k_\alpha = \pi/2n$ хотя бы для одного $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.*

При условии невыполнения предположения 1 положим (см. ниже лемму 3)

$$\mu^0(k) = \frac{1}{d(k; m(k))}, \quad \mu_{Ni}^c(k) = \frac{1}{c_{Ni}(k; m(k))}, \quad \mu_{Ni}^s(k) = \frac{1}{s_{Ni}(k; m(k))}, \quad (1)$$

где

$$d(k; z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \quad c_{Ni}(k; z) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 N s_i ds}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \quad s_{Ni}(k; z) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 N s_i ds}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \quad (2)$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_k(p) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2n k_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2n p_i} \right).$$

Отметим, что если $n/2N$ – натуральное (дробное) число, то $c_{Ni}(k; z) = s_{Ni}(k; z)$ ($c_{Ni}(k; z) > s_{Ni}(k; z)$) [14]. Поэтому $\mu_{Ni}^c(k) < \mu_{Ni}^s(k)$ при дробном $n/2N$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть не выполняется предположение 1, и $n/2N$ – натуральное (дробное) число. Тогда для любого $\mu \in \mathbb{R}_+^{3N}$, $\mu = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)})$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2}, \mu_{l3})$, оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно

$$2 \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^3 \alpha(li) \quad \left(\text{соответственно } 2 \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \alpha(li) + \sum_{i=1}^3 \beta(Ni) \right)$$

собственных значений, лежащих левее существенного спектра, где

$$\alpha(li) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_{li} \in (0, \mu^0(k)], \\ 1 & \text{при } \mu_{li} \in (\mu^0(k), \infty), \end{cases}$$

$$\beta(Ni) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_{Ni} \in (0, \mu_{Ni}^c(k)], \\ 1 & \text{при } \mu_{Ni} \in (\mu_{Ni}^c(k), \mu_{Ni}^s(k)], \\ 2 & \text{при } \mu_{Ni} \in (\mu_{Ni}^s(k), \infty). \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется предположение 1, и $n/2N$ – натуральное число. Тогда для любого $\mu \in \mathbb{R}_+^{3N}$, $\mu = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)})$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2}, \mu_{l3})$, оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно $6N$ собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ – банахово пространство непрерывных (периодических) функций на $\mathbb{T}^3$, и G – интегральный оператор (Бирмана–Швингера) с ядром

$$G(p, q) = v(p - q)(\mathcal{E}_0(q))^{-1}, \quad p, q \in \mathbb{T}^3.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если единица является собственным значением оператора G и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_0(p)} \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3),$$

то говорят, что оператор $h(0)$ имеет виртуальный уровень в нуле (на левом крае существенного спектра). Число таких линейно независимых собственных векторов ψ оператора G назовем кратностью виртуального уровня оператора $h(0)$.

Аналогично лемме 1 работы [14] доказывается

ЛЕММА 1. Пусть $n/2N$ – натуральное (дробное) число, $\mu_{li} \in [0, \mu^0(\mathbf{0})]$ (здесь $\mu_{li} \in [0, \mu^0(\mathbf{0})]$, $\mu_{Ni} \in [0, \mu_N^0(\mathbf{0})]$) для каждого $l \in \{1, \dots, N\}$ ($l \in \{1, \dots, N-1\}$) и $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда оператор $h(\mathbf{0})$ не имеет собственного значения, лежащего левее существенного спектра.

Из леммы 1 следует, что $h(\mathbf{0}) \geq 0$. Поэтому в этом случае из теоремы 1 работы [13] вытекает, что $h(k) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{T}^3$, т. е. оператор $h(k)$ не имеет отрицательного собственного значения при $k \in \mathbb{T}^3$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n/2N$ – натуральное (дробное) число. Тогда для любого значения $\mu \in \mathbb{R}_+^{3N}$, $\mu = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)})$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2}, \mu_{l3})$, нуль является одновременно и кратным собственным значением с кратностью

$$\sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^3 \alpha(li) \quad \left(\text{соответственно} \quad \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \alpha(li) \right),$$

и кратным виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$ и кратностью

$$\sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^3 \alpha(li) \quad \left(\text{соответственно} \quad \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \alpha(li) + \sum_{i=1}^3 \beta(Ni) \right),$$

где

$$\alpha(li) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_{li} \in [0; \mu^0(\mathbf{0})], \\ 1 & \text{при } \mu_{li} \in \{\mu^0(\mathbf{0})\}, \end{cases} \quad \beta(Ni) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_{Ni} \in [0; \mu_{N1}^0(\mathbf{0})], \\ 1 & \text{при } \mu_{Ni} \in \{\mu_{N1}^0(\mathbf{0})\}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях теоремы 3 в случае

$$\sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^3 \alpha(li) = 0 \quad \left(\text{соответственно} \quad \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=1}^3 \alpha(li) + \sum_{i=1}^3 \beta(Ni) = 0 \right)$$

считается, что $z = 0$ не является ни виртуальным уровнем, ни собственным значением оператора $h(\mathbf{0})$. Если число $\mu_{li} = \mu^0(\mathbf{0})$ ($\mu_{li} = \mu^0(\mathbf{0})$, $\mu_{Ni} = \mu_{N1}^0(\mathbf{0})$) для всех $l \in \{1, \dots, N\}$ ($l \in \{1, \dots, N-1\}$) и $i \in \{1, 2, 3\}$, то $z = 0$ является одновременно и $3N$ -кратным виртуальным уровнем, и $3N$ -кратным собственным значением ($3N$ -кратным виртуальным уровнем и $3(N-1)$ -кратным собственным значением) оператора $h(\mathbf{0})$. В этом случае единица является $6N$ -кратным собственным значением оператора G , а соответствующие собственные функции имеют вид $\varphi_{li} = \cos lp_i$, $\psi_{li} = \sin lp_i$, $l = 1, \dots, N$, $i = 1, 2, 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что рассматриваемый оператор при $N = 1$ совпадает с оператором из работы [14]. В этом случае $n/2N = 1/2$.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $H(K)$

В этом разделе докажем теоремы 1 и 2.

Введем оператор $\tilde{h}(k)$, действующий в $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$\tilde{h}(k) = \tilde{h}_0(k) - \mathbf{v},$$

где $\tilde{h}_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2np_i} \right).$$

Определим унитарный оператор $U: L_2(\mathbb{T}^3) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^3)$:

$$(Uf)(p) = f\left(p - \frac{1}{2n}\theta(k)\right),$$

где

$$\begin{aligned} \theta(k) &= (\theta_1(k_1), \theta_2(k_2), \theta_3(k_3)), \\ \theta_i(k_i) &= \arccos \frac{1/m_1 + (1/m_2) \cos 2nk_i}{\sqrt{1/m_1^2 + (2/m_1 m_2) \cos 2nk_i + 1/m_2^2}}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тогда

$$(U^{-1}f)(p) = f\left(p + \frac{1}{2n}\theta(k)\right), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

ЛЕММА 2. Оператор $h(k)$ является унитарно-эквивалентным оператору $\tilde{h}(k)$, т. е.

$$\tilde{h}(k) = U^{-1}h(k)U = \tilde{h}_0(k) - \mathbf{v}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку имеет место представление

$$\mathcal{E}_k(p) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos(2np_i - \theta_i(k_i))} \right],$$

то

$$\begin{aligned} (h_0(k)Uf)(p) &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos(2np_i - \theta_i(k_i))} \right) \times \\ &\quad \times f\left(p - \frac{1}{2n}\theta(k)\right). \end{aligned}$$

Отсюда легко получим

$$(U^{-1}h_0(k)Uf)(p) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2np_i} \right) f(p),$$

т. е.

$$U^{-1}h_0(k)U = \tilde{h}_0(k).$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} (U^{-1}\mathbf{v}Uf)(p) &= U^{-1} \left(\int_{\mathbb{T}^3} v(s-p) f\left(s - \frac{1}{2n}\theta(k)\right) ds \right) = \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} v\left(s - \left(p + \frac{1}{2n}\theta(k)\right)\right) f\left(s - \frac{1}{2n}\theta(k)\right) ds. \end{aligned}$$

В последнем интеграле, произведя замену $s - \theta(k)/2n = t$, имеем

$$(U^{-1}\mathbf{v}Uf)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v(t-p) f(t) dt,$$

т. е.

$$U^{-1}\mathbf{v}U = \mathbf{v}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(s) ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - m(k)} \quad (3)$$

сходится для всех $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку не выполняется предположение 1, то либо $m_1 \neq m_2$ и $k \in \mathbb{T}^3$, либо $m = m_1 = m_2$ и $k \notin \Pi$. В обоих случаях

$$\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2 + \frac{2}{m_1 m_2} (1 + \cos 2nk_i) \neq 0.$$

Поэтому $m(k)$ является невырожденной точкой минимума функции $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ и

$$\{p: \tilde{\mathcal{E}}_k(p) = m(k)\} = \left\{ p = (p_1^{(l)}, p_2^{(m)}, p_3^{(s)}), p_i^{(s)} = \frac{s\pi}{n}, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

Так как минимум функции $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ невырожденный, то интеграл (3) существует для всех $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$.

ЛЕММА 4. Число z , $z < m(k)$, является собственным значением оператора $\tilde{h}(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(k; z) = 0$, где

$$\Delta(k; z) = \begin{cases} \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^3 [1 - \mu_{l\alpha} d(k; z)]^2 & \text{при натуральном } \frac{n}{2N}, \\ \prod_{l=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^3 [1 - \mu_{l\alpha} d(k; z)]^2 [1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; z)] \times \\ \times [1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; z)] & \text{при дробном } \frac{n}{2N}. \end{cases}$$

При этом кратность нуля функции $\Delta(k; \cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $h(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z < m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$, и f – соответствующий собственный вектор, т. е. уравнение

$$\tilde{h}(k)f = zf$$

имеет нетривиальное решение f . Отсюда получаем

$$f = r_0(z)\mathbf{v}f, \quad (4)$$

где $r_0(z)$ – оператор умножения на функцию $1/(\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z)$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{l\alpha} &= \int_{\mathbb{T}^3} \cos ls_\alpha f(s) ds, \\ \psi_{l\alpha} &= \int_{\mathbb{T}^3} \sin ls_\alpha f(s) ds, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Тогда равенство (4) принимает вид

$$f(p) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z} \sum_{l=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \mu_{l\alpha} [\cos lp_\alpha \varphi_{l\alpha} + \sin lp_\alpha \psi_{l\alpha}]. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в формулы (5) и пользуясь четностью функции $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{l\alpha} &= \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{r=1}^N \sum_{\beta=1}^3 \mu_{r\beta} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\beta ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{r\beta}, \\ \psi_{l\alpha} &= \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{r=1}^N \mu_{l\alpha} \frac{\sin ls_\alpha \sin rs_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{r\alpha}, \end{aligned} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Отметим, что по определению числа n число $n/2l$ является натуральным для всех $l = 1, \dots, N-1$. Отсюда следует, что функция $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ является периодической по каждому аргументу, с периодом $\pi/2l$ для всех $l = 1, \dots, N-1$. Покажем, что

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0, \quad l = 1, \dots, 2N-1. \quad (8)$$

Если l – нечетное (четное) число, то заменяя переменные $s_\alpha = t_\alpha + \pi$ ($s_\alpha = t_\alpha + \pi/l$), $s_\beta = t_\beta$, $s_\gamma = t_\gamma$, в интеграле в левой части равенства (8) имеем

$$I_l(z) = - \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos lt_\alpha dt}{\tilde{\mathcal{E}}_k(t) - z} = -I_l(z).$$

Отсюда следует равенство (8). Из равенства (8) получим

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\beta ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad l, r = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Из элементарных равенств

$$\begin{aligned}\cos ls_\alpha \cos rs_\alpha &= \frac{1}{2} [\cos(l+r)s_\alpha + \cos(l-r)s_\alpha], \\ \sin ls_\alpha \sin rs_\alpha &= \frac{1}{2} [\cos(l-r)s_\alpha - \cos(l+r)s_\alpha]\end{aligned}$$

и из равенства (8) получим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds &= 0, \\ \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin ls_\alpha \sin rs_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds &= 0,\end{aligned} \quad l \neq r. \quad (10)$$

В силу (9), (10) равенства (7) приобретают вид

$$\begin{aligned}\varphi_{l\alpha} &= \int_{\mathbb{T}^3} \mu_{l\alpha} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha}, \\ \psi_{l\alpha} &= \int_{\mathbb{T}^3} \mu_{l\alpha} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha},\end{aligned} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

При этом если $z < m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$, то

$$\Delta(k; z) = \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^3 \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \right] \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \right] = 0.$$

Легко видеть, что согласно (9) для всякого $l \leq N$ ($l \leq N-1$) и при натуральном $n/2N$ (при дробном $n/2N$) имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = d(k; z), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Обратно, пусть

$$1 - \mu_{l\alpha} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0 \quad \left(1 - \mu_{l\alpha} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0 \right)$$

для некоторого l и $z < m(k)$. Тогда функция $\cos lp_\alpha / (\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z)$ ($\sin lp_\alpha / (\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z)$) является собственной функцией оператора $\tilde{h}(k)$, соответствующей собственному значению $z < m(k)$. При этом кратность нуля функции $\Delta(k; \cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $\tilde{h}(k)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда для всякого $k \in \mathbb{T}^3$ числа $\mu^0(k)$, $\mu_{Ni}^c(k)$, $\mu_{Ni}^s(k)$, $i = 1, 2, 3$, определенные по формулам (1), являются конечными.

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
 1 - \mu_{l\alpha} d(k; z) &= \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \mu_{l\alpha} \in (0, \mu^0(k)] \text{ для всякого } z \in (-\infty, m(k)], \\ < 0 & \text{при } \mu_{l\alpha} > \mu^0(k), \quad z = m(k), \\ 1 & \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{cases} \\
 1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; z) &= \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu_{N\alpha}^c(k)] \text{ для всякого } z \in (-\infty, m(k)], \\ < 0 & \text{при } \mu_{N\alpha} > \mu_{N\alpha}^c(k), \quad z = m(k), \\ 1 & \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{cases} \\
 1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; z) &= \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu_{N\alpha}^s(k)] \text{ для всякого } z \in (-\infty, m(k)], \\ < 0 & \text{при } \mu_{N\alpha} > \mu_{N\alpha}^s(k), \quad z = m(k), \\ 1 & \text{при } z \rightarrow -\infty. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Заметим, что функции $d(k; \cdot)$, $c_{N\alpha}(k; \cdot)$, $s_{N\alpha}(k; \cdot)$, определенные по формулам (2), являются положительными, монотонно возрастающими на $(-\infty, m(k))$. Поэтому из последних соотношений имеем

$$\begin{aligned}
 1 - \mu_{l\alpha} d(k; \cdot) &= \begin{cases} \text{не имеет нулей} & \text{при } \mu_{l\alpha} \in (0, \mu^0(k)], \\ \text{имеет единственный нуль} & \text{при } \mu_{l\alpha} > \mu^0(k), \end{cases} \\
 1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; \cdot) &= \begin{cases} \text{не имеет нулей} & \text{при } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu_{N\alpha}^c(k)], \\ \text{имеет единственный нуль} & \text{при } \mu_{N\alpha} > \mu_{N\alpha}^c(k), \end{cases} \\
 1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; \cdot) &= \begin{cases} \text{не имеет нулей} & \text{при } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu_{N\alpha}^s(k)], \\ \text{имеет единственный нуль} & \text{при } \mu_{N\alpha} > \mu_{N\alpha}^s(k). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Отсюда и согласно леммам 4, 2 получаем утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть выполняется предположение 1 и $k \in \Pi$, $k_\alpha = \pm\pi/2n$. В этом случае функция $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ не зависит от p_α . Поэтому имеет место

$$\lim_{z \rightarrow m(k)} d(k; z) = +\infty.$$

Отсюда для всякого $\mu_{l\alpha} > 0$ получим

$$\lim_{z \rightarrow m(k)} (1 - \mu_{l\alpha} d(k; z)) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} (1 - \mu_{l\alpha} d(k; z)) = 1.$$

Из непрерывности и монотонности функции $d(k; \cdot)$ следует, что функция $1 - \mu_{l\alpha} d(k; \cdot)$ имеет единственный нуль на $(-\infty, m(k))$. Следовательно, функция $\Delta(k; \cdot)$ имеет $6N$ нулей для всякого $\mu \in \mathbb{R}_+^{3N}$, $\mu = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)})$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2}, \mu_{l3})$.

Согласно леммам 4, 2 получаем утверждение теоремы 2.

4. ВИРТУАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ ОПЕРАТОРА $H(0)$

В этом разделе докажем теорему 3. По определению виртуального уровня оператора $h(0)$ будем изучать уравнение

$$G\varphi = \varphi.$$

Отметим, что функция $\Delta(0; \cdot)$ определена при $z = 0$. Аналогично лемме 4 доказывается

ЛЕММА 5. Число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора G тогда и только тогда, когда

$$\Delta(0; 0) = 0.$$

При этом если $1 - \mu_{l\alpha}d(0; 0) = 0$ ($1 - \mu_{N\alpha}c_{N\alpha}(0; 0) = 0$), то функции $\varphi_{l\alpha}(p) = \cos lp_\alpha$, $\psi_{l\alpha}(p) = \sin lp_\alpha$, $l \in \{1, \dots, N\}$ ($\varphi_{N\alpha}(p) = \cos Np_\alpha$) являются собственными функциями оператора G , соответствующими собственному значению 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если $n/2N$ – натуральное (дробное) число, $\mu_{li} \in [0, \mu^0(0))$ ($\mu_{li} \in [0, \mu^0(0))$, $\mu_{Ni} \in [0, \mu_N^0(0))$) для каждого $l \in \{1, \dots, N\}$ ($l \in \{1, \dots, N-1\}$) и $i \in \{1, 2, 3\}$, то $\Delta(0; 0) > 0$. В этом случае из леммы 5 следует, что число $\lambda = 1$ не является собственным значением оператора G .

Если $n/2N$ – натуральное число и $\mu_{l\alpha} = 1/d(0; 0)$, то из леммы 5 следует, что число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора G , а $\varphi_{l\alpha}(p) = \cos lp_\alpha$ и $\psi_{l\alpha}(p) = \sin lp_\alpha$ являются соответствующими собственными функциями оператора G . Поэтому

$$h(0)f(p) = 0, \quad h(0)g(p) = 0,$$

где $f(p) = \cos lp_\alpha/\mathcal{E}_0(p)$, $g(p) = \sin lp_\alpha/\mathcal{E}_0(p)$. Легко проверить, что $f \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3)$ и $g \in L_2(\mathbb{T}^3)$, т.е. $z = 0$ является одновременно и виртуальным уровнем, и собственным значением оператора $h(0)$.

Если $n/2N$ – дробное число и $\mu_{N\alpha} = \mu_N^0(0)$, то

$$1 - \mu_{N\alpha}c_{N\alpha}(0; 0) = 0, \quad 1 - \mu_{N\alpha}s_{N\alpha}(0; 0) > 0.$$

Следовательно, число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора G , соответствующим собственной функции $\varphi_{N\alpha}(p) = \cos Np_\alpha$ и

$$F(p) = \frac{\cos Np_\alpha}{\mathcal{E}_0(p)} \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3),$$

т.е. $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h(0)$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, *Тр. МИАН*, **69** (1963), 3–122.
- [2] D. C. Mattis, *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.
- [3] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Commun. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115.
- [4] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94**(136):4(8) (1974), 567–593.

- [5] A. V. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [6] Д. Р. Яфаев, *ТМФ*, **25**:2 (1975), 185–195.
- [7] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, *Тр. ММО*, **49** (1986), 95–112.
- [8] Г. М. Жислин, *ТМФ*, **68**:2 (1986), 265–275.
- [9] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.
- [10] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [11] Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, *Функц. анализ и его прилож.*, **39**:1 (2005), 39–55.
- [12] P. A. Faria da Veiga, L. Ioriatti, M. O’Carroll, *Phys. Rev. E*, **66**:1 (2002), 016130, 9 pp.
- [13] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 381–387.
- [14] М. Э. Муминов, А. М. Хуррамов, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 482–496.
- [15] М. Э. Муминов, **159**:2 (2009), 299–317.
- [16] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 11.12.2013