Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Алхимов, d -Мерная модель канонического ансамбля открытых струн, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 1, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:13:03

© 2014 г.

В. И. Алхимов*

d -МЕРНАЯ МОДЕЛЬ КАНОНИЧЕСКОГО АНСАМБЛЯ ОТКРЫТЫХ СТРУН

Предложена d -мерная модель канонического ансамбля открытых струн, избегающих самопересечения. Рассмотрена одиночная модель открытой струны в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $2 \leq d < 4$, в котором конфигурация струны описывается ее контурной длиной L и расстоянием R между ее концами. Распределение пространственного размера струны определяется только ее внутренним физическим состоянием и взаимодействием с окружающей средой. Для преобразованной плотности вероятности $W(R, L)$ расстояния R установлено уравнение, аналогичное известному уравнению Дайсона, инвариантное относительно непрерывной группы ренормировочных преобразований, что позволяет использовать метод ренормгруппы для исследования асимптотического поведения указанной плотности, когда $R \rightarrow \infty$ и $L \rightarrow \infty$. Рассмотрена модель ансамбля из M открытых струн со средней по всем струнам контурной длиной $\bar{L}$, и с помощью метода Дарвина–Фаулера получено наиболее вероятное распределение струн по их длинам в пределе $M \rightarrow \infty$. Усреднение плотности вероятности $W(R, L)$ по каноническому ансамблю дает в итоге искомую плотность $\langle W(R, \bar{L}) \rangle$.

Ключевые слова: d -мерная модель, модель открытой струны, основное уравнение, ренормализационная группа, асимптотическое распределение, канонический ансамбль.

DOI: 10.4213/tmf8633

1. ОДИНОЧНАЯ МОДЕЛЬ ОТКРЫТОЙ СТРУНЫ

Одной из важных проблем в статистической теории линейных полимеров (макромолекул) является вычисление их средних пространственных размеров. Вследствие очень большого числа степеней свободы у макромолекул последние можно рассматривать как макроскопические системы и для вычисления средних значений величин, характеризующих их размеры, применять статистические методы. Результаты многочисленных экспериментов и теоретических расчетов показывают, что при объяснении макроскопических свойств таких систем мелкомасштабная структура макромолекул с увеличением их длины становится все менее существенной. При

*Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия.
E-mail: alvaliv@list.ru

этом ведущую роль в конфигурационной статистике макромолекул играет их цепное строение и связанный с ним эффект “исключенного” объема, согласно которому в одном и том же элементе объема пространства не может находиться одновременно более одного звена (мономера) полимера. Именно эти факторы определяют характерные черты поведения макромолекул и служат основой для их описания с помощью непрерывной модели – модели гибкой открытой струны, избегающей самопересечения.

Пусть исходная модель представляет собой цепь, состоящую из N упорядоченных прямолинейных сегментов, свободное сочленение которых обуславливает ее гибкость. Концы сегментов, являющиеся точками их соединения, будем называть элементами рассматриваемой цепи. Принимая один из концов цепи за нулевой элемент, обозначим через $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^d$ радиус-вектор i -го элемента, а через $\mathbf{r}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}$ обозначим i -й сегмент, соединяющий i -й и $(i-1)$ -й элементы цепи. Тогда

$$r_{ij} = \left| \sum_{k=i+1}^j \mathbf{r}_k \right| \quad \text{и} \quad \bar{r}_{ij} = \sum_{k=i+1}^j r_k$$

суть соответственно пространственное расстояние между i -м и j -м элементами цепи и расстояние по контуру цепи между ними. Мы полагаем, что длины r_k , $1 \leq k \leq N$, сегментов цепи подчинены одному и тому же распределению, для которого средняя длина каждого сегмента равна h , а среднее значение контурной длины $\bar{r}_{ij}$ равно $\tilde{r}_{ij} = |j-i|h$. Отсюда следует, что $\tilde{r}_{0N} = Nh$ есть средняя контурная длина цепи. В дальнейшем при построении непрерывной модели цепи в определении $\tilde{r}_{0N}$ мы перейдем к пределу, устремив длину h к нулю, а число N к бесконечности таким образом, чтобы было выполнено условие

$$0 < L = \lim_{\substack{h \rightarrow 0, \\ N \rightarrow \infty}} Nh < \infty. \quad (1)$$

В основу статистического описания равновесной конфигурации цепи положим плотность распределения Гиббса в пространстве координат

$$w(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \frac{1}{Q} e^{-U/T},$$

которая также называется $(N+1)$ -частичной корреляционной функцией. Здесь Q – нормировочный множитель, U – потенциальная энергия рассматриваемой системы, а T – энергетический параметр, характеризующий взаимодействие системы с окружающей средой. Потенциальную энергию U цепи представим в виде суммы двух частей:

$$U = U_{\text{lin}} + U_{\text{vol}}, \quad U_{\text{lin}} = \sum_{k=1}^N u(r_k), \quad U_{\text{vol}} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij},$$

где линейная часть U_{lin} есть сумма внутренних энергий всех сегментов, в то время как объемная часть U_{vol} обозначает сумму энергий их попарных взаимодействий. Если $u(r_k)$ определяет значение упругой энергии k -го сегмента, то величина V_{ij} , описывающая пространственное взаимодействие i -го и j -го сегментов, обуславливает гибкость цепи. Для линейного потенциала $u(r)$ мы примем известное приближение (закон Гука):

$$u(r) = \frac{\sigma}{2h} r^2, \quad (2)$$

где σ – параметр упругости. Величина V_{ij} в этой модели определяется как $V_{ij} = h^2 V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})$, где $V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})$ обозначает плотность энергии взаимодействия i -го и j -го сегментов цепи. Таким образом, энергия взаимодействия V_{ij} двух сегментов зависит здесь как от пространственного расстояния r_{ij} , так и от средней контурной длины $\tilde{r}_{ij}$ между ними. Чтобы учесть запрет на самопересечения цепи, определим плотность энергии $V(r, \tilde{r})$ следующим образом:

$$V(r, \tilde{r}) = V_0 \theta(r_0 - r) \theta(\tilde{r} - l); \quad (3)$$

здесь V_0 – значение функции $V(r, \tilde{r})$ в области $0 \leq r \leq r_0 < l \leq \tilde{r}$, где r_0 и l – положительные параметры рассматриваемой модели, $V_0 = \text{const} > 0$, и $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Согласно методу Маркова запишем искомую плотность вероятности расстояния R между концами цепи следующим образом:

$$W_N(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N w(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \delta(\mathbf{R} + \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_N), \quad (4)$$

где $\delta(\mathbf{q})$ – дельта-функция Дирака. В этом случае один из концов цепи можно считать фиксированным в начале координат, а другой – свободным. Тогда в силу изотропности пространства $\mathbb{R}^d$ плотность распределения $W_N(\mathbf{R})$ зависит лишь от расстояния R свободного конца цепи от начала координат. Далее в интеграле (4) перейдем к новым переменным $\mathbf{r}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$, и воспользуемся фурье-преобразованием функции $\delta(\mathbf{q})$. В результате получим для $W_N(\mathbf{R})$ выражение

$$W_N(\mathbf{R}) = \frac{1}{Q_N} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}} g_N(p), \quad (5)$$

в котором

$$Q_N = \frac{Q}{Q_0}, \quad Q_0 = \omega_d \int_0^\infty dr e^{-u(r)/T} r^{2s+1}, \quad s = \frac{d-2}{2},$$

$\omega_d = 2\pi^{s+1}/\Gamma(s+1)$ – площадь поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^d$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, а функция $g_N(\mathbf{p})$ определяется как

$$g_N(\mathbf{p}) = \int P_{1N} \prod_{k=1}^N Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_k) d\mathbf{r}_k, \quad (6)$$

где

$$P_{1N} = \exp\left(-\frac{h^2}{T} \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})\right), \quad (7)$$

$$Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Q_0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - u(r)/T}. \quad (8)$$

Из формул (6)–(8) следует, что

$$|g_N(\mathbf{p})| \leq g_N(\mathbf{0}), \quad (9)$$

где величина $g_N(\mathbf{0})$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\exp\left(-\frac{N^2 h^2 V_0}{2T}\right) \leq g_N(\mathbf{0}) \leq 1. \quad (10)$$

В отсутствие объемных взаимодействий, т.е. в случае $V_0 = 0$, функция $g_N(\mathbf{p})$ в силу равенства (6) преобразуется к виду $g_N^{(0)}(\mathbf{p}) = g^N(\mathbf{p})$, где

$$g(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r} Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_d}{Q_0} \int_0^\infty dr r^{2s+1} \Lambda_s(pr) e^{-u(r)/T}, \quad (11)$$

$\Lambda_s(x) = \Gamma(s+1)(2/x)^s J_s(x)$ и $J_s(x)$ – функция Бесселя. Отсюда получаем $\Lambda_s(0) = 1$ и $g(0) = 1$.

Теперь определим значение указанного выше параметра $l \equiv T/2\sigma$ и примем условие $l \gg r_0$. Тогда, используя в формуле (11) выражение (2) в виде $u(r)/T = r^2/4hl$, получим в результате интегрирования следующее равенство: $g(\mathbf{p}) = e^{-hl p^2}$. Отсюда, пользуясь выражением (5), находим $Q_N^{(0)} = 1$ и предельное выражение для плотности вероятности:

$$\lim W_N^{(0)}(\mathbf{R}) \equiv W^{(0)}(\mathbf{R}, L) = (4\pi l L)^{-d/2} e^{-R^2/4lL}, \quad (12)$$

где предельный переход осуществляется при условии (1). Найденное с помощью последней формулы значение среднеквадратичного расстояния $\langle R^2 \rangle_L^{(0)} = 2dlL$ между концами цепи может служить в этом случае дополнением к приведенной выше характеристике величины l .

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Приступим теперь к поиску асимптотики плотности вероятности

$$W(\mathbf{R}, L) = \lim W_N(\mathbf{R}), \quad \frac{R}{l} \rightarrow \infty, \quad \frac{L}{l} \rightarrow \infty, \quad (13)$$

при условии (1). С этой целью обратимся к формулам (5), (6) и наряду с определением (7) введем следующие обозначения:

$$P_{mn} = \prod_{m \leq i < j \leq n} (1 + \varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = e^{-V_{ij}/T} - 1. \quad (14)$$

Разложим произведение P_{1N} в ряд по ε_{ij} :

$$P_{1N} = 1 + \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{i_1 < j_1} \sum_{i_2 < j_2} \dots \sum_{i_k < j_k} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \dots \varepsilon_{i_k j_k} \right), \quad (15)$$

где индексы в каждом из сомножителей $\varepsilon_{i_1 j_1}, \varepsilon_{i_2 j_2}, \dots, \varepsilon_{i_k j_k}$ расположены в порядке возрастания, т.е. $i_k < j_k$ для $k = 1, 2, \dots$, причем первые индексы этих сомножителей в каждом члене указанной суммы образуют неубывающую последовательность, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, и $(i_l j_l) \neq (i_m j_m)$ при $l \neq m$.

Сомножители $\varepsilon_{i_m j_m}$ и $\varepsilon_{i_n j_n}$ называются связанными, если контурные участки цепи $\{\mathbf{r}_{i_m}, \dots, \mathbf{r}_{j_m}\}$ и $\{\mathbf{r}_{i_n}, \dots, \mathbf{r}_{j_n}\}$ содержат по крайней мере один общий сегмент, т.е.

$i_m \leq i_n \leq j_n \leq j_m$ или $i_m \leq i_n \leq j_m \leq j_n$, и несвязанными в противном случае, при $i_m \leq j_m < i_n \leq j_n$. Любое произведение сомножителей в (15), расположенных в порядке неубывания их первых индексов, назовем комплексом, если в этом произведении каждый сомножитель начиная со второго связан по крайней мере с одним из предшествующих сомножителей. Тогда любой член суммы в (15) является либо комплексом, либо распадается на произведение некоторого числа комплексов. Обозначим через f_{ij} сумму всех комплексов, зависящих от векторов $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_j$, где $i < j$, и назовем ее блоком. Это означает, что

$$\begin{aligned} f_{ij} = & \varepsilon_{ij} P_{ij} + \sum_{i < k < l < j} \varepsilon_{il} \varepsilon_{kj} P_{ik} P_{kl} P_{lj} + \\ & + \sum_{i < k < l < m < n < j} (\varepsilon_{il} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{mj} + \varepsilon_{in} \varepsilon_{km} \varepsilon_{lj} + \varepsilon_{im} \varepsilon_{kj} \varepsilon_{ln} + \varepsilon_{im} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{lj}) P_{ik} P_{kl} P_{lm} P_{mn} P_{nj} + \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

где в правой части под знаком первой суммы фигурирует всего лишь один представитель комплексов второго порядка по ε_{ij} , в то время как под знаком второй суммы находятся четыре неэквивалентных представителя комплексов третьего порядка относительно ε_{ij} . Для полного числа N_n неэквивалентных представителей комплексов n -го порядка по ε_{ij} имеет место асимптотическая оценка $N_n = O((2n-1)!!)$ при $n \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что произведение P_{1N} можно разложить по блокам f_{ij} ,

$$P_{1N} = 1 + \sum_{i < j} f_{ij} + \sum_{i_1 < j_1 < i_2 < j_2} f_{i_1 j_1} f_{i_2 j_2} + \dots,$$

так, что каждый член суммы является либо блоком, либо произведением некоторого числа блоков. Подставляя это разложение в формулу (6) и выполняя надлежащее интегрирование в каждом ее члене, получим следующее выражение:

$$g_N(\mathbf{p}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(N-n+m)!}{(N-n)! m!} g^{N-n}(\mathbf{p}) F_n^{(m)}(\mathbf{p}), \quad (17)$$

где

$$F_n^{(0)}(\mathbf{p}) \equiv 0, \quad F_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} f_{n_1}(\mathbf{p}) \dots f_{n_m}(\mathbf{p}), \quad m \geq 1, \quad (18)$$

$$f_1(\mathbf{p}) \equiv 0, \quad f_n(\mathbf{p}) = \int f_{1n} \prod_{k=1}^n Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_k) d\mathbf{r}_k, \quad n > 1, \quad (19)$$

и f_{1n} , как указано выше, обозначает блок, который состоит из всех комплексов, зависящих от векторов $\{\mathbf{r}_k\}$, $k = 1, \dots, n$, а множитель $(N-n+m)!/(N-n)!m!$ равен числу способов размещения m частичных отрезков, состоящих последовательно из $n_1, \dots, n_m$ звеньев (общее число которых равно n) и расположенных внутри одного отрезка из N звеньев, при условии, что сохраняется последовательность расположения частичных отрезков.

Воспользуемся формулой Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz z^{n_1 + \dots + n_m - n - 1} = \begin{cases} 1, & \text{если } n_1 + \dots + n_m = n, \\ 0, & \text{если } n_1 + \dots + n_m \neq n, \end{cases}$$

в которой замкнутый контур γ охватывает начало координат на плоскости комплексной переменной z , и перепишем соотношение (17) в виде

$$F_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1}} f^m(\mathbf{p}, z), \quad (20)$$

где

$$f(\mathbf{p}, z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n(\mathbf{p}). \quad (21)$$

Далее подставим выражение (20) в (17) и распространим суммирование по n от $-\infty$ до N , что не оказывает влияния на конечный результат. Тогда, используя формулу

$$(1 - x - y)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m! n!} x^m y^n, \quad |x + y| < 1,$$

приведем выражение (17) к виду

$$g_N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} [1 - zg(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}, z)]^{-1} \frac{dz}{z^{N+1}}, \quad (22)$$

где замкнутый контур γ , охватывающий начало координат $z = 0$, выбран так, чтобы выполнялось неравенство

$$|zg(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}, z)| < 1.$$

Наконец, если определить производящую функцию

$$g(\mathbf{p}, z) \equiv \sum_{N \geq 0} z^N g_N(\mathbf{p}), \quad (23)$$

то из равенства (22) следует основное уравнение [1]

$$g^{-1}(\mathbf{p}, z) = g_0^{-1}(\mathbf{p}, z) - f(\mathbf{p}, z), \quad (24)$$

в котором $g_0^{-1}(\mathbf{p}, z) = 1 - zg(\mathbf{p})$. Однако, для того чтобы уравнение (24) было замкнутым, необходимо установить связь между производящими функциями $f(\mathbf{p}, z)$ и $g(\mathbf{p}, z)$. С этой целью подставим выражение для f_{1n} из общей формулы (16) в равенство (19) и представим ε_{mn} в следующем виде:

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon\left(\left|\sum_{k=m+1}^n \mathbf{r}_k\right|, |m-n|h\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^{n-m}} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp\left(-i\mathbf{p} \cdot \sum_{j=m+1}^n \mathbf{r}_j\right) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}, z),$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} (e^{-(h^2/T)V(r, nh)} - 1) \quad (25)$$

в соответствии с определением ε_{mn} в (14). Если в уравнении (19) выполнить интегрирование по всем $\mathbf{r}_k$, $k = 1, \dots, n$, то получим ряд

$$\begin{aligned} f_n(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1^{n+1}} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1) g_n(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) + \\ &+ \sum_{1 \leq l < m < n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1^{m+1}} \oint_{\gamma} \frac{dz_2}{z_2^{n-l+1}} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_2, z_2) \times \\ &\times g_l(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) g_{m-l}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) g_{n-m}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) + \dots \end{aligned}$$

Подставим его в равенство (21) и затем выполним надлежащее суммирование. В результате для $f(\mathbf{p}, z)$ мы получим выражение

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, z) = & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1) g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, z/z_1) + \\ & + \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1} \oint_{\gamma} \frac{dz_2}{z_2} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_2, z_2) \times \\ & \times g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, z/z_1) g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, z/z_1 z_2) g(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, z/z_2) + \dots, \end{aligned}$$

определяющее искомую связь между функциями $f(\mathbf{p}, z)$ и $g(\mathbf{p}, z)$. Полученный ряд в правой части данного равенства удобно представить в символической форме

$$f(\mathbf{p}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \oint_{\gamma} \left\{ \frac{dz'}{2\pi i z'} \right\}^n \int \left\{ \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d} \right\}^n \{ \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}', z') \}^n \{ g(\mathbf{p} - \mathbf{p}', z/z') \}^{2n-1}$$

с целью продемонстрировать инвариантность уравнения (24) относительно мультипликативных преобразований:

$$g \rightarrow g' = \alpha g, \quad g_0 \rightarrow g'_0 = \alpha g_0, \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow \tilde{\varepsilon}' = \alpha^{-2} \tilde{\varepsilon}, \quad f \rightarrow f' = \alpha^{-1} f, \quad (26)$$

где α – отличный от нуля параметр, изменяющийся непрерывно. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую ренормгруппой (РГ), в связи с чем свойство (26) является исходной точкой для применения метода РГ в исследуемой задаче.

3. ПЕРЕХОД К НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ

Чтобы осуществить переход от дискретной модели цепи к непрерывной, называемой в дальнейшем моделью открытой струны, введем новую переменную E посредством равенства

$$z = z(E) \equiv e^{-Eh}, \quad \text{Re } E > 0, \quad (27)$$

и, применяя свойство РГ-инвариантности (26), запишем уравнение (24) в форме

$$[hg(\mathbf{p}, z(E))]^{-1} = h^{-1}(1 - e^{-h(E+lp^2)}) - h^{-1}f(\mathbf{p}, z(E)). \quad (28)$$

Тогда в силу неравенства

$$|g(\mathbf{p}, z(E))| < \frac{1}{1 - e^{-h \text{Re } E}}, \quad (29)$$

вытекающего из соотношений (9), (10), (24) и (27), функция $(1 - z)g(\mathbf{p}, z)$, аналитическая в области $|z| < 1$, является ограниченной внутри этой области, и поэтому существует предел [2]

$$\lim_{h \rightarrow 0} hg(\mathbf{p}, z(E)) \equiv \varphi(\mathbf{p}, E). \quad (30)$$

Из формул (29) и (30) следует неравенство

$$|\varphi(\mathbf{p}, E)| \leq \frac{1}{\text{Re } E}. \quad (31)$$

Далее воспользуемся равенствами $z^{-1}(E) dz(E) = -h dE$ и

$$h^{-1} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}, z(E)) = \sum_{n=0}^{\infty} h e^{-nhE} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} (e^{-(h^2/T)V(r, nh)} - 1) h^{-2}, \quad (32)$$

вытекающими из формул (27) и (25) соответственно, и затем перейдем к пределу в уравнении (32) при $h \rightarrow 0$. Тогда, принимая во внимание соотношения (26), (28), (30), (32) и определение

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}, z(E)) \equiv v(\mathbf{p}, E) = -\frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r} \int_0^{\infty} d\tilde{r} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - E\tilde{r}} V(r, \tilde{r}), \quad (33)$$

мы получим для функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ уравнение

$$\varphi^{-1}(\mathbf{p}, E) = \varphi_0^{-1}(\mathbf{p}, E) - F(\mathbf{p}, E; v; \varphi), \quad (34)$$

где $\varphi_0^{-1}(\mathbf{p}, E) = E + lp^2$, а функция $F(\mathbf{p}, E; v; \varphi)$ определяется с помощью ряда:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, E; v; \varphi) = & \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_1}{2\pi i} v(\mathbf{p}_1, E_1) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E - E_1) + \\ & + \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_2}{2\pi i} v(\mathbf{p}_1, E_1) v(\mathbf{p}_2, E_2) \times \\ & \times \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E - E_1) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, E - E_1 - E_2) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, E - E_2) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Согласно равенству (33) фигурирующая в (35) функция $v(\mathbf{p}, E)$ есть $(d+1)$ -мерная спектральная плотность функции $-V(r, \tilde{r})/T$. Подставляя выражение (3) в равенство (33), находим

$$v(\mathbf{p}, E) = -v_0 \Lambda_{s+1}(pr_0) E^{-1} e^{-El}, \quad (36)$$

где $v_0 = \vartheta V_0/T$, а $\vartheta = (\pi r_0^2)^{s+1}/\Gamma(s+2)$ есть d -мерный объем шара радиуса r_0 .

Подставим теперь выражение (36) во все члены ряда (35) и выполним в них соответствующие интегрирования по переменным E_k , $k = 1, 2, \dots$. С этой целью в комплексной плоскости каждой из переменных E_k проведем разрез вдоль положительной части вещественной оси и сместим вертикальный контур интегрирования $(C - i\infty, C + i\infty)$ по переменной E_k бесконечно далеко в правую полуплоскость, обходя при этом особые точки подынтегральных функций. Если теперь выбрать значение параметра l достаточно большим, то из соотношений (31) и (36) следует, что основной вклад в интегралы вносят особые точки $E_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда, удерживая вклад в значения интегралов в (35) от указанных особых точек, мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, E; v; \varphi) = & -v_0 \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_1) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E) + \\ & + v_0^2 \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_1) \Lambda_{s+1}(r_0 p_2) \times \\ & \times \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, E) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, E) - \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Последнее выражение представим в символической форме

$$F(\mathbf{p}, E; v; \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n (-v_0)^n \int \left\{ \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^d} \right\}^n \{ \Lambda_{s+1}(r_0 \tilde{p}) \}^n \{ \varphi(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}, E) \}^{2n-1}, \quad (38)$$

из которой легко видеть РГ-инвариантность уравнения (34):

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \alpha \varphi, \quad \varphi_0 \rightarrow \varphi'_0 = \alpha \varphi_0, \quad v_0 \rightarrow v'_0 = \alpha^{-2} v_0, \quad F \rightarrow F' = \alpha^{-1} F.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Величина $F(0, E; v; \varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} E \leq |E - F(0, E; v; \varphi)| \leq L^{-1} \exp \left(\frac{L^2 V_0}{6T} + \frac{L}{2} \operatorname{Re} E \right). \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно неравенствам (10) и определению (27) имеем

$$\sum_{n=0}^N \exp \left(-\frac{n^2 h^2 V_0}{2T} - n h \operatorname{Re} E \right) \leq \sum_{n=0}^N |z(E)|^n g_n(0) \leq \sum_{n=0}^N |z(E)|^n. \quad (40)$$

Тогда, преобразуя левую часть в (40) с помощью известного неравенства

$$\left(\prod_{n=1}^N t_n \right)^{1/N} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_n, \quad t_n > 0,$$

мы без труда замечаем, что она не меньше величины

$$N \exp \left(-\frac{N^2 - 1}{6} \frac{h^2 V_0}{T} - \frac{N + 1}{2} h \operatorname{Re} E \right).$$

Учитывая эту оценку, умножим все части неравенств в (40) на h и в полученной системе неравенств перейдем к пределу, устремляя длину h к нулю, а число N к бесконечности так, чтобы выполнялось условие (1). В результате мы приходим к соотношениям

$$L \exp \left(-\frac{L^2 V_0}{6T} - \frac{L}{2} \operatorname{Re} E \right) \leq |\varphi(0, E)| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} E}, \quad (41)$$

которые с учетом уравнения (34) доказывают неравенства (39).

Из доказанного утверждения следует, что ряд в правой части равенства (37) сходится при $p = 0$, и это обуславливает также сходимость интегралов в членах этого ряда. Тогда, принимая во внимание асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \Lambda_{s+1}(r_0 p) &\rightarrow 1, & p &\rightarrow 0, \\ \Lambda_{s+1}(r_0 p) &= O(p^{-s-3/2}), & p &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

можно описать асимптотическое поведение функции $\varphi(\mathbf{p}, 0)$ на концах интервала $0 < p < \infty$. Действительно, пусть E_0 – наиболее удаленная вправо особая точка функции $\varphi(0, E)$, определяемая согласно уравнению (34) равенством

$$\varphi^{-1}(0, E_0) \equiv 0 \quad (42)$$

или, что эквивалентно, уравнением $E_0 - F(0, E_0; v; \varphi) \equiv 0$. Но из неравенств (41) и уравнения (42) вытекает, что $E_0 = 0$, следовательно, $F(0, 0; v; \varphi) = 0$. С другой стороны, уравнение (34) при $E = 0$ принимает вид

$$\varphi^{-1}(\mathbf{p}, 0) = lp^2 - F(\mathbf{p}, 0; v; \varphi).$$

Отсюда можно заключить, что запрет на самопересечения струны приведет к распределению ее размера, существенно отличному от нормального, только в том случае, когда поведение функции $\varphi^{-1}(\mathbf{p}, 0)$ на интервале $0 < p < \infty$ будет определяться главным образом зависимостью функционала $F(\mathbf{p}, 0; v; \varphi)$ от p . Последнее условие означает, что при $p \rightarrow 0$

$$F(\mathbf{p}, 0; v; \varphi) = O(p^{2(1-\mu)}) \quad \text{или} \quad \varphi(\mathbf{p}, 0) = O(p^{2(\mu-1)}),$$

где $0 < \mu < 1$, а при $p \rightarrow \infty$

$$p^{-2}F(\mathbf{p}, 0; v; \varphi) \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad p^2\varphi(\mathbf{p}, 0) \rightarrow 0.$$

Но из формул (37) и (38) следует, что при $E = 0$ и $p = 0$ всякий переход от одного члена ряда к следующему сопровождается добавлением интеграла вида

$$I(\mathbf{p}_1) = -v_0 \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_2) \varphi(\mathbf{p}_2, 0) \varphi(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1, 0).$$

Вычисление последнего интеграла по малому объему шара радиуса $p_2 = p_0$ с центром в точке $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ при фиксированном значении $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ дает величину порядка $O(p_0^{4\mu+2s-2})$ при $p_0 \rightarrow 0$. Отсюда вытекает следующее условие сходимости указанного интеграла: $1 - s < 2\mu$. Очевидно, что последнее условие содержательно лишь при $s \leq 1$. Таким образом, запрет на самопересечения открытой струны приводит в асимптотическом случае к распределению расстояния между ее концами, существенно отличающемуся от нормального распределения, при $d \leq 4$ (для $s \leq 1$).

4. УРАВНЕНИЯ РГ

Воспользуемся теперь формулой обращения для производящей функции (23) с целью выразить функцию $g_N(\mathbf{p})$ через $g(\mathbf{p}, z)$ и затем перейдем к пределу в (13), принимая во внимание равенства (27) и (30). В результате получим

$$W(\mathbf{R}, L) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i} e^{LE} \psi(\mathbf{R}, E), \quad (43)$$

$$\psi(\mathbf{R}, E) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}} \varphi(\mathbf{p}, E). \quad (44)$$

Более реалистичной задачей является поиск асимптотики функции $W(\mathbf{R}, L)$ при $R/l \rightarrow \infty$ и $L/l \rightarrow \infty$. В этом случае из формул (43), (44) следует, что для ее решения необходимо знать поведение функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ при малых значениях p и $|E|$. Обозначим через $p_{\pm} \equiv \pm i\eta$ (здесь $\text{Re } \eta > 0$) ближайшие к началу координат $p = 0$ корни уравнения $\varphi^{-1}(\mathbf{p}, E) = 0$. Тогда, полагая $p = p_+$ в уравнении (34), получим тождество

$$\varphi^{-1}(i\eta, E) \equiv 0, \quad (45)$$

которое вместе с тождеством (42) определяет связь между переменными E и η^2 :

$$E - E_0 \equiv l\eta^2 + F(i\eta, E; v; \varphi) - F(0, E_0; v; \varphi) \quad (46)$$

или, в более компактной форме,

$$E \equiv l\eta^2 + F(i\eta, E; v; \varphi). \quad (47)$$

Тем не менее в случае приближенного решения основного уравнения форма связи между E и η^2 вида (46) оказывается удобнее чем (47).

Наконец, с помощью тождества (45) преобразуем уравнение (34) к виду

$$\varphi^{-1} = l\chi^2 + F(i\eta, E; v; \varphi) - F(p, E; v; \varphi), \quad (48)$$

где $\chi^2 \equiv p^2 + \eta^2$. Система уравнений (46) (или (47)) и (48) составляет основу для получения указанной выше асимптотики как функции $W(\mathbf{R}, L)$, так и плотности вероятности $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$ расстояния R между концами струны, контурная длина которой равна L . Однако, чтобы вывести выражение для $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$, необходимо выполнить нормировку функции $W(\mathbf{R}, L)$. В результате с помощью равенств (43) и (44) мы получим для плотности вероятности $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$ следующую формулу:

$$\mathcal{W}(\mathbf{R}, L) = \left[\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE e^{L(E-E_0)} \varphi(0, E) \right]^{-1} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE e^{L(E-E_0)} \psi(\mathbf{R}, E). \quad (49)$$

Поиск указанной асимптотики плотности $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$ сводится по существу к вычислению показателя степени μ , $0 < \mu < 1$, в асимптотическом поведении функции φ ,

$$\varphi = O(\chi^{2(\mu-1)}), \quad \chi \rightarrow 0, \quad (50)$$

и установлению асимптотической зависимости между переменными η и $E - E_0$,

$$E - E_0 = O(\eta^{2\nu}), \quad \eta \rightarrow 0,$$

где $0 < \nu < 1$. Для реализации этого подхода воспользуемся РГ-инвариантностью уравнения (48). С этой целью разделим обе части уравнения (48) на $l\chi^2$ и представим искомую функцию φ как

$$\varphi = \frac{X}{l\chi^2}, \quad (51)$$

где новая неизвестная функция X удовлетворяет уравнению

$$X^{-1} = 1 + \frac{\Psi(\chi^2, \eta^2; v; \varphi)}{l\chi^2}, \quad (52)$$

в котором

$$\Psi(\chi^2, \eta^2; v; \varphi) = F(i\eta, E; v; \varphi) - F(p, E; v; \varphi). \quad (53)$$

Предположим теперь, что при некотором не равном нулю значении $\chi^2 = \lambda$ выполняется равенство $\Psi(\lambda, \eta^2; v; \varphi) = 0$, где $\lambda = \lambda(\eta^2; v_0)$ – так называемая точка нормировки. Тогда уравнение (52) можно переписать в эквивалентной форме

$$X^{-1} = 1 + \left(\frac{\lambda}{\chi^2} \right) \widetilde{\Psi} \left(\frac{\chi^2}{\lambda}, \frac{\eta^2}{\lambda}; \frac{v_0}{l^2 \lambda^{1-s}}; \frac{\lambda}{\chi^2} X \right).$$

Отсюда следует, что безразмерная величина X может быть представлена в окрестности точек $p = 0$ и $E = 0$ как функция $X = X(x, y; b)$ от безразмерных переменных

$$x = \frac{\chi^2}{\lambda}, \quad y = \frac{\eta^2}{\lambda}, \quad b = \frac{v_0}{l^2 \lambda^{1-s}},$$

где число b представляет собой безразмерную комбинацию величин λ , l и v_0 . Действительно, если в каждом интеграле формулы (38) перейти к безразмерным переменным $\tilde{p}^2/\lambda$ и $(\lambda/\chi^2)X$, что удобно записать в символической форме

$$\tilde{p}^d = \lambda^{d/2} \left\{ \frac{\tilde{p}^2}{\lambda} \right\}^{d/2}, \quad \varphi^2 = \frac{1}{(\lambda l)^2} \left\{ \frac{\lambda}{\chi^2} X \right\}^2,$$

то в результате такой замены переменных перед интегралом появится множитель $-b$. При этом в точке $x = 1$ выполняется условие нормировки $X(1, y; b) = 1$. Отсюда, учитывая РГ-свойство уравнения (52), нетрудно видеть, что умножение функции $X = X(x, y; b)$ на отличное от нуля число a^{-1} приводит к изменению ее точки нормировки, $\chi^2 = \lambda'(\eta^2, v'_0)$, и параметра b , $b' = a^{-2} \tau^{s-1} b$, где $v'_0 = a^{-2} v_0$, $\tau = \lambda'/\lambda$, т. е. $aX(x, y; b) = X(x/\tau, y/\tau; b')$. Полагая $x = \tau$ в последнем равенстве и учитывая условие нормировки $X(1, y/\tau; b') = 1$, мы получим, что $a^{-1} = X(\tau, y; b)$, а последнее равенство преобразуется к виду

$$X(x, y; b) = X(\tau, y; b) X\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}; b \tau^{s-1} X^2(\tau, y; b)\right).$$

Далее возведем в квадрат обе части данного уравнения и полученный результат умножим на $b x^{s-1}$. Тогда мы приходим к заключению, что величина

$$B(x, y; b) = b x^{s-1} X^2(x, y; b), \quad (54)$$

которую мы назовем инвариантным параметром РГ, удовлетворяет уравнению

$$B(x, y; b) = B\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}; B(\tau, y; b)\right) \quad (55)$$

с условием нормировки

$$B(1, y; b) = b. \quad (56)$$

Уравнение (55) замкнуто и может быть решено в общем виде [3], [4]. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальным уравнением Ли, соответствующим непрерывной РГ:

$$x \frac{\partial B(x, y; b)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x}; B(x, y; b)\right), \quad (57)$$

где

$$\beta(y; b) = \left. \frac{\partial B(x, y; b)}{\partial x} \right|_{x=1},$$

а равенство (56) играет роль граничного условия для уравнения (57). В частном случае, когда $y \rightarrow 0$, уравнение для функции

$$B(x; b) = \lim_{y \rightarrow 0} B(x, y; b)$$

приводится к уравнению

$$x \frac{\partial B(x; b)}{\partial x} = \beta(B(x; b))$$

или к уравнению в интегральной форме [5]

$$\int_b^{B(x; b)} \frac{da}{\beta(a)} = \ln x, \quad \beta(b) = \left. \frac{\partial B(x; b)}{\partial x} \right|_{x=1}.$$

При этом соответствующее граничное условие преобразуется к виду $B(1; b) = b$.

Таким образом, инвариантный параметр B является эффективным параметром, характеризующим объемный эффект в малой окрестности точек $p = 0$ и $\eta = 0$. Его определение позволит в свою очередь описать асимптотическое поведение функции φ в соответствии с формулой (50). Обычно для этой цели используется теория возмущений, с помощью которой удастся получить информацию о поведении функции $\beta(b)$ лишь в малой окрестности точки $b = 0$, где $\beta(b) = 0$. В самом деле, если в этой окрестности значение $\beta(b)$ положительно, то $B(x; b) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, т. е. точка $b = 0$ является устойчивым нулем. Если же $\beta(b)$ принимает отрицательные значения вблизи нуля, то величина $B(x; b)$ возрастает при $x \rightarrow 0$, и теория возмущений становится неприменимой. Используя равенства (54) и (52), мы заключаем, что $B(x; b) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, если $X(x, b) = o(x^{(1-s)/2})$ при $x \rightarrow 0$. Отсюда следует, что если $X(x, b) = O(x^\mu)$ при $x \rightarrow 0$, то в силу соотношений (50) и (51) неравенство

$$1 - s < 2\mu \quad (58)$$

является необходимым условием для определения функции $\beta(b)$ в окрестности $b = 0$.

Выше было показано, что условие (58) также необходимо для сходимости интегралов во всех членах ряда, представляющего функцию $F(\mathbf{p}, E; v; \varphi)$ в окрестности точек $\mathbf{p} = 0$ и $E = 0$. Но, поскольку значение μ не зависит от безразмерной переменной y , поведение функции $X(x, y; b)$ при $x \rightarrow 0$ тоже должно описываться подобным образом: $X(x, y; b) = O(x^\mu)$. Тогда согласно асимптотике (50) для искомой функции φ мы имеем $\varphi = O(x^{\mu-1})$ при $x \rightarrow 0$. Таким образом, задача сводится к оценке функции $F(\mathbf{p}, 0; v; \varphi)$ в малой окрестности точки $p = 0$.

5. АСИМПТОТИКА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Выше было отмечено, что в случае $d < 4$ условие отсутствия самопересечений струны приводит к тому, что величина $\Psi(\chi^2, \eta^2; v; \varphi)$, определенная в (53), должна вносить основной вклад в правую часть уравнения (48). Поскольку в окрестностях точек $p = 0$ и $\eta = 0$ переменные p и η присутствуют в (48) лишь в виде комбинации $p^2 + \eta^2 \equiv \chi^2$, естественно предположить, что функция $\Psi(\chi^2, \eta^2; v; \varphi)$ в окрестности точек $p_\pm \equiv \pm i\eta$, т. е. при $\chi = 0$, ведет себя, как $O(\chi^{2(1-\mu)})$, где $0 < \mu < 1$, и растет быстрее чем χ^2 , когда $\chi^2 \rightarrow \infty$. Подобное поведение функции $\Psi(\chi^2, \eta^2; v; \varphi)$ можно описать следующим образом:

$$\Psi(\chi^2, \eta^2; v; \varphi) \sim a\chi^{1-\mu}K_{1-\mu}^{-1}(a'\chi),$$

где $K_\kappa(z)$ – функция Макдональда, a и a' – некоторые положительные параметры задачи. Функция $K_\kappa(z)$, $0 < \kappa < 1$, используется здесь благодаря своим асимптотическим свойствам

$$\begin{aligned} \frac{2^{1-\kappa}}{\Gamma(\kappa)} z^\kappa K_\kappa(z) &= 1 - \frac{\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa} + \frac{1}{1-\kappa} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(z^{2(1+\kappa)}), \quad z \rightarrow 0, \\ K_\kappa(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (1 + O(z^{-1})), \quad |z| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

адекватно передающим предполагаемое поведение функции Ψ . Кроме того, функция $K_\kappa(z) = K_{-\kappa}(z)$ при каждом фиксированном значении $z \neq 0$ является целой функцией от индекса κ , функционально связанного с размерностью d пространства $\mathbb{R}^d$. Поэтому исходя из уравнения (48), соотношения (50) и описанного выше поведения функции Ψ мы примем в качестве исходного приближения для искомой функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ выражение

$$\tilde{\varphi}(p, \eta) = A \chi^{2(\mu-1)} \bar{K}_{1-\mu}(l\chi), \quad (59)$$

в котором $\bar{K}_\kappa(z) = z^\kappa K_\kappa(z)$, а значения параметров A и $\mu = \mu(d)$, где $0 < \mu < 1$ для $2 \leq d < 4$ ($0 \leq s < 1$), еще следует найти. Тогда согласно формулам (44) и (59) соответствующее приближение для функции $\psi(\mathbf{R}, E)$ имеет вид

$$\tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta) = (2\pi)^{-d/2} A \varrho^{-2\nu} \bar{K}_\nu(\eta \varrho), \quad (60)$$

где $\varrho^2 = l^2 + R^2$, $\nu \equiv \mu + s$, при этом $(s+1)/2 < \nu < 1$.

Чтобы найти значение параметра μ , воспользуемся следующим способом. В соответствии с формулой (49), а также с принятым приближением (59) и, как следствие, приближением (60) запишем для плотности вероятности $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$ приближение

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) = \left[\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE e^{L(E-E_0)} \tilde{\varphi}(0, \eta) \right]^{-1} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE e^{L(E-E_0)} \tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta), \quad (61)$$

для которого получим асимптотическую оценку, когда $L/l \rightarrow \infty$, но значение R/l при этом остается фиксированным.

Поскольку плотность $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$ положительна и, следовательно,

$$\text{Im } \widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) = 0, \quad (62)$$

условие (62) имеет место и для ее асимптотики. Для реализации предложенного подхода обратимся к уравнению (46) и выполним оценку функции $F(p, E; v; \varphi)$ в окрестностях точек $p = 0$ и $E = E_0$ (при $\eta = 0$), используя исходное приближение $\tilde{\varphi}(p, \eta)$ в равенстве (37). В результате получим

$$F(p, E; v; \tilde{\varphi}) = \alpha(p) + k(p)\eta^{2\nu} + O(l^2\eta^2), \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha(p) &= -A_0 l^{-2\nu} \tilde{v}(p) + A_1 l^{2(1+s-3\nu)} \tilde{v}^2(p) \bar{K}_{3\nu-s-1}(lp), \\ k(p) &= \frac{A_0 \Gamma(1-\nu)}{4^\nu \Gamma(1+\nu)} \tilde{v}(p) - A_2 l^{2(1+s-2\nu)} \tilde{v}^2(p) \bar{K}_{2\nu-s-1}(lp), \\ \tilde{v}(p) &= v_0 \Lambda_{s+1}(p),\end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{A\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}(2\pi)^{d/2}}, \quad A_1 = \frac{A^3\Gamma^3(\nu)}{4(2\pi)^d\Gamma(3\nu)}, \quad A_2 = \frac{3A^3\Gamma^3(\nu)\Gamma(1-\nu)}{2^{2+\nu}(2\pi)^d\Gamma(2\nu)\Gamma(1+\nu)}.$$

Подставляя выражение (63) в равенство (46), находим

$$E - E_0 = \alpha(i\eta) - \alpha(0) + (k(i\eta) - k(0))\eta^{2\nu} + O(l^2\eta^2),$$

откуда следует, что

$$E - E_0 = k_0\eta^{2\nu} + O(\eta^{2(3\nu-s-1)}), \quad \eta \rightarrow 0, \quad (64)$$

где $k_0 \equiv k(0) > 0$.

Теперь в интегралах формулы (61) введем новую переменную интегрирования ξ посредством равенства $E - E_0 = k_0\xi$. Тогда из соотношения (64) имеем

$$\xi = \eta^{2\nu} + O(\eta^{2(3\nu-s-1)}), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (65)$$

Далее проведем разрез в комплексной плоскости переменной ξ вдоль отрицательной части вещественной оси и в обоих интегралах формулы (61) сдвинем контур интегрирования ($C - i\infty, C + i\infty$) по ξ бесконечно далеко в левую полуплоскость, обходя при этом особые точки подынтегральных функций, среди которых точка $\xi = 0$ имеет наибольшую вещественную часть. Поэтому максимальный вклад в $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$ при $L \rightarrow \infty$ вносит результат интегрирования в (61) по той части контура интегрирования, которая охватывает указанный разрез $(-\infty, 0]$. Обозначим через $\xi_- = ze^{-i\pi}$ и $\xi_+ = ze^{i\pi}$ (где $z > 0$) значения переменной ξ соответственно на нижнем и на верхнем берегах разреза $(-\infty, 0]$. В формуле (61) учтем результат интегрирования лишь по контуру, охватывающему этот разрез. В итоге получим

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) \sim \left[\int_0^\infty dz e^{-Lk_0 z} \Delta \tilde{\varphi}(\eta) \right]^{-1} \int_0^\infty dz e^{-Lk_0 z} \Delta \tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta), \quad L \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\varphi}(\eta) &\equiv \tilde{\varphi}(0, \eta_+) - \tilde{\varphi}(0, \eta_-) = \\ &= A\Gamma(1-\mu)2^{-\mu} \left(\eta_+^{2(\mu-1)} - \eta_-^{2(\mu-1)} + \frac{l^2}{4\mu} (\eta_+^{2\mu} - \eta_-^{2\mu}) + O(\eta^2 l^{2(2-\mu)}) \right),\end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta) &\equiv \tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta_+) - \tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta_-) = \\ &= \frac{A\Gamma(\nu)}{(2\pi)^{d/2} 2^{1-\nu}} \left(\frac{\Gamma(1-\nu)}{2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)} (\eta_-^{2\nu} - \eta_+^{2\nu}) + \frac{\varrho^{2(1-\nu)}}{4(1-\nu)} (\eta_+^{2\nu} - \eta_-^{2\nu}) + O(\varrho^2 \eta^{2(1+\nu)}) \right),\end{aligned} \quad (67)$$

а переменные $\eta_- = \eta_-(z)$ и $\eta_+ = \eta_+(z)$ согласно формуле (65) связаны с z вблизи точки $z = 0$ на нижнем и верхнем берегах разреза $(-\infty, 0]$:

$$\begin{aligned} ze^{-i\pi} &= \eta_-^{2\nu} + O(\eta_-^{2(3\nu-s-1)}), & \eta_- &\rightarrow 0, \\ ze^{i\pi} &= \eta_+^{2\nu} + O(\eta_+^{2(3\nu-s-1)}), & \eta_+ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Асимптотическая оценка интегралов в (66) при $L \rightarrow \infty$ дает

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) \sim C_0 \frac{(R^2 + l^2)^{1-\nu}}{(k_0 L)^{(2-\mu)/\nu}} \left[\frac{e^{i\pi/\nu} - e^{-i\pi/\nu}}{e^{i\pi(\mu-1)/\nu} - e^{-i\pi(\mu-1)/\nu}} \right], \quad (68)$$

где C_0 – вполне определенная положительная постоянная. Согласно условию (62) величина в квадратных скобках в правой части асимптотического выражения (68) должна быть положительной. Последнее требование соблюдается при выполнении равенства

$$\frac{\pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu}(1 - \mu) = 2\pi n, \quad n = 1, \dots,$$

которое совместно с условием $\nu = \mu + s$ лишь для $n = 1$. Отсюда находим

$$\mu = \frac{2}{3}(1 - s) = \frac{4 - d}{3}, \quad \nu = \frac{s + 2}{3} = \frac{d + 2}{6}.$$

Таким образом, искомая асимптотика плотности $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$ при $L \rightarrow \infty$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) \sim C_0 (R^2 + l^2)^{(1-s)/3} (k_0 L)^{-2}. \quad (69)$$

Отметим, что различие в поведении функций $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$ в (69) и асимптотики плотности в формуле (12) при $L \rightarrow \infty$ уменьшается, когда размерность d растет, приближаясь к $d = 4$. Этот факт объясняется ослаблением эффекта от запрета на самопересечения струны с ростом размерности пространства.

Далее определим для X приближение $\tilde{X}$ с помощью равенства

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{X}}{l\chi^2}, \quad (70)$$

аналогичного (51), и выясним, в каком смысле функцию $\tilde{X}$ можно рассматривать в качестве решения уравнения

$$\tilde{X}^{-1} = 1 + \frac{\Psi(\chi^2, \eta^2; v; \tilde{\varphi})}{l\chi^2}. \quad (71)$$

Для этого рассмотрим асимптотическое поведение функции $\tilde{X}^{-1}$ в точке $\eta = 0$ при $p \rightarrow 0$. С одной стороны, из уравнений (59) и (70) следует, что в точке нормировки $p^2 = \lambda$, где $\tilde{X}(p, 0)|_{p^2=\lambda} = 1$, мы имеем

$$\left. \frac{\partial \tilde{X}(p, 0)}{\partial \ln p^2} \right|_{p^2=\lambda} = \mu + O(\lambda l^2). \quad (72)$$

С другой стороны, если для описания асимптотики правой части уравнения (71) в точке $\eta = 0$ при $p \rightarrow 0$ воспользоваться выражениями (53) и (63), то

$$\Psi(p^2, 0; v; \tilde{\varphi}) = A_0 l^{-2\nu} v_0 (\Lambda_{s+1}(r_0 p) - 1) + \\ + A_1 l^{-2} v_0^2 (\bar{K}_1(0) - \Lambda_{s+1}^2(r_0 p) \bar{K}_1(lp)) + O(l^2 p^2),$$

где при $z \rightarrow 0$

$$\Lambda_{s+1}(z) = 1 - \frac{z^2}{4(s+2)} + O(z^4), \\ \bar{K}_1(z) = 1 + \frac{z^2}{2} \ln \frac{z}{2} + (2\gamma - 1) \left(\frac{z}{2} \right)^2 + O(z^4 \ln z);$$

здесь γ – постоянная Эйлера–Маскерони. Отсюда следует, что

$$(lp^2)^{-1} \Psi(p^2, 0; v; \tilde{\varphi}) = \\ = -CA^3 l^{-1} v_0^2 \ln(l^2 p^2) + \Omega(A, r_0, l) + O(r_0^2 p^2 \ln(l^2 p^2)), \quad p \rightarrow 0, \quad (73)$$

где не зависящая от p^2 величина $\Omega(A, r_0, l)$ связывает параметры A , r_0 , l , а постоянная C задается формулой

$$C = \frac{\Gamma^3(\nu)}{4(2\pi)^d \Gamma(3\nu)}.$$

Тогда из уравнения (71) и выражения (73) следует, что

$$\left. \frac{\partial \tilde{X}(p, 0)}{\partial \ln p^2} \right|_{p^2=\lambda} = CA^3 l^{-1} v_0^2 + O(\lambda r_0^2). \quad (74)$$

Сравнивая правые части равенств (72) и (74), мы получаем, что $A = C_A (lv_0^{-2})^{1/3}$, где C_A – вполне определенная положительная постоянная.

Таким образом, значения всех параметров задачи определены, и мы можем выписать искомую асимптотику плотности вероятности $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ при $2 \leq d < 4$, когда $R/l \rightarrow \infty$ и $L/l \rightarrow \infty$, но их отношение R/L фиксировано и мало. Используя формулы (59)–(61) и (64), находим главный член асимптотического разложения функции $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$:

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) \sim C_d \langle \varrho \rangle^{-d} \mathcal{Z}^{(4-d)D/6} e^{-c_d \mathcal{Z}^D},$$

где

$$\langle \varrho \rangle = (k_0 L)^{3/(d+2)}, \quad \mathcal{Z} \equiv \frac{\varrho}{\langle \varrho \rangle} = \frac{\sqrt{R^2 + l^2}}{(k_0 L)^{3/(d+2)}}, \quad D = \frac{d+2}{d-1},$$

а c_d и C_d – вполне определенные постоянные. Случай $d = 4$ является особым, и его следует рассматривать отдельно. Тем не менее полученный результат позволяет предположить, что в случае $d > 4$ асимптотика плотности вероятности при рассмотренных выше условиях имеет форму нормального распределения. Это означает, что в этом случае условие отсутствия самопересечений оказывает несущественное влияние на распределение расстояния между концами струны [6], [7].

6. КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ ОТКРЫТЫХ СТРУН

Рассмотрим теперь модель ансамбля из M струн, средняя длина которых по всем струнам равна заданной величине $\bar{L}$, и найдем наиболее вероятное распределение струн по их длинам в предельном случае $M \rightarrow \infty$. Для вывода канонического ансамбля мы воспользуемся известным методом Дарвина–Фаулера [8]. Допустим, что длины струны в ансамбле могут принимать любое из значений $L_k = kL$; здесь $k = 0, 1, 2, \dots$, а L – масштабная длина струны. Если в ансамбле m_k струн имеют длину L_k , то набор целых чисел $\{m_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, описывает любое распределение их длин. При этом должны выполняться следующие условия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k \equiv \Xi = M, \quad \sum_{k=0}^{\infty} km_k \equiv \bar{\Xi} = M\bar{N}, \quad (75)$$

где $\bar{N} \equiv \bar{L}/L \gg 1$ и M суть целые числа. Пусть $W\{m_k\}$ обозначает число различных способов распределения длин по струнам при соблюдении условий (75). Очевидно, что

$$W\{m_k\} = \frac{M!}{m_0! m_1! m_2! \dots}. \quad (76)$$

Согласно аксиоме равных априорных вероятностей в данном случае можно утверждать, что все распределения длины между струнами имеют одинаковую вероятность, если выполнены условия (75). Тогда средние значения величин m_k по всем распределениям длин определяются как

$$\langle m_k \rangle \equiv \frac{\sum_{\{m_j\}} m_k W\{m_j\}}{\sum_{\{m_j\}} W\{m_j\}},$$

где суммирование выполняется по всем наборам $\{m_k\}$, удовлетворяющим равенствам (75).

Пусть $\{\bar{m}_k\}$ есть множество, соответствующее максимальному значению величины $W\{m_k\}$. Если $\langle m_k^2 \rangle \rightarrow \langle m_k \rangle^2$ при $M \rightarrow \infty$, то в этом предельном случае $\langle m_k \rangle \rightarrow \langle \bar{m}_k \rangle$. Чтобы вычислить величину $\langle m_k \rangle$ с помощью формулы (76), удобно воспользоваться более общим выражением

$$W'\{m_k\} = M! \frac{\lambda_0^{m_0} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots}{m_0! m_1! m_2! \dots},$$

а числа λ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, в конце вычислений положить равными единице. Принимая во внимание условие (75) при вычислении суммы

$$S(M, \bar{N}) \equiv \sum_{\{m_k\}} W'\{m_k\},$$

воспользуемся формулами Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d\zeta \zeta^{\Xi-M-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Xi = M, \\ 0, & \text{если } \Xi \neq M, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz z^{\bar{\Xi}-M\bar{N}-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{\Xi} = M\bar{N}, \\ 0, & \text{если } \bar{\Xi} \neq M\bar{N}, \end{cases}$$

где замкнутые контуры Γ и γ охватывают начала координат в плоскостях комплексных переменных ζ и z соответственно. Отсюда следует, что

$$S(M, \bar{N}) = \frac{M!}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma} dz z^{-M\bar{N}-1} \oint_{\Gamma} d\zeta \zeta^{-M-1} e^{\zeta h(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz z^{-M\bar{N}-1} h^M(z), \quad (77)$$

где

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k.$$

Далее, используя метод перевала для асимптотической оценки последнего интеграла в (77) при $M \rightarrow \infty$, мы получим

$$S(M, \bar{N}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi M H''(z_0)}} e^{MH(z_0)}, \quad M \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} H(z_0) &= \ln h(z_0) - (\bar{N} + M^{-1}) \ln z_0, \\ H''(z_0) &= \frac{h''(z_0)}{h(z_0)} - \frac{(\bar{N} + M^{-1})(\bar{N} + M^{-1} - 1)}{z_0^2}, \end{aligned}$$

а z_0 – положительный корень уравнения $H'(z_0) = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{M} \ln S(M, \bar{N}) \rightarrow H(z_0), \quad M \rightarrow \infty,$$

и тогда, принимая во внимание это соотношение, а также равенство

$$\langle m_k \rangle = \lambda_k \frac{\partial \ln S(M, \bar{N})}{\partial \lambda_k},$$

мы получим

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\langle m_k \rangle}{M} \equiv P(k) = \frac{e^{-\xi k}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\xi n}}, \quad (78)$$

где $\xi = -\ln z_0$. Пользуясь этой формулой, можно показать, что $\langle m_k \rangle = \langle \bar{m}_k \rangle$ при $M \rightarrow \infty$. Параметр ξ здесь определяется уравнением

$$\bar{N} = Ek \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k P(k), \quad (79)$$

из которого следует, что $z_0 = \bar{N}/(\bar{N} + 1)$. Учитывая уравнение (79), усредним равенство (43) по распределению (78):

$$EW(\mathbf{R}, L) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} W(\mathbf{R}, L_k) P(k) = \bar{L}^{-1} \psi(\mathbf{R}, \bar{L}^{-1}). \quad (80)$$

Далее мы определим плотность распределения

$$\langle W(\mathbf{R}, L) \rangle \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{R} EW(\mathbf{R}, L) \right)^{-1} EW(\mathbf{R}, L).$$

Отсюда с учетом формул (44), (80) вытекает, что

$$\langle W(\mathbf{R}, L) \rangle = \frac{\psi(\mathbf{R}, \bar{L}^{-1})}{\varphi(0, \bar{L}^{-1})}.$$

Следуя изложенному выше подходу, воспользуемся в этом соотношении приближением (59) и получим соответствующее приближение для $\langle W(\mathbf{R}, L) \rangle$:

$$\langle \widetilde{W}(\mathbf{R}, L) \rangle = \frac{\tilde{\psi}(R, \eta)}{\tilde{\varphi}(0, \eta)},$$

где связь между η и $\bar{L}$ задается как

$$\bar{L}^{-1} = k_0 \eta^{2\nu} + O(l\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0,$$

в соответствии с равенством (64). В результате имеем

$$\langle \widetilde{W}(\mathbf{R}, L) \rangle = \tilde{C}_d \varrho^{-\alpha} \tilde{L}^{-\beta} K_\nu(\varrho/\tilde{L}), \quad (81)$$

где $\tilde{C}_d$ – определенная положительная постоянная, $\varrho^2 = l^2 + R^2$,

$$\alpha = \frac{d-1}{3}, \quad \beta = \frac{2d+1}{3}, \quad \nu = \frac{d+2}{6}, \quad \tilde{L} = (k_0 \bar{L})^{1/2\nu}.$$

Таким образом, формула (81) описывает распределение канонического ансамбля открытых струн, избегающих самопересечения в $\mathbb{R}^d$ при $2 \leq d < 4$.

Список литературы

- [1] В. И. Алхимов, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:5 (2012), 3–20.
- [2] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [3] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1976.
- [4] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [5] M. Gell-Mann, F. E. Low, *Phys. Rev.*, **95**:5 (1954), 1300–1312.
- [6] D. Bridges, T. Spencer, *Commun. Math. Phys.*, **97**:1–2 (1985), 125–148.
- [7] T. Hara, G. Slade, *Rev. Math. Phys.*, **4**:2 (1992), 235–327.
- [8] К. Хуанг, *Статистическая механика*, Мир, М., 1966.

Поступила в редакцию 16.12.2013,
после доработки 18.03.2014