Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Об асимптотике спектра операторов, связанных с p -адическим полями, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 1, 3–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:35:20

© 2014 г.

Р. С. Исмагилов*

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С p -АДИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

Рассматривается локально компактное несвязное недискретное поле. Изучается линейный оператор, являющийся суммой оператора умножения на функцию и оператора свертки с обобщенной функцией. Выводится асимптотика спектра указанного оператора. К этой задаче применяется обобщенная p -адическая формула Фейнмана–Каца.

Ключевые слова: асимптотика, спектр, формула Фейнмана–Каца, след оператора, p -адическое поле.

DOI: 10.4213/tmf8638

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные исследования прошлых лет были посвящены асимптотике спектра операторов вида $P(\partial/\partial x) + q(x_1, \dots, x_n)$, где P – многочлен, q – вещественная функция, в предположении, что спектр является дискретным, в частности изучался оператор Шредингера [1]. В предлагаемой работе рассматривается аналог этой задачи для p -адических полей.

Пусть K есть p -адическое поле (например, поле p -адических чисел либо поле формальных (полубесконечных вправо) рядов Лорана над конечным полем) с кольцом целых элементов K_0 и нормой $|\cdot|$, принимающей значения p^k (здесь $k \in \mathbb{Z}$, p – число элементов поля вычетов по идеалу $\{x: |x| < 1\}$). Положим $B_m = \{x: |x| \leq p^m\}$, таким образом, шары радиуса p^m будут записываться в виде $a + B_m$. Фиксируем меру dx условием

$$\int_{K_0} dx = 1;$$

это приводит к гильбертову пространству $L_2(K)$. Введем также пространство S , состоящее из функций с компактным носителем, постоянных в каждом шаре $a + B_m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, где m зависит от выбора функции. Возьмем аддитивный характер χ , равный единице на K_0 . Он порождает преобразование Фурье $F: f \mapsto \tilde{f}$,

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: ismagil@bmstu.ru

которое определяется сначала на функциях из S и затем продолжается до унитарного оператора в $L_2(K)$.

Любая вещественная непрерывная функция $x \mapsto u(x)$, $x \in K$, порождает оператор M_u в $L_2(K)$, действующий на функции с компактным носителем как оператор умножения на $u(x)$. Пара функций u, v порождает оператор $T_{u,v} = M_u + FM_vF^{-1}$; он задается первоначально на S , после чего берется его замыкание. Если хотя бы одна из функций u или v имеет равномерно ограниченное колебание в шарах $a + B_m$ (для некоторого фиксированного m), то оператор $T_{u,v}$ самосопряжен. Простое доказательство этого утверждения приводится в работе автора [2].

Наша цель – исследование асимптотики функции $t \mapsto \text{tr} \exp(-tT_{u,v})$ при $t \rightarrow +0$; предполагается, что функции u, v ограничены снизу. В полученных нами асимптотических формулах можно усмотреть аналогию с вещественным случаем. Однако имеется существенная разница: если для поля вещественных чисел вывод асимптотических формул требует кропотливого анализа, то в p -адическом случае вывод этих формул получается чрезвычайно просто и может быть отнесен в разряд “легкого чтения”.

В разделах 4–6 указан еще один подход к описанной задаче, основанный на обобщении p -адической формулы Фейнмана–Каца, полученной в работе автора [2].

Собравшись со скромным размером настоящей статьи, мы не включили в список литературы ряд замечательных исследований последних лет по p -адическому анализу, ограничившись лишь фундаментальной работой [3].

2. ОДНА ТОЧНАЯ ФОРМУЛА

Введем функции

$$U(t) = \int_K e^{-tu(x)} dx, \quad V(t) = \int_K e^{-tv(x)} dx, \quad t > 0. \quad (1)$$

Предполагается, что написанные интегралы конечны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция u постоянна в каждом шаре радиуса p^m , а функция v постоянна в каждом шаре радиуса p^{-m} для некоторого целого m . Тогда при всех $t > 0$

$$\text{tr} \exp(-tT_{u,v}) = U(t)V(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $L_2(a+B_m)$ пространство функций из $L_2(K)$, сосредоточенных в шаре $a+B_m$. Преобразование Фурье переводит $L_2(a+B_m)$ в пространство функций $\tilde{L}_2(a+B_m) \subset L_2(K)$, которые кратны функции $\chi(ax)$ в любом шаре $b+B_{-m}$. Так как функция v постоянна в каждом таком шаре, пространство $L_2(a+B_m)$ инвариантно относительно оператора FM_vF^{-1} , и спектр оператора в этом пространстве совпадает со множеством значений функции v на всевозможных шарах $b+B_{-m}$ (каждая точка спектра имеет кратность, равную числу шаров, в которых принимается это значение). С другой стороны, функция u принимает в шаре $a+B_m$ постоянное значение $u(a)$. Отсюда следует, что спектр оператора $T_{u,v}$ есть множество всех сумм значений функций u, v (каждое значение имеет некоторую кратность). Отсюда вытекает утверждение теоремы.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕКТРА. ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

Чтобы применить теорему 1 для вывода асимптотических формул для спектра, используем следующее простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $u_i \geq 1$, $v_i \geq 1$, $i = 1, 2$, и операторы T_{u_i, v_i} являются самосопряженными. Пусть

$$u_1(x) \sim u_2(x), \quad v_1(x) \sim v_2(x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad x \in K.$$

Тогда $\text{tr} \exp(-tT_{u_1, v_1}) \sim \text{tr} \exp(-tT_{u_2, v_2})$ при $t \rightarrow +0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко выводится из неравенств для операторов T_{u_i, v_i} , возникающих из ограничений, наложенных на функции u_i и v_i , $i = 1, 2$.

Обратимся к p -адическому оператору Шредингера. Он получается, если взять в качестве v функцию $|x|^\alpha$, где $\alpha > 0$; будем записывать его в виде $M_u + D^\alpha$, где $D^\alpha = FM_v F^{-1}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторого m функция u постоянна в любом шаре радиуса p^m и $\alpha > 1$. Тогда

$$\text{tr} \exp(-t(M_u + D^\alpha)) \sim \frac{\Gamma(1 + 1/\alpha)}{1 - 1/p} t^{-1/\alpha} \int_K e^{-tu(x)} dx$$

(при условии, что последний интеграл конечен при $t > 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь предложением 1, можно заменить функцию $|x|^\alpha$ функцией

$$v_0(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & |x| \geq p^{-m}, \\ 0, & |x| < p^{-m}. \end{cases}$$

Функция v_0 постоянна в шарах радиуса p^{-m} , таким образом, асимптотика функции $\text{tr} \exp(-t(M_u + D^\alpha))$ определяется теоремой 1 (с учетом предложения 1). Далее,

$$\int_K e^{-t|x|^\alpha} dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_k e^{-tp^{\alpha k}} p^k.$$

Асимптотика последней функции при $t \rightarrow +0$ легко выводится путем перехода от сумм к интегралам. Это приводит к нужному результату.

В заключение данного раздела напомним, что при исследовании спектральной асимптотики самосопряженного оператора T наиболее часто используются два метода: оценивание величины $\text{tr}(T + \lambda)^{-1}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и оценивание величины $\text{tr} \exp(-tT)$ при $t \rightarrow +0$. Первый из этих приемов был использован автором в работе [2], где выписана асимптотика спектра (точнее, асимптотика следа резольвенты $\text{tr}(T + \lambda)^{-1}$ при ограничениях, приводящих к дискретному ограниченному снизу спектру). В настоящей работе мы применили второй из этих методов. Мы увидим, что он оказался чрезвычайно простым.

В следующем разделе мы применим к указанной задаче “вероятностные соображения”. Этот подход можно использовать лишь при одном ограничении на функцию v , описанном в разделе 4; это ограничение выполнено для указанной выше функции $|x|^\alpha$, $\alpha > 1$ (а также для функций вида $x \mapsto g(|x|)$, где g – неубывающая функция и $g(0) = 0$).

4. СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

В этом разделе мы модифицируем конструкцию броуновского движения в локальном поле, описанную в работе автора [2].

Возьмем непрерывную вещественную функцию $x \mapsto v(x)$, $x \in K$, со следующими свойствами:

$$\sum_{j,k} v(x_j - x_k) s_j s_k \leq 0 \quad \text{при} \quad s_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_j s_j = 0$$

и, кроме того, $v(0) = 0$. Рассмотрим функцию $p_t(x)$, $t \geq 0$, $x \in K$, заданную как преобразование Фурье (по переменной x) функции $e^{-tv(x)}$. При указанном ограничении на функцию v эта функция удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} p_t(x) &\geq 0, & \int_K p_t(x) dx &= 1, \\ p_{t_1+t_2} &= p_{t_1} * p_{t_2}, & p_t(x) &\rightarrow \delta(x) \quad \text{при} \quad t \rightarrow +0 \end{aligned}$$

(здесь $\delta(x)$ означает дельта-функцию). Таким образом, функции $p_t(x)$ можно принять в качестве переходных функций случайного процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, с независимыми приращениями со значениями в K . Можно считать, что траектории непрерывны слева. Итак, мы построили случайный процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$.

Отметим простые факты, связанные с изложенным.

Описание функций с указанным выше свойством восходит к работе Шенберга [4], этот круг вопросов рассмотрен также в работе [5]. Из результатов этих работ вытекает, что указанные функции допускают представление

$$v(x) = \operatorname{Re} \int_K (1 - \chi(xy)) \mu(dy),$$

где μ – неотрицательная мера на K . Для дальнейшего важно следующее свойство таких функций: если $v(x) = 0$ при $|x| \leq p^n$, то функция $v(x)$ постоянна в любом шаре радиуса p^n .

В дальнейшем через $E\eta$ обозначается математическое ожидание случайной величины η .

ЛЕММА 1. *Для любых целых чисел m, n справедливы равенства*

$$P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s| \leq p^n, |\xi_t| \leq p^{-m} \right\} = p^{-m} \int_{|z| \leq p^m} \exp\left(-tp^n \int_{|y| \leq p^{-n}} v(y-z) dy\right) dz, \quad (2)$$

$$P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s| \leq p^n \right\} = \exp\left(-tp^n \int_{|y| \leq p^{-n}} v(y) dy\right), \quad (3)$$

$$P\{|\xi_t| \leq p^{-m}\} = p^{-m} \int_{|z| \leq p^m} e^{-tv(z)} dz. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В следующей цепочке преобразований мы используем функцию $x \mapsto \tau_j(x)$, $x \in K$, являющуюся индикатором шара $|x| \leq p^j$. Ее преобразование Фурье имеет вид $\tilde{\tau}_j = p^j \tau_{-j}$. Фиксируем целое число $k > 0$ и рассмотрим величину

$$\phi(k, t) = P\{|\xi_{jt/k}| \leq p^n, j = 1, \dots, k, |\xi_t| \leq p^{-m}\}.$$

Имеем (используя свойства нормы в K)

$$\phi(k, t) = P\{|\xi_{t/k}| \leq p^n, |\xi_{jt/k} - \xi_{(j-1)t/k}| \leq p^n, j = 1, \dots, k, |\xi_t| \leq p^{-m}\}.$$

Учитывая, что случайные величины $\xi_{jt/k} - \xi_{(j-1)t/k}$ независимы и ξ_t есть их сумма, получаем

$$\phi(k, t) = \int_{K^k} \prod_{j=1}^k (p_{t/k}(x_j) \tau_n(x_j)) \tau_{-m}(x_1 + \dots + x_k) \prod_{j=1}^k dx_j.$$

Выразив функцию τ_{-m} через ее преобразование Фурье и произведя очевидные вычисления, приходим к равенству

$$\phi(k, t) = \int_K p^{-m} \int_K \left(p^n \int_{|y| \leq p^{-n}} e^{-tv(y-z)/k} dy \right)^k \tau_m(z) dz.$$

Запишем экспоненту, входящую в последнее выражение, в виде

$$1 - \frac{tv(y-z)}{k} + O(k^{-2})$$

(асимптотика при $k \rightarrow +\infty$). Перейдем к пределу при $k \rightarrow +\infty$ в полученной формуле для $\phi(k, t)$. В итоге получаем равенство (2). Равенства (3) и (4) вытекают из (2). Это доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция v постоянна в любом шаре радиуса p^{-n} . Тогда $|\xi_t| \leq p^n$ с вероятностью единица.

Пусть θ – случайная величина. Введем число $E(\theta | \xi_t = 0)$ следующим образом. Сначала рассмотрим условное математическое ожидание случайной величины θ при условии $|\xi_t| \leq p^{-m}$, после чего перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$. Применяя формулу (4), получаем

$$E(\theta | \xi_t = 0) = \frac{1}{V(t)} \lim_{m \rightarrow +\infty} p^m E(\theta \tau_{-m}(\xi_t)),$$

где $V(t)$ – это функция, введенная в (1).

5. ОБОБЩЕННАЯ p -АДИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА–КАЦА. ФОРМУЛА ДЛЯ СЛЕДА ОПЕРАТОРА $\exp(-tT_{u,v})$

Возьмем, наряду с функцией v , непрерывную вещественную функцию $x \mapsto u(x)$, $x \in K$, и рассмотрим оператор $T_{u,v}$, который мы задали в разделе 1. Запишем формулу для оператора $\exp(-tT_{u,v})$. Повторяя (с необходимыми предосторожностями) обычные рассуждения, ведущие к классической формуле Фейнмана–Каца (см. книгу [6], глава 8), приходим к следующей формуле:

$$\exp(-tT_{u,v})f(x) = E\left(\exp\left\{-\int_0^t u(x + \xi_s) ds\right\} f(x + \xi_t)\right), \quad f \in L_2(K).$$

Это и есть обобщенная p -адическая формула Фейнмана–Каца. Для случая функции $v(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 1$, она приведена в работе [2].

Выведем формулу для $\text{tr exp}(-tT_{u,v})$, $t > 0$. Фиксируем целое число $m > 0$ и рассмотрим всевозможные попарно различные пары вида $a + B_{-m}$. Они попарно не пересекаются и покрывают K . Введем их индикаторы $\tau_{a,-m}(x) = \tau_{-m}(x - a)$ и рассмотрим ортонормированную систему функций $p^m \tau_{-m,a}$. Ясно, что

$$\text{tr exp}(-tT_{u,v}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^m \sum_{(a,-m)} (\exp(-tT_{u,v}) \tau_{-m,a}, \tau_{-m,a});$$

здесь мы суммируем по всем шарам $a + B_{-m}$. Записав последнее выражение в виде интеграла по K , видим, что интеграл содержит функции вида $\tau_{-m,a}(x) \tau_{-m,a}(x + \xi_t)$. Но такая функция равна нулю при $|\xi_t - a| > p^{-m}$ и равна единице при $|\xi_t - a| \leq p^{-m}$. Это приводит к равенству

$$\text{tr exp}(-tT_{u,v}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^m \int_K E \left(\exp \left\{ - \int_0^t u(x + \xi_s) ds \right\} \tau_{-m}(\xi_t) \right) dx.$$

Используя условное математическое ожидание, введенное выше, приходим к равенству

$$\text{tr exp}(-tT_{u,v}) = V(t) \int_K e^{-tu(x)} E \left(\exp \left\{ \int_0^t (u(x) - u(x + \xi_s)) ds \right\} \middle| \xi_t = 0 \right) dx. \quad (5)$$

6. АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ $\text{tr exp}(-tT_{u,v})$, $t > 0$ ПРИ $t \rightarrow +0$

В этом разделе мы наложим следующие ограничения на функции u, v : функция v постоянна в любом шаре радиуса p^{-n} , и существует такое число $C > 0$, что

$$|u(x + y) - u(x)| \leq C \quad \text{при} \quad x, y \in K, \quad |y| \leq p^n.$$

При этом условии выведем асимптотику функции $\text{tr exp}(-tT_{u,v})$ при $t \rightarrow +0$. Согласно следствию 1 $|\xi_s| \leq p^n$ с вероятностью единица, а согласно условию, наложенному на функцию $u(x)$, величина $|u(x + \xi_s) - u(x)|$ ограничена числом C . Пользуясь этим, разложим экспоненту, стоящую под знаком математического ожидания в (5), в ряд по степеням величины $\int_0^t (u(x) - u(x + \xi_s)) ds$.

Введем функции

$$\Psi_k(t, x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} p^m E \left(\left[\int_0^t (u(x) - u(x + \xi(s))) ds \right]^k \tau_{-m}(\xi_t) \right).$$

Это приводит к следующей формуле:

$$\text{tr exp}(-tT_{u,v}) = U(t)V(t) + \sum_{k \geq 1} \int_K \Psi_k(t, x) e^{-tu(x)} dx. \quad (6)$$

Каждое из математических ожиданий, входящих в формулу для $\Psi_k(t, x)$, может быть вычислено, т. е. выражено явно через функции u, v (ибо через них явно выражаются совместные плотности распределений случайных точек ξ_{t_j}). Выпишем только первый член ряда (6):

$$\int_K \Psi_1(t, x) e^{-tu(x)} dx = \int_0^t \iint_K e^{-tu(x)} (u(x) - u(x + z)) p_s(z) p_{t-s}(z) ds dx dz.$$

Ряд (6) сходится при $t > 0$. Кроме того, он является асимптотическим рядом при $t \rightarrow +0$; он дает асимптотику, которая становится все более точной при увеличении числа членов.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 14-01-00349).

Список литературы

- [1] Г. В. Розенблум, М. З. Соломяк, М. А. Шубин, *Дифференциальные уравнения с частными производными – 7. Спектральная теория дифференциальных операторов*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления, **64**, ВИНТИ, М., 1989.
- [2] Р. С. Исмагилов, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 18–24.
- [3] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 275–302.
- [4] I. J. Schoenberg, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44**:3 (1938), 522–536.
- [5] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, *Тр. ММО*, **8** (1959), 413–496.
- [6] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 2: *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.

Поступила в редакцию 6.01.2014