Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Андреев, Л. Д. Давидович, Милена Д. Давидович, Милош Д. Давидович, В. И. Манько, М. А. Манько, Операторный метод вычисления Q -символов и их связь с символами Вейля–Вигнера и символами симплектических томограмм, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 2, 207–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:48:28

© 2014 г.

В. А. Андреев*, Л. Д. Давидович†,
Милена Д. Давидович‡, Милош Д. Давидович§,
В. И. Манько*, М. А. Манько*

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ Q -СИМВОЛОВ И ИХ СВЯЗЬ С СИМВОЛАМИ ВЕЙЛЯ–ВИГНЕРА И СИМВОЛАМИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ТОМОГРАММ

Предложен новый метод вычисления символов Хусими операторов. В отличие от обычного способа, он не требует использования процедуры антинормального упорядочивания. Согласно этому методу операторам координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$ ставятся в соответствие некоторые другие операторы $\hat{X}$, $\hat{P}$, удовлетворяющие тем же коммутационным соотношениям. Найден результат действия операторов $\hat{X}$, $\hat{P}$, а также полиномов, зависящих от этих операторов, на функцию Хусими. После интегрирования полученного выражения по координатам фазового пространства под интегралом получается функция Хусими, умноженная на символ того оператора, который действовал на эту функцию. Для операторов, являющихся степенями операторов $\hat{X}$ или $\hat{P}$, символы Хусими вычислены в явном виде.

Ключевые слова: квантовая механика, функции Хусими, функции Вигнера, симплектические томограммы, масштабное преобразование.

DOI: 10.4213/tmf8632

1. ВВЕДЕНИЕ

Первоначально квантовая механика была сформулирована в терминах векторов, принадлежащих некоторому гильбертову пространству, и операторов, действующих в этом пространстве. В такой формулировке квантовому состоянию сопоставлялся вектор из гильбертова пространства, а наблюдаемой величине – оператор. При этом

---

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.

E-mail: andrvlad@yandex.ru

†Institute of Physics, University of Belgrade, Belgrade, Serbia. E-mail: ljubica@ipb.ac.rs

‡Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Belgrade, Serbia.

E-mail: milena@grf.bg.ac.rs

§Institute for Nuclear Sciences Vinča, University of Belgrade, Belgrade, Serbia.

E-mail: davidovic@vinca.rs

связь между измеряемыми величинами и отвечающими им элементами формализма оказывается опосредованной, и для ее обоснования требуется привлечение аргументов и конструкций, выходящих за рамки исходного формализма. Использование методов функционального анализа значительно отличает квантовую механику от классической и создает трудности как при ее применении, так и при интерпретации. К этим трудностям добавляется и тот факт, что квантовая механика является статистической теорией. Результат измерения в ней можно предсказать, как правило, только с некоторой вероятностью.

Однако оказалось, что статистический характер квантовой механики сближает ее с классической, что именно в этом аспекте она похожа на классические статистические теории. Поэтому с самого начала ее развития предпринимались попытки посмотреть на квантовую механику как на статистическую теорию, избавиться от формализма функционального анализа и сформулировать ее в тех же терминах, которые используются классической статистической механикой.

Основным объектом в классической статистической теории является функция распределения $\rho(q, p)$. Эта величина представляет собой плотность вероятности того, что система находится в состоянии, характеризующемся параметрами q, p . Она определена на фазовом пространстве системы, и ее аргументы имеют смысл координаты и импульса. При этом предполагается, что координаты и импульсы можно измерить совместно. Зная функцию распределения системы, можно вычислять ее различные характеристики, например средние значения тех или иных величин.

Оказалось, что в квантовой механике также возможно построение некоторого аналога $R(q, p)$ классической функции распределения $\rho(q, p)$. Эта функция задана на фазовом пространстве и сопоставляется определенному квантовому состоянию. Понятно, что речь может идти именно об аналоге, поскольку в силу принципа неопределенности квантовые состояния не могут одновременно обладать определенными значениями координаты и импульса. Поэтому функцию $R(q, p)$ нельзя интерпретировать как плотность вероятности того, что квантовое состояние обладает координатой q и импульсом p . Такие функции $R(q, p)$ называют квазивероятностными распределениями. Квазивероятностное распределение определяет квантовое состояние, по нему можно восстановить волновую функцию и матрицу плотности.

В классической статистической механике, для того чтобы найти среднее значение величины, заданной на фазовом пространстве функцией $F(q, p)$, необходимо усреднить эту функцию по вероятности нахождения системы в состоянии (q, p) . Поскольку эта вероятность задается функцией распределения $\rho(q, p)$, то для этого следует вычислить интеграл

$$\langle F \rangle = \int F(q, p) \rho(q, p) dq dp. \quad (1)$$

В квантовой механике мы имеем аналог классической функции распределения – квазивероятностное распределение $R(q, p)$, а наблюдаемой величине $F(q, p)$ отвечает определенный оператор $\hat{A}$. Чтобы продолжить аналогию с классической статистической механикой и иметь возможность вычислять средние значения операторов с помощью формулы, аналогичной формуле (1), надо сопоставить оператору $\hat{A}$ некоторую функцию $A_r(q, p)$, определенную на фазовом пространстве, такую, что среднее значение $\langle \hat{A} \rangle$ оператора $\hat{A}$ на состоянии, задаваемом квазивероятностным

распределением $R(q, p)$, будет вычисляться с помощью интеграла:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int A_r(q, p) R(q, p) dq dp. \quad (2)$$

Функция $A_r(q, p)$ называется символом оператора $\hat{A}$, отвечающим квазивероятностному распределению $R(q, p)$. В квантовой механике существует целый ряд квазивероятностных распределений.

Проблема представления квантовой механики в фазовом пространстве обсуждалась в работах Стратоновича [1]. Свойства квантовых функций распределения рассматривались в обзорах [2]–[4] и в книгах [5], [6].

Наиболее часто используется однопараметрическое семейство квазивероятностных распределений, имеющее вид [7]

$$F(\alpha, s) = \frac{2}{\pi(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s+1}{s-1} \right)^k \langle \alpha, k | \rho | \alpha, k \rangle, \quad (3)$$

где ρ – матрица плотности состояния, а $|\alpha, k\rangle$ – сдвинутое фоковское состояние:

$$|\alpha, k\rangle = \hat{D}(\alpha) |k\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |k\rangle. \quad (4)$$

При значении параметра $s = -1$ выражение (3) дает функцию Хусими–Кано $Q(q, p)$ [8], [9], при $s = 0$ из (3) получается функция Вигнера $W(q, p)$ [10], а при $s = 1$ возникает функция Глаубера–Сударшана $P(q, p)$ [11], [12].

Поскольку существуют различные квазивероятностные распределения, каждый оператор $\hat{A}$ должен обладать несколькими символами. Возникает следующая задача: как находить символ конкретного оператора, если дано некоторое квазивероятностное распределение?

В ряде случаев ответ на этот вопрос известен. В частности, он известен для таких квазивероятностных распределений как функции Вигнера $W(q, p)$, Хусими–Кано $Q(q, p)$ и Глаубера–Сударшана $P(q, p)$ [13]–[15].

Если оператор $\hat{A}$ имеет вид полинома от операторов рождения и уничтожения, то его W -, Q - и P -символы определяются соответственно с помощью операций симметризации, антинормального и нормального упорядочивания. При этом последовательность действий такова: сначала, в соответствии с выбранной операцией, над исходным оператором производятся некоторые действия, в результате которых возникает новый оператор, а затем уже этому новому оператору ставится в соответствие определенная скалярная функция. Эти правила, в принципе, решают задачу нахождения символов полиномиальных операторов, однако если полином велик, то данная процедура может оказаться весьма громоздкой.

В настоящей работе предлагается другой способ вычисления Q -символов. При нашем подходе исходному оператору, который есть полином от операторов координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$, ставится в соответствие некоторый другой дифференциальный оператор. Данное сопоставление осуществляется непосредственным образом, без использования каких-либо операций типа симметризации или упорядочивания. Этим новым оператором мы действуем на функцию Хусими, и в результате такого

действия возникает Q -символ исходного оператора. Важно то, что для осуществления такой операции, т. е. для нахождения Q -символа оператора, не требуется знать в явном виде функцию Хусими конкретного состояния. При наших вычислениях используется только общая структура этих величин.

Если использовать связь между функциями Вигнера и функциями Хусими, данный способ обобщается и на процедуру вычисления W -символов Вейля–Вигнера.

Помимо различных квазивероятностных распределений в квантовой механике существует и настоящая плотность распределения вероятностей, заданная на фазовом пространстве и полностью определяющая квантовое состояние. Ее называют симплектической томограммой квантового состояния [16]. Свойства и значение томограмм обсуждаются в обзоре [17]. Для такой плотности вероятности также можно ввести символ оператора. Мы будем называть его томографическим w -символом. В работе [18] была найдена связь между симплектическими томограммами и функцией Хусими. В настоящей работе мы используем эту связь для вычисления томографических w -символов.

Рассмотрим сначала, как вычисляются W -символы Вейля–Вигнера и Q -символы Хусими при традиционном подходе, т. е. с помощью операций симметризации и антинормального упорядочивания, а затем сравним этот метод с нашим подходом.

2. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА И ПРОБЛЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНИХ

Функция Вигнера $W(q, p)$ выражается через оператор плотности $\hat{\rho}$ следующим образом:

$$W(q, p) = \int \rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) e^{-ipu} du = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \left\langle x + \frac{1}{2}u | \hat{\rho} | x - \frac{1}{2}u \right\rangle e^{-ipu} du, \quad (5)$$

где $\rho(x, x')$ – ядро оператора плотности в координатном представлении.

Пусть $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ – некоторый оператор, имеющий вид функции от операторов координаты и импульса $\hat{q}, \hat{p}$. Ему можно сопоставить функцию $A_W(q, p)$ от двух скалярных переменных q, p , называемую символом Вейля–Вигнера. Она определяется с помощью формулы той же структуры, что и (5):

$$A_W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \left\langle x + \frac{1}{2}u | \hat{A} | x - \frac{1}{2}u \right\rangle e^{-ipu} du. \quad (6)$$

Таким образом, функцию Вигнера можно считать символом Вейля–Вигнера оператора матрицы плотности.

Во многих практически важных случаях символ Вейля–Вигнера можно получить с помощью операции симметричного упорядочивания. Эта операция состоит в том, что выражение для оператора $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ симметризуется по операторам $\hat{q}, \hat{p}$, после чего эти операторы заменяются на скалярные переменные q, p . Так, например, для оператора $\hat{A} = \hat{q}\hat{p}$ имеем

$$\hat{A} = \hat{q}\hat{p} = \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q} + i\hbar) \Rightarrow A = qp + \frac{i\hbar}{2}. \quad (7)$$

Оператор $\hat{A}$ также может быть выражен через операторы рождения и уничтожения $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$. И в этом случае символ Вейля–Вигнера можно вычислить с помощью операции симметричного упорядочивания.

Определив W -символ оператора $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$, можно вычислить среднее значение этого оператора на состоянии $\rho(x, x')$, которому отвечает функция Вигнера (5):

$$\langle \hat{A} \rangle = \int A_W(q, p) W(q, p) dq dp. \quad (8)$$

Перейдем теперь к функции Хусими.

3. ФУНКЦИЯ ХУСИМИ И ПРОБЛЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНИХ

Функция Хусими определяется через оператор плотности состояния и набор когерентных состояний гармонического осциллятора [8], [9]. Пусть имеются некоторое состояние, которое задается оператором плотности $\hat{\rho}$, и когерентное состояние $\langle x | \alpha \rangle$. Тогда функцией Хусими состояния $\hat{\rho}$ называется величина

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | x \rangle \rho(x, y) \langle y | \alpha \rangle dx dy. \quad (9)$$

Здесь $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ – произвольное комплексное число, $\rho(x, y)$ – ядро оператора плотности в координатном представлении, а когерентное состояние $\langle x | \alpha \rangle$ имеет вид

$$\langle x | \alpha \rangle = \left(\frac{1}{\pi a} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{1}{2a} (x - \sqrt{2a}\alpha)^2 + i\alpha\alpha_i \right], \quad (10)$$

где $a = \hbar/m\omega$. Функция Хусими неотрицательна всюду в фазовом пространстве и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq Q(\alpha, \alpha^*) \leq \frac{1}{\pi}. \quad (11)$$

Она нормирована на единицу:

$$\int Q(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = 1. \quad (12)$$

Для комплексного числа α , задающего когерентное состояние, мы часто будем использовать представление

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2a}} q + i\sqrt{\frac{a}{2}} \frac{p}{\hbar}$$

и будем рассматривать функцию Хусими Q как функцию аргументов p и q :

$$Q(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \langle q, p | \hat{\rho} | q, p \rangle, \quad (13)$$

где $|q, p\rangle$ – когерентное состояние, выраженное в переменных q, p . В дальнейшем для простоты мы будем полагать $a = 1$ и $\hbar = 1$.

Рассмотрим когерентное состояние

$$\langle x|\alpha\rangle = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \sqrt{2}\alpha)^2 + i\alpha\alpha_i\right], \quad (14)$$

где $\alpha = (q+ip)/\sqrt{2}$. Используя переменные (q, p) , выражение (14) можно переписать в виде

$$\langle x|q, p\rangle = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 + ipx - \frac{i}{2}qp\right]. \quad (15)$$

Функция Хусими состояния, заданного волновой функцией $\psi(x)$, имеет вид

$$Q(q, p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \int \exp\left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 + ipy\right] \psi^*(y) \psi(x) \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 - ipx\right] dx dy = C \int F dx dy. \quad (16)$$

$$\int Q(q, p) dq dp = 1. \quad (17)$$

С помощью функции Хусими также можно вычислять средние значения операторов, используя формулу (2). Q -символ оператора $\hat{A}$ задается с помощью операции антинормального упорядочивания операторов рождения и уничтожения в выражении для оператора $\hat{A}$. Пусть оператор $\hat{A}$ имеет вид некоторой функции от операторов рождения и уничтожения $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$. Напомним, что эти операторы связаны с операторами координаты и импульса $\hat{q}, \hat{p}$ следующим образом:

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (18)$$

Процедура антинормального упорядочивания состоит в том, что в операторе $\hat{A} = A(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ все операторы рождения ставятся справа от операторов уничтожения. Полученный таким образом оператор будем обозначать $\hat{A}^A(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$. Q -символ оператора $\hat{A}$ можно получить, заменив в выражении $\hat{A}^A(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ оператор уничтожения $\hat{a}$ на комплексную скалярную переменную α , а оператор рождения $\hat{a}^\dagger$ – на комплексно-сопряженную переменную α^* . В результате такой операции получится скалярная функция $A^A(\alpha^*, \alpha)$, которая и является Q -символом оператора $\hat{A}$:

$$A_Q(\alpha^*, \alpha) = A^A(\alpha^*, \alpha).$$

Теперь, используя этот Q -символ оператора $\hat{A}$ и функцию Хусими (16), можно вычислить среднее значение этого оператора по формуле

$$\langle \hat{A}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \int A_Q(\alpha^*, \alpha) Q(\alpha^*, \alpha) d\alpha d\alpha^*. \quad (19)$$

Формулы (8) и (19) позволяют вычислять средние значения операторов в том случае, когда известны их W - и Q -символы. Если оператор $\hat{A}$ имеет вид полинома не очень большой степени от операторов рождения и уничтожения или операторов

координаты и импульса, то, используя операции симметризации или антинормального упорядочивания, можно легко найти явный вид этих символов. Но если эта степень велика, то данная процедура может оказаться весьма громоздкой. В настоящей работе предлагается другой способ вычисления W - и Q -символов операторов полиномиального вида, не использующий процедуры перестановки операторов.

Непосредственно из вида функции (16) следует, что она обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q}Q(q, p) &= C \int (x + y - 2q)F \, dx \, dy, \\ \frac{\partial}{\partial p}Q(q, p) &= C \int i(-x + y)F \, dx \, dy.\end{aligned}\quad (20)$$

Введем оператор

$$\hat{X} = q + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (21)$$

Используя соотношения (20), можно доказать следующую формулу, которая справедлива для оператора $\hat{X}$:

$$\begin{aligned}\int \hat{X}Q(q, p) \, dq \, dp &= C \int xF(x, y) \, dx \, dy \, dq \, dp = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{3/2} \int \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 + ipx \right] \psi(x)x\psi^*(y) \exp \left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 - ipy \right] \, dx \, dy \, dq \, dp = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \int \psi(x)x\psi^*(y)\delta(x - y) \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 - \frac{1}{2}(y - q)^2 \right] \, dx \, dy \, dq = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \int \psi(x)x\psi^*(x)e^{-(x-q)^2} \, dx \, dq = \int \psi(x)x\psi^*(x) \, dx.\end{aligned}\quad (22)$$

Мы получили, что выражение (22) дает среднее значение оператора координаты. Таким образом, чтобы найти среднее значение оператора координаты $\hat{x}$, необходимо подействовать оператором $\hat{X}$ (21) на функцию Хусими соответствующего состояния и проинтегрировать полученный результат по всему фазовому пространству (q, p) .

С другой стороны, имеем

$$\int \hat{X}Q(q, p) \, dq \, dp = \int \left(q + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) Q(q, p) \, dq \, dp = \int qQ(q, p) \, dq \, dp. \quad (23)$$

Сравнивая выражения (22) и (23), получаем

$$\int \hat{X}Q(q, p) \, dq \, dp = \int qQ(q, p) \, dq \, dp = \int \psi(x)x\psi^*(x) \, dx. \quad (24)$$

Равенство (24) показывает, как связаны друг с другом выражения для средних значений оператора координаты, вычисленные с помощью волновой функции и функции Хусими.

Обобщим это выражение на произвольные степени оператора координаты. Пусть мы имеем оператор $(\hat{x})^n$, тогда его среднее значение вычисляется по формуле

$$\langle (\hat{x})^n \rangle = C \int K_n(q) F(x, y) dx dy dq dp. \quad (25)$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \int \hat{X}^2 Q(q, p) dq dp = \int \left(q^2 - \frac{1}{2} \right) Q(q, p) dq dp = \\ &= \int K_2(q) Q(q, p) dq dp = \int \psi(x) x^2 \psi^*(x) dx, \quad K_2(q) = q^2 - \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^3 \rangle &= \int \hat{X}^3 Q(q, p) dq dp = \int \left(q^3 - \frac{3}{2} q \right) Q(q, p) dq dp = \\ &= \int K_3(q) Q(q, p) dq dp = \int \psi(x) x^3 \psi^*(x) dx, \quad K_3(q) = q^3 - \frac{3}{2} q; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^4 \rangle &= \int \hat{X}^4 Q(q, p) dq dp = \int \left(q^4 - 3q^2 + \frac{3}{4} \right) Q(q, p) dq dp = \\ &= \int K_4(q) Q(q, p) dq dp = \int \psi(x) x^4 \psi^*(x) dx, \quad K_4(q) = q^4 - 3q^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

В общем случае имеем

$$\langle \hat{x}^n \rangle = \int (\hat{X})^n Q(q, p) dq dp = \int K_n(q) Q(q, p) dq dp = \int \psi(x) x^n \psi^*(x) dx. \quad (26)$$

Используя метод математической индукции, можно доказать, что полиномы $K_n(q)$ связаны друг с другом рекуррентным соотношением

$$K_{n+1}(q) = qK_n(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} K_n(q), \quad K_0 = 1. \quad (27)$$

Легко получить и общее выражение для символа оператора $\hat{X}^n$:

$$K_n(q) = \sum_{0 \leq s \leq n/2} \frac{(-1)^s n!}{s!(n-2s)! 4^s} q^{n-2s}. \quad (28)$$

Мы видим, что для вычисления среднего значения оператора $(\hat{x})^n$ необходимо подействовать оператором $(\hat{X})^n$ на функцию Хусими в выражении (26). Результат этого действия имеет вид полинома от величины q . Полученное выражение следует проинтегрировать по пространству параметров (q, p) , задающих когерентное состояние (10). Отметим, что функция Хусими $Q(q, p)$ не является собственной функцией оператора $(\hat{X})^n$. Чтобы получить соотношение

$$\int (\hat{X})^n Q(q, p) dq dp = \int K_n(q) Q(q, p) dq dp, \quad (29)$$

необходимо подействовать оператором $(\hat{X})^n$ на функцию $Q(q, p)$, после чего проинтегрировать полученное выражение по координатам фазового пространства.

Аналогичную процедуру можно построить и для вычисления средних значений оператора импульса. Для этого наряду с оператором $\hat{X}$ (21) следует рассмотреть оператор

$$\hat{P} = p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (30)$$

Операторы (21), (30) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{P}, \hat{X}] = -i. \quad (31)$$

Для оператора $\hat{P}$ выполняется соотношение

$$\hat{P}Q = C \int \left(p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) F(x, y) dx dy = C \int (p + iq - ix) F(x, y) dx dy. \quad (32)$$

Интегрируя это выражение по пространству параметров (q, p) , получаем

$$\int \hat{P}Q(q, p) dq dp = C \int p F(x, y) dx dy dq dp. \quad (33)$$

Как и в случае оператора $\hat{X}$, можно найти связь оператора $\hat{P}$ со средним значением оператора импульса:

$$\begin{aligned} \int \hat{P}Q(q, p) dq dp &= C \int p F(x, y) dx dy dq dp = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{3/2} \int \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 + ipx \right] \psi(x) \psi^*(y) \left(i \frac{\partial}{\partial y} \right) \exp \left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 - ipy \right] + \right. \\ &\quad + \exp \left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 - ipe \right] \psi(x) \psi^*(y) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 + ipx \right] - \\ &\quad \left. - i \exp \left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 - ipe \right] \psi(x) \psi^*(y) (x - y) \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 + ipx \right] \right\} dx dy dq dp. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем, что это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{3/2} \int \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 + ipx \right] \psi(x) \times \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 - ipy \right] \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi^*(y) + \\ & + \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 + ipx \right] \exp \left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 - ipy \right] \psi(y) \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) + \\ & \left. + i \exp \left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 - ipy \right] \psi(x) \psi^*(y) (x-y) \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 + ipx \right] \right\} dx dy dq dp. \end{aligned}$$

Интегрируя по dp , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \int \left\{ \psi(x) \delta(x-y) \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - \frac{1}{2}(y-q)^2 \right] \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi^*(y) + \right. \\ & \left. + \psi^*(y) \delta(x-y) \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - \frac{1}{2}(y-q)^2 \right] \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) \right\} dx dy dq = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \int \left\{ \psi(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi^*(x) - \psi^*(x) \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) \right\} \exp \left[-(x-q)^2 \right] dx dq = \\ & = \frac{1}{2} \int \left\{ \psi(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi^*(x) + \psi^*(x) \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) \right\} dx = \\ & = \int \psi(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi^*(x) dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, мы показали, что имеет место равенство

$$\int \hat{P}Q(q, p) dq dp = C \int pF(x, y) dx dy dq dp = \int \psi^*(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx. \quad (35)$$

Соотношение (35) можно доказать другим способом. Среднее значение оператора импульса в состоянии $\psi(x)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= C \int \psi^*(y) \exp \left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy \right] \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx \right] \times \\ & \times \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx dy dp dq. \end{aligned} \quad (36)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= C \int \psi^*(y) \exp \left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy \right] \psi(x) \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx \right] dx dy dp dq = \\ & = C \int \psi^*(y) \exp \left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy \right] \psi(x) \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx \right] (p + iq - ix) dx dy dp dq. \end{aligned} \quad (37)$$

Сравнивая выражение (37) с формулой (32), получаем соотношение (35).

Рассмотрим оператор $\hat{p}^2$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} P^2 Q(q, p) &= C \int \left(p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 F(x, y) dx dy = \\ &= C \int ((p + iq - ix)^2 - 1) F(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (38)$$

Интегрируя по $dp dq$, получим

$$\int \hat{P}^2 Q(q, p) dq dp = C \int \left(p^2 - \frac{1}{2} \right) F(x, y) dx dy dq dp. \quad (39)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^2 \rangle &= C \int \psi^*(y) \exp \left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 + ipy \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 - ipx \right] \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x) dx dy dp dq = \\ &= C \int \psi^*(y) \exp \left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 + ipy \right] \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 - ipx \right] \times \\ &\quad \times (p + iq - ix) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx dy dp dq = \\ &= C \int \psi^*(y) \exp \left[-\frac{1}{2}(y - q)^2 + ipy \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2}(x - q)^2 - ipx \right] ((p + iq - ix)^2 - 1) \psi(x) dx dy dp dq. \end{aligned} \quad (40)$$

Сравнивая выражение (40) с формулами (38) и (39), получаем выражение для среднего значения оператора $\hat{p}^2$:

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int \hat{P}^2 Q(q, p) dq dp = C \int \left(p^2 - \frac{1}{2} \right) F(x, y) dx dy dq dp. \quad (41)$$

Используя метод математической индукции, можно доказать, что

$$\langle \hat{p}^n \rangle = \int (\hat{P})^n Q(q, p) dq dp = C \int L_n(p) F(x, y) dx dy dq dp. \quad (42)$$

Полиномы $L_n(p)$ связаны друг с другом рекуррентным соотношением, аналогичным соотношению (27):

$$L_{n+1}(p) = pL_n(p) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} L_n(p), \quad L_0 = 1. \quad (43)$$

Выражение для символа оператора $(\hat{P})^n$ имеет вид

$$L_n(p) = \sum_{0 \leq s \leq n/2} \frac{(-1)^s n!}{s!(n-2s)!4^s} p^{n-2s}. \quad (44)$$

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть имеется некоторый оператор, имеющий вид полинома от операторов координаты и импульса. В координатном представлении его можно представить как полином от операторов x и $\partial/\partial x$. Точнее говоря, это будет моном

$$\hat{A}\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x \dots x \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (45)$$

Среднее значение этого оператора в состоянии $\psi(x)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle = C \int \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] \times \\ \times A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx dy dp dq. \end{aligned} \quad (46)$$

Пусть доказано, что среднее значение оператора (46) можно вычислить по формуле

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \hat{P} \hat{X} \dots \hat{X} \hat{P} Q(q, p) dq dp. \quad (47)$$

Иными словами, мы предполагаем, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle = \int \hat{P} \hat{X} \dots \hat{X} \hat{P} Q(q, p) dq dp = C \int \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx dy dp dq, \end{aligned} \quad (48)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{P} \hat{X} \dots \hat{X} \hat{P} Q(q, p) = C \int \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx dy. \end{aligned} \quad (49)$$

Рассмотрим теперь оператор

$$x \hat{A}\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) = x \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x \dots x \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (50)$$

Его среднее значение имеет вид

$$\begin{aligned}
 \langle x\hat{A} \rangle &= C \int \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] \times \\
 &\quad \times x A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx dy dp dq = \\
 &= C \int dp dq \hat{X} \int dx dy \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] \times \\
 &\quad \times A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = \int \hat{X} \hat{P} \hat{X} \dots \hat{X} \hat{P} Q(q, p) dp dq.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Таким образом, мы показали, что для вычисления среднего значения оператора $x\hat{A}$ надо подействовать оператором $\hat{X}\hat{P}\hat{X}\dots\hat{X}\hat{P}$ на функцию Хусими $Q(q, p)$ и проинтегрировать полученный результат по $dp dq$.

Аналогичным образом можно рассмотреть оператор

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{A}\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x \dots x \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{52}$$

Его среднее значение имеет вид

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{A} \right\rangle &= C \int \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] \times \\
 &\quad \times \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx dy dp dq.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
 C \int \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy - \frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] \times \\
 \times (p - ix + iq) A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx dy dp dq = \\
 = C \int dp dq \hat{P} \int dx dy \psi^*(x) \exp\left[-\frac{1}{2}(y-q)^2 + ipy\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(x-q)^2 - ipx\right] \times \\
 \times A\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = \int \hat{P} \hat{P} \hat{X} \dots \hat{X} \hat{P} Q(q, p) dp dq.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Получив формулы (51), (54), мы доказали, что для вычисления среднего значения оператора (45) необходимо подействовать на функцию Хусими $Q(q, p)$ операторами $\hat{X}, \hat{P}$ в том порядке, в каком операторы $x, -i\partial/\partial x$ стоят в операторе $A(x, -i\partial/\partial x)$, и проинтегрировать полученный результат по переменным q, p .

Мы нашли правило для вычисления Q -символов операторов, имеющих вид произведения операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$, стоящих в произвольном порядке. Теперь, пользуясь видом такого Q -символа, можно вычислить W -символ этого оператора.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ W -СИМВОЛОВ

Выражение для функции Хусими через функцию Вигнера $W(q, p)$ приведено в работах [2], [19]. Оно имеет вид

$$Q(q, p) = \exp\left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) W(q, p). \quad (55)$$

Среднее значение оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$\langle \hat{A} \rangle = \int S_Q(A) Q(q, p) dp dq, \quad (56)$$

где $S_Q(A)$ – Q -символ оператора $\hat{A}$.

Подставляя выражение (55) в формулу (56), получим

$$\langle \hat{A} \rangle = \int S_Q(A) \exp\left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) W(q, p) dp dq. \quad (57)$$

Теперь, разлагая в ряд экспоненту $\exp\left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)$ и интегрируя по частям, получим выражение для W -символа оператора $\hat{A}$. Поскольку Q -символ оператора $\hat{A}$ имеет вид полинома конечной степени по переменным q, p , то при интегрировании по частям используется только конечное число членов в разложении операторной экспоненты.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИМВОЛОВ ТОМОГРАММ

Наряду с квазивероятностными распределениями в квантовой механике существует и настоящее вероятностное распределение, задающее вероятности значений измеряемых величин и позволяющее по этим вероятностям полностью восстановить квантовое состояние. Эта функция $w(X, \mu, \nu)$ была введена в работах [16]. Она связана взаимно однозначным преобразованием с функцией Вигнера и имеет смысл семейства плотностей распределения вероятности величины $X = \mu q + \nu p$. Величину X можно понимать как координату в повернутой системе отсчета в фазовом пространстве (q, p) . Функция $w(X, \mu, \nu)$ полностью определяет квантовое состояние. Ее называют симплектической томограммой квантового состояния. Свойства и значение томограмм обсуждаются в обзоре [17]. Набор величин $w(X, \mu, \nu)$ является континуальным семейством плотностей распределений вероятностей, зависящих от параметров μ, ν . Это соответствует тому, что семейство томограмм отвечает измерениям континуального набора попарно некоммутирующих наблюдаемых и поэтому предполагает не одно измерение, а целое множество несовместимых измерений для различных μ, ν . В квантовой оптике такие наборы измерений фиксируются фазами θ локального осциллятора. Множество измерений, сделанных при достаточном количестве разных углов θ , таких что $\mu = \cos \theta, \nu = \sin \theta$, позволяет восстановить оператор плотности квантовой системы [20].

Симплектические томограммы были введены в работах [16]. Их можно определить через функцию Вигнера ($\hbar=1$):

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk dq dp W(q, p) e^{-ik(X - \mu q - \nu p)}. \quad (58)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int dX d\mu d\nu w(X, \mu, \nu) e^{-i(\mu q + \nu p - X)}. \quad (59)$$

Симплектические томограммы можно также задавать, используя матрицу плотности состояния $\hat{\rho}$ [21]:

$$w(X, \mu, \nu) = \langle X, \mu, \nu | \hat{\rho} | X, \mu, \nu \rangle. \quad (60)$$

Здесь $|X, \mu, \nu\rangle$ – собственные состояния эрмитова оператора $\hat{X}_{\mu\nu}$, отвечающие собственному значению X , а μ и ν – вещественные параметры.

Мы хотим получить для вероятностного распределения (58) выражение, аналогичное выражению (2) для квазивероятностных распределений. Иными словами, найти для оператора $\hat{A}$ такую функцию $A_w(X, \mu, \nu)$, которая позволяла бы вычислять средние значения оператора $\hat{A}$ по формуле

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dX d\mu d\nu A_w(X, \mu, \nu) w(X, \mu, \nu). \quad (61)$$

Функцию $A_w(X, \mu, \nu)$ мы будем называть томографическим w -символом оператора $\hat{A}$. Томографический w -символ оператора $\hat{A}$ можно найти, используя W -символ Вейля–Вигнера оператора $\hat{A}$ и выражение (59), которое позволяет выразить функцию Вигнера через симплектическую томограмму.

Выражение (2) для среднего значения оператора $\hat{A}$, записанное с помощью функции Вигнера и символа Вейля–Вигнера, имеет вид

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dq dp A_W(q, p) W(q, p). \quad (62)$$

Подставляя в формулу (62) выражение (59) для функции Вигнера, получаем

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dq dp dX d\mu d\nu w(X, \mu, \nu) e^{-i(\mu q + \nu p - X)} A_W(q, p). \quad (63)$$

Сравнивая формулы (61) и (63), мы видим, что томографический w -символ оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$A_w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i(\mu q + \nu p - X)} A_W(q, p). \quad (64)$$

В формуле (64) томографический символ оператора $\hat{A}$ выражается через его символ Вейля–Вигнера, можно получить его выражение и через Q -символ этого оператора. В работе [18] было найдено выражение для функции Хусими через симплектическую томограмму:

$$Q(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int dX d\mu d\nu w(X, \mu, \nu) e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} e^{-i(\mu q + \nu p - X)}. \quad (65)$$

Подставляя (65) в выражение (2) для среднего значения оператора $\hat{A}$, записанного с помощью функции Хусими и Q -символа, получаем

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dq dp dX d\mu d\nu w(X, \mu, \nu) e^{-i(\mu q + \nu p - X)} e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} A_Q(q, p). \quad (66)$$

Отсюда находим выражение для томографического w -символа оператора $\hat{A}$ через Q -символ этого оператора:

$$A_w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i(\mu q + \nu p - X)} e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} A_Q(q, p). \quad (67)$$

В том случае, когда оператор $\hat{A}$ имеет вид степени оператора $\hat{q}$ или оператора $\hat{p}$, для w -символов этих операторов можно получить рекуррентное соотношение, аналогичное соотношениям (27) и (43) и фактически являющееся их следствием.

Пусть мы имеем оператор $\hat{q}^{n+1}$. Тогда, используя формулу (67), его w -символ $K_w^{n+1}(X, \mu, \nu)$ можно записать в виде

$$K_w^{n+1}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i(\mu q + \nu p - X)} e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} K_Q^{n+1}(q). \quad (68)$$

Символы $K_Q^n(q)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (27). Используя его, запишем выражение (68) в виде

$$K_w^{n+1}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i(\mu q + \nu p - X)} e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} \left(q K_Q^n(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} K_Q^n(q) \right). \quad (69)$$

Рассмотрим по отдельности слагаемые, входящие в правую часть равенства (69).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i(\mu q + \nu p - X)} e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} K_Q^n(q) \right) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i(\mu q + \nu p - X)} e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} \left(-\frac{i}{2} \mu K_Q^n(q) \right) = -\frac{i}{2} \mu K_w^n(q) \end{aligned} \quad (70)$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i(\mu q + \nu p - X)} e^{-\mu^2/4 - \nu^2/4} (q K_Q^n(q)) = i \frac{\partial}{\partial \mu} K_w^n(X, \mu, \nu) + \frac{i}{2} \mu K_w^n(q). \quad (71)$$

Складывая равенства (70) и (71), получаем соотношение

$$K_w^{n+1}(X, \mu, \nu) = i \frac{\partial}{\partial \mu} K_w^n(X, \mu, \nu). \quad (72)$$

Точно такое же соотношение имеет место и для операторов L_w^n :

$$L_w^{n+1}(X, \mu, \nu) = i \frac{\partial}{\partial \nu} L_w^n(X, \mu, \nu). \quad (73)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе развит новый метод, позволяющий находить Q -символы операторов, не прибегая к операции антинормального упорядочивания. При этом существенным образом использовался явный вид когерентных состояний, с помощью которых строятся функции Хусими. Мы надеемся, что этот подход удастся использовать для построения и анализа других квазивероятностных распределений.

Развитый формализм основывается на использовании операторов $\hat{X}$ и $\hat{P}$, которые образуют алгебру Гейзенберга и являются некоторым обобщением обычных операторов координаты и импульса. Наряду с этими операторами, которые задаются формулами (21) и (30), можно рассмотреть и другую пару операторов, которые получаются из (21) и (30) с помощью операции комплексного сопряжения. Нам представляется интересным дальнейшее изучение свойств всех этих четырех операторов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках научного сотрудничества между Российской академией наук и Сербской академией наук и искусств по теме “Фундаментальные исследования в области квантовой теории информации и квантовых вычислений и их приложения”. В. А. Андреев благодарен за гостеприимство Institute for Nuclear Sciences Vinča (Белград, Сербия), а Л. Д. Давидович, Милена Д. Давидович и Милош Д. Давидович благодарны за гостеприимство Физическому институту им. П. Н. Лебедева РАН. Л. Д. Давидович, Милена Д. Давидович и Милош Д. Давидович благодарны Министерству образования и науки Сербии за поддержку по контрактам ON171031 и ON171028. В. А. Андреев благодарен РФФИ (грант № 11-02-01269), В. И. Манько и М. А. Манько благодарны РФФИ (гранты № 10-02-00312, 11-02-00456) за частичную поддержку настоящей работы.

Список литературы

- [1] Р. Л. Стратонович, *ЖЭТФ*, **31**:6 (1956), 1012–1020; *Докл. АН СССР*, **109**:1 (1956), 72–75.
- [2] K. E. Cahill, R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **177**:5 (1969), 1857–1881; 1882–1902.
- [3] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, *Phys. Rep.*, **106**:3 (1984), 121–167.
- [4] В. И. Татарский, *УФН*, **139**:4 (1983), 587–619.
- [5] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, ИКИ, М., 2003.
- [6] A. B. Klimov, S. M. Chumakov, *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*, Wiley-VCH, Weinheim, 2009.
- [7] H. Moya-Cessa, P. L. Knight, *Phys. Rev. A*, **48**:3 (1993), 2479–2481.
- [8] K. Husimi, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, **22** (1940), 264–314.
- [9] Y. J. Kano, *J. Math. Phys.*, **6**:12 (1965), 1913–1915.
- [10] E. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.
- [11] R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:3 (1963), 84–86.
- [12] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:7 (1963), 277–279.
- [13] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [14] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [15] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH, Berlin, 2001.

- [16] S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi, *Quantum Semiclass. Opt.*, **7**:4 (1995), 615–623; **213**:1–2 (1996), 1–6, arXiv: quant-ph/9603002; *Found. Phys.*, **27**:6 (1997), 801–824, arXiv: quant-ph/9609026.
- [17] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys. Scr.*, **79**:6 (2009), 065013, 29 pp., arXiv: 0904.4439.
- [18] В. А. Андреев, Д. М. Давидович, Л. Д. Давидович, М. Д. Давидович, В. И. Манько, М. А. Манько, *ТМФ*, **166**:3 (2011), 410–424.
- [19] G. S. Agarwal, E. Wolf, *Phys. Rev. D*, **2**:10 (1970), 2161–2186.
- [20] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:9 (1993), 1244–1247.
- [21] S. Mancini, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, P. Tombesi, *J. Phys. A*, **34**:16, 3461–3476, arXiv: quant-ph/0005058.

Поступила в редакцию 17.12.2013