Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Хатамов, Новые классы основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 1, 86–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:39:19

© 2014 г.

Н. М. Хатамов*

НОВЫЕ КЛАССЫ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С РАССЕЯННЫМИ КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рассматривается модель Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. Для этой модели изучается область основных состояний.

Ключевые слова: дерево Кэли, модель Поттса, основные состояния.

DOI: 10.4213/tmf8637

Основные состояния для моделей статистической физики на дереве Кэли изучены в работах [1]–[4]. В работе [5] исследована структура основных состояний для модели Изинга с взаимодействиями на три шага на решетке $\mathbb{Z}^3$. В настоящей работе рассматривается модель Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли и для этой модели изучается структура основных состояний.

Дерево Кэли (или решетка Бете в другой терминологии) Γ^k порядка $k \geq 1$ представляет собой бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер [1]–[4]. Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин Γ^k , L – его множество ребер, i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями*, и вводится обозначение $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$ для любых $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_d = y \in V \text{ такой, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k свободных произведений $k + 1$ циклической группы второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно.

Рассмотрим модель, в которой спин принимает значения из множества

$$\Phi = \{1, 2, \dots, q\}, \quad q \geq 2.$$

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: nxatamov@mail.ru

Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Предположим, что на множестве Ω действует группа пространственных переходов. Определим F_k -периодическую конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $F_k \subset G_k$ конечного индекса, т.е. $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k, y \in F_k$. Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется *периодом конфигурации*. Конфигурация, которая является инвариантной относительно всех переходов, называется *трансляционно-инвариантной*.

Пусть $\langle x^0, x^1 \rangle = l \in L$ – фиксированное ребро (см. [6]). Рассмотрим два полубесконечных дерева Γ_0^k и Γ_1^k , где Γ_0^k – дерево, растущее из вершины $x^0 \in V$ “вверх”, проходящее через x^1 , а Γ_1^k – дерево, растущее из вершины $x^1 \in V$ “вниз”, проходящее через x^0 .

На деревьях Γ_0^k и Γ_1^k можно ввести частичное упорядочение, сказав, что $y > x$, если $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y$ из x в y , “идущий вверх” для Γ_0^k , а для Γ_1^k “идущий вниз”, т.е. $d(x_k, x^i) = d(x_{k-1}, x^i) + 1, k = 1, \dots, n, i = 0, 1$.

Вершина y называется *прямым потомком* x , если $y > x$ и x, y являются ближайшими соседями.

Множество прямых потомков точки x на дереве Γ_0^k лежит сверху, а на дереве Γ_1^k – снизу от точки x .

Пусть $\Gamma_0^k = (V^0, L^0)$ и $\Gamma_1^k = (V^1, L^1)$, т.е. V^i – множество вершин Γ_i^k, L^i – множество его ребер, $i = 0, 1$. Понятно, что $V^0 \cup V^1 = V, L^0 \cup L^1 = L$.

Если точки $x, y \in V$ являются прямыми потомками некоторой вершины, то точки $x, y \in V$ называются *вершинами, лежащими на одном “этаже”*, и обозначаются $\rangle x, y \langle$. Ясно, что $d(x, y) = 2$.

Если точки $x, y \in V$ такие, что $d(x, y) = 2$ и только одна из них является прямым потомком некоторой вершины, то $x, y \in V$ называются *вершинами, лежащими на разных “этажах”*, и обозначаются $\rangle \rangle x, y \langle \langle$.

Гамильтониан модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle; x, y \in V} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\rangle x, y \langle; x, y \in V} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_3 \sum_{\rangle \rangle x, y \langle \langle; x, y \in V} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J_1, J_2, J_3 \in \mathbb{R}$,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

Для пары конфигураций σ и φ , совпадающих почти всюду, т.е. всюду, за исключением конечного числа точек, мы рассмотрим относительный гамильтониан $H(\sigma, \varphi)$ – разлчие между энергиями конфигураций σ, φ , т.е.

$$\begin{aligned} H(\sigma, \varphi) = & J_1 \sum_{\langle x, y \rangle; x, y \in V} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) + J_2 \sum_{\rangle x, y \langle; x, y \in V} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) + \\ & + J_3 \sum_{\rangle \rangle x, y \langle \langle; x, y \in V} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $J = (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3$ – произвольный фиксированный параметр.

Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V . Будем называть сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b . Определим энергию конфигурации σ_b на шаре b следующим образом:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x, y \rangle; x, y \in b} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\rangle x, y \langle; x, y \in b} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_3 \sum_{\rangle\rangle x, y \langle\langle; x, y \in b} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (3)$$

где $J = (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3$.

Из этого определения для относительного гамильтониана можно получить следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Относительный гамильтониан (2) имеет вид*

$$H(\sigma, \varphi) = \sum_{b \in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)).$$

Рассмотрим случай $k = 2$ и $q = 3$. Легко видеть, что $U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, \dots, U_9\}$ для любого σ_b , где

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{2}J_1 + 2J_2 + J_3, & U_2 &= J_1 + J_3, & U_3 &= 2J_2 + J_3, & U_4 &= \frac{1}{2}J_1 + J_3, \\ U_5 &= J_3, & U_6 &= J_1 + J_2, & U_7 &= \frac{1}{2}J_1 + J_2, & U_8 &= J_2, & U_9 &= \frac{1}{2}J_1. \end{aligned} \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конфигурация φ называется *основным состоянием* относительного гамильтониана H , если $U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, \dots, U_9\}$ для любого $b \in M$.

Обозначим $C_i = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_i\}$ и $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$, если $\sigma_b \in C_i$, $i = 1, \dots, 9$.

ТЕОРЕМА 1. А. Пусть C – один из классов $C_1, C_2 \cup C_6, C_3, C_9, C_5 \cup C_8 \cup C_9$, а $\sigma_b \in C$ – произвольная ограниченная конфигурация. Тогда существует периодическая конфигурация φ (на дереве Кэли) с периодом $p \leq 8$ такая, что $\varphi_{b'}$ принадлежит C для любого $b' \in M$ и $\varphi_b = \sigma_b$.

Б. Пусть C – один из классов $C_5, C_8, C_3 \cup C_5, C_5 \cup C_8$, а $\sigma_b \in C$ – произвольная конфигурация. Тогда существует конфигурация φ (вообще говоря, не являющаяся периодической) такая, что $\varphi_{b'} \in C$ для любого $b' \in M$ и $\varphi_b = \sigma_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Для произвольного класса $C \in \{C_1, C_2 \cup C_6, C_3, C_9, C_5 \cup C_8 \cup C_9\}$ и $\sigma_b \in C$ построим конфигурацию φ следующим образом: без ограничения общности мы можем в качестве шара b взять шар с центром $e \in G_2$ (где e – единичный элемент G_2), т. е. $b = \{e, a_1, a_2, a_3\}$.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай C_1 . В этом случае мы имеем $\sigma(x) = i$, $i = 1, 2, 3$, для любого $x \in b$. Таким образом, конфигурация φ совпадает с трансляционно-инвариантной, т. е. $\varphi^{(i)} = \{\varphi^{(i)}(x) = i\}$, где $i = 1, 2, 3$.

Случай $C_2 \cup C_6$. Рассмотрим $H_2 = \{x \in G_2: \omega_2(x) \text{ четно}\}$, где $\omega_2(x)$ – число букв a_2 в слове $x \in G_2$. Отметим, что H_2 – нормальная подгруппа индекса 2 для G_2 (см. [4]). По построению мы имеем $\sigma_b(x) = i$ для любого $x \in b \cap H_2$ и $\sigma(x) = j$ для любого $x \in b \cap (G_2 \setminus H_2)$, где $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

Продолжим ограниченную конфигурацию $\sigma_b \in C_2 \cup C_6$ на целую решетку Γ^2 (которую обозначим $\varphi^{(ij)}$) следующим образом:

$$\varphi^{(ij)}(x) = \begin{cases} i, & x \in H_2, \\ j, & x \in G_2 \setminus H_2, \end{cases}$$

где $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

Случай C_3 . В этом случае рассмотрим $H_3 = \{x \in G_2: |x| \text{ четно}\}$, где $|x|$ – длина слова x . Отметим, что H_3 также является нормальной подгруппой группы G_2 индекса 2 (см. [4]). В этом случае конфигурация $\psi^{(ij)}$ может быть определена как

$$\psi^{(ij)}(x) = \begin{cases} i, & x \in H_3, \\ j, & x \in G_2 \setminus H_3, \end{cases}$$

где $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. Таким образом, мы получаем периодическую конфигурацию $\psi^{(ij)}$ с периодом $p = 2$ (равным индексу подгруппы); ясно, что $\psi_b^{(ij)} = \sigma_b$.

Случай C_9 . Пусть S_3 – группа перестановок третьего порядка. Возьмем следующие $\pi_0, \pi_1, \pi_2 \in S_3$:

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\pi_0 = \pi_1^2 = \pi_2^2$. Рассмотрим отображение $u: \{a_1, a_2, a_3\} \mapsto \{\pi_0, \pi_1, \pi_2\}$:

$$u(a_1) = \begin{cases} \pi_0, & i = 3, \\ \pi_i, & i = 1, 2, \end{cases}$$

и пусть функция $f: G_2 \mapsto S_3$ определена следующим образом:

$$f(x) = f(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}) = u(a_{i_1}) \cdots u(a_{i_n}).$$

Ясно, что $H_4 = \{x \in G_2: f(x) = \pi_0\}$ – нормальная подгруппа с индексом 6 (см. [4]). Пусть $G_2/H_4 = \{\aleph_0, \dots, \aleph_5\}$ – фактор-группа. В этом случае мы определим конфигурацию $\varphi^{(ijp)}$ следующим образом:

$$\varphi^{(ijp)}(x) = \begin{cases} i, & x \in \aleph_0 \cup \aleph_3, \\ j, & x \in \aleph_1 \cup \aleph_5, \\ p, & x \in \aleph_2 \cup \aleph_4. \end{cases}$$

Таким образом, мы получим периодическую конфигурацию $\varphi^{(ijp)}$ с периодом $p = 6$, со свойством $\varphi_b^{(ijp)} = \sigma_b$.

Случай $C_5 \cup C_8 \cup C_9$. В этом случае рассмотрим нормальные подгруппы H_2 , H_3 и $H_{12} = \{x \in G_2 : \omega_1(x) + \omega_2(x) \text{ четно}\}$, где H_{12} также является нормальной подгруппой индекса 2 для G_2 (см. [4]).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_0 &= H_{12} \cap H_3 \cap H_2, \\ \mathbb{Z}_1 &= H_{12} \cap H_3 \cap (G_2 \setminus H_2), \\ \mathbb{Z}_2 &= H_{12} \cap (G_2 \setminus H_3) \cap H_2, \\ \mathbb{Z}_3 &= H_{12} \cap (G_2 \setminus H_3) \cap (G_2 \setminus H_2), \\ \mathbb{Z}_4 &= (G_2 \setminus H_{12}) \cap H_3 \cap H_2, \\ \mathbb{Z}_5 &= (G_2 \setminus H_{12}) \cap H_3 \cap (G_2 \setminus H_2), \\ \mathbb{Z}_6 &= (G_2 \setminus H_{12}) \cap (G_2 \setminus H_3) \cap H_2, \\ \mathbb{Z}_7 &= (G_2 \setminus H_{12}) \cap (G_2 \setminus H_3) \cap (G_2 \setminus H_2).\end{aligned}$$

Известно (см. [4]), что множество $\mathbb{Z}_0$ является нормальной подгруппой индекса 8 группы G_2 и образует $G_2/\mathbb{Z}_0 = \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_7\}$ – фактор-группу. В этом случае мы определим конфигурацию $\psi^{(ijp)}$ следующим образом:

$$\psi^{(ijp)} = \begin{cases} i, & x \in \mathbb{Z}_0 \cup \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_3, \\ j, & x \in \mathbb{Z}_4 \cup \mathbb{Z}_7, \\ p, & x \in \mathbb{Z}_5 \cup \mathbb{Z}_6, \end{cases}$$

где $i, j, p = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq p$. Таким образом, мы получим периодическую конфигурацию $\psi^{(ijp)}$ с периодом $p = 8$ со свойством $\psi_b^{(ijp)} = \sigma_b$.

Б. Случай C_5 . Для $x \in G_2$ введем обозначения $l(x) = l(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) = i_1$, $r(x) = r(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) = i_n$. В этом случае мы можем определить $\psi_1^{(ijp)}(x)$ как

$$\psi_1^{(ijp)}(x) = \begin{cases} i, & |x| = 0 \pmod{3}, \\ j, & |x| = 2 \pmod{3}, \quad l(x) = 1, \quad \text{или} \quad |x| = 1 \pmod{3}, \quad l(x) \neq 1, \\ p, & |x| = 1 \pmod{3}, \quad l(x) = 1, \quad \text{или} \quad |x| = 2 \pmod{3}, \quad l(x) \neq 1, \end{cases}$$

где $i, j, p = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq p$.

Случай C_8 . Для этого класса конфигурации определим

$$\psi_2^{(ijp)}(x) = \begin{cases} i, & r(x) = 1, \quad l(x) \neq 3, \quad \text{или} \quad r(x) = 3, \quad l(x) = 3, \\ j, & r(x) + l(x) = 4, \\ p, & r(x) = 2, \quad l(x) = 1, \quad \text{или} \quad r(x) + l(x) = 5, \\ p, & x = e. \end{cases}$$

Таким образом, мы имеем конфигурацию $\psi_2^{(ijp)}$ (вообще говоря, не являющуюся периодической) со свойством $\psi_{2b}^{(ijp)} = \sigma_b$, где $\psi_{2b}^{(ijp)}$ – сужение конфигурации $\psi_2^{(ijp)}$ на b .

Случай $C_2 \cup C_5$. В этом случае конфигурация $\psi_3^{(ijp)}$ может быть определена как

$$\psi_3^{(ijp)}(x) = \begin{cases} i, & |x| = 0 \pmod{3}, \\ j, & |x| = 1 \pmod{3}, \\ p, & |x| = 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Случай $C_5 \cup C_8$. В этом случае мы определим конфигурацию $\psi_4^{(ijp)}$ следующим образом:

$$\psi_4^{(ijp)} = \begin{cases} i, & r(x) = 1, \quad l(x) \neq 3, \quad \text{или} \quad r(x) = 3, \quad l(x) = 3, \\ j, & r(x) = 2, \\ p, & r(x) = 3, \quad l(x) \neq 3, \quad \text{или} \quad r(x) = 1, \quad l(x) = 3, \\ p, & x = e. \end{cases}$$

По построению ясно, что для каждой конфигурации

$$\varphi \in \{\varphi^{(i)}, \varphi^{(ij)}, \psi^{(ij)}, \varphi^{(ijp)}, \psi^{(ijp)}, \psi_1^{(ijp)}, \psi_2^{(ijp)}, \psi_3^{(ijp)}, \psi_4^{(ijp)}\}$$

мы имеем $\varphi_{b'} \in C$, если $\sigma_b \in C$ и $C \in \{C_1, C_2 \cup C_6, C_3, C_9, C_5 \cup C_8 \cup C_9, C_5, C_8, C_3 \cup C_5, C_5 \cup C_8\}$ для любого $b' \in M$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [3] также получены конфигурации $\varphi^{(i)}, \varphi^{(ij)}, \psi^{(ij)}, \varphi^{(ijp)}, \psi_4^{(ijp)}$ для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. Из классов C_4 и C_7 нельзя построить конфигурации. Поэтому эти классы не включены в теорему 1.

Для каждого $m = 1, 2, \dots, 9$ обозначим через A_m множество точек J таких, что $U_m(J) = \min(\{U_i(J)\}, i = 1, 2, \dots, 9)$, т.е. $A_m(J) = \{J \in \mathbb{R}^3: \min\{U_1(J), U_2(J), \dots, U_9(J)\} = U_m(J)\}$.

Следующие результаты получены путем непосредственных вычислений:

- а) $A_1 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \leq 0, J_1 + 2J_2 + 2J_3 \leq 0\},$
 $A_2 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 \geq 0, J_2 \leq 0, J_2 + J_3 \leq 0\},$
 $A_3 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \geq 0, J_2 - J_3 \geq 0, J_1 + 2J_3 \leq 0\},$
 $A_4 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 = 0, J_2 \geq 0, J_3 \leq 0\},$
 $A_5 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 \geq 0, J_2 \geq 0, J_2 - J_3 \geq 0, J_1 - 2J_3 \geq 0\},$
 $A_6 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 \leq 0, J_1 + 2J_2 \leq 0, J_2 - J_3 \leq 0, J_1 + 2J_2 + 2J_3 \geq 0\},$
 $A_7 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 = 0, J_2 \leq 0, J_2 + J_3 \geq 0\},$
 $A_8 = \{J \in \mathbb{R}^3: J_1 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0, J_3 \geq |J_3|\},$
 $A_9 = \{J \in \mathbb{R}^3: |J_1| \leq 2J_2, |J_1| \leq 2J_3\};$

б) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9 = \mathbb{R}_+^3$ ($J_3 > 0$) (рис. 1);

в) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \mathbb{R}_-^3$ ($J_3 \leq 0$) (рис. 2);

г) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9 = \mathbb{R}^3$.

Рис. 1

Рис. 2

На рис. 1 и рис. 2 показаны сечения множеств A_m , $m = 1, 2, 3, 5, \dots, 9$, плоскостями $J_3 = a$ ($a > 0$) и сечения множеств A_m , $m = \overline{1}, 5$, плоскостями $J_3 = a$ ($a \leq 0$) соответственно.

Введем обозначения:

$$B_{i_1 i_2 \dots i_k} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}, \quad k = 2, 3, 4, \quad \text{где } 1 \leq i_j \leq 9, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\widetilde{A}_1 = A_1 \setminus (B_{12} \cup B_{13} \cup B_{16}),$$

$$\widetilde{A}_2 = B_{36} \setminus (B_{369} \cup B_{136}),$$

$$\widetilde{A}_3 = A_2 \setminus (B_{12} \cup B_{25} \cup B_{27} \cup B_{28}),$$

$$\widetilde{A}_4 = A_9 \setminus (B_{39} \cup B_{49} \cup B_{59} \cup B_{69} \cup B_{89}),$$

$$\begin{aligned}
 \widetilde{A}_5 &= B_{589} \setminus \{(0, 0, 0)\}, \\
 \widetilde{B}_1 &= A_5 \setminus (B_{58} \cup B_{59} \cup B_{25} \cup B_{35}), \\
 \widetilde{B}_2 &= A_8 \setminus (B_{28} \cup B_{58} \cup B_{78} \cup B_{89}), \\
 \widetilde{B}_3 &= B_{25} \setminus (B_{125} \cup B_{258}), \\
 \widetilde{B}_4 &= B_{58} \setminus (B_{258} \cup B_{589}), \\
 \widetilde{B}_5 &= B_{12} \setminus (B_{13} \cup B_{16}), \\
 \widetilde{B}_6 &= B_{13} \setminus (B_{12} \cup B_{16}), \\
 \widetilde{B}_7 &= B_{39} \setminus (B_{49} \cup B_{369}), \\
 \widetilde{B}_8 &= B_{369} \setminus \{(0, 0, 0)\}.
 \end{aligned}$$

Здесь B_{ij} , $i, j = \overline{1, 9}$, – части плоскостей в $\mathbb{R}^3$, а множества B_{ijk} , $i, j, k = \overline{1, 9}$, – лучи в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $GS(H)$ – множество всех основных состояний, а $GS_p(H)$ – множество всех периодических основных состояний.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения.*

Если $J = (0, 0, 0)$, тогда $GS(H) = \Omega$.

Если $J \in \widetilde{A}_1$, тогда $GS_p(H) = \{\varphi^{(i)} : i = 1, 2, 3\}$.

Если $J \in \widetilde{A}_2$, тогда $GS_p(H) = \{\varphi^{(ij)} : i, j = 1, 2, 3, i \neq j\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

Если $J \in \widetilde{A}_3$, тогда $GS_p(H) = \{\psi^{(ij)} : i, j = 1, 2, 3, i \neq j\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

Если $J \in \widetilde{A}_4$, тогда $GS_p(H) = \{\varphi^{(ijp)} : i, j, p = 1, 2, 3, i \neq j \neq p\}$, $|GS_p(H)| = 3$.

Если $J \in \widetilde{A}_5$, тогда $GS_p(H) = \{\psi^{(ijp)} : i, j, p = 1, 2, 3, i \neq j \neq p\}$, $|GS_p(H)| = 6$.

Если $J \in \widetilde{B}_i$, $i = \overline{1, 4}$, тогда $GS_p(H) \supset \{\psi_k^{(ijp)} : i, j, p = 1, 2, 3, i \neq j \neq p, k = \overline{1, 4}\}$.

Здесь в каждом случае конфигурации определены в доказательстве теоремы 1.

Если $J \in \widetilde{B}_i$, $i = 5, 6, 7, 8$, тогда $|GS_p(H)| = 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение тривиально. В остальных случаях для данной конфигурации σ_b , которая делает энергию $U(\sigma_b)$ минимальной, с помощью теоремы 1 можно построить периодические конфигурации $\varphi^{(ij)}$, $\varphi^{(ijp)}$, $\psi^{(ijp)}$ (с периодом $p \leq 8$). Для каждого случая точное число таких основных состояний совпадает с числом различных конфигураций φ_b таких, что энергия $U(\varphi_b)$ будет минимальной для любого $b \in M$. Теорема доказана.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность профессору У. А. Розикову за полезные дискуссии и советы.

Список литературы

- [1] У. А. Розиков, *J. Stat. Phys.*, **122**:2 (2006), 217–235.
- [2] У. А. Розиков, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [3] Г. И. Ботиров, У. А. Розиков, *ТМФ*, **153**:1 (2007), 86–97.
- [4] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [5] И. А. Кашапов, *ТМФ*, **33**:1 (1977), 110–118.
- [6] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35**:2 (1990), 220–230.