Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, О нарушении группы трансляций в модели поля дипольного духа, *ТМФ*, 1998, том 115, номер 2, 163–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:59:40

О НАРУШЕНИИ ГРУППЫ ТРАНСЛЯЦИЙ В МОДЕЛИ ПОЛЯ ДИПОЛЬНОГО ДУХА

Теория интеграла Лебега применяется для доказательства невозможности построения нетривиального трансляционно-инвариантного физического пространства в моделях безмассового поля дипольного духа в двумерном и в четырехмерном пространстве-времени. Основные приемы доказательства могут использоваться при анализе реализации пространственно-временных симметрий и в других моделях с сингулярным поведением в инфракрасной области. Для устранения произвола в мажорантной гильбертовой структуре, ассоциированной с индефинитной метрикой, предложено условие наследования мажорантой свойств однородности метрики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель поля дипольного духа (эрмитова скалярного поля $\phi(x)$, удовлетворяющего уравнению $\square^2 \phi = 0$) служит простейшим примером, иллюстрирующим математическую структуру квантовой теории с индефинитной метрикой и, в частности, особенности реализации в ней калибровочных и пространственно-временных симметрий. Модель определяется двухточечной корреляционной функцией

$$w(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \theta(p^0) \delta'(p^2) e^{-ip(x-y)} dp, \quad (1)$$

поскольку n -точечные функции сводятся к ней в силу свойства факторизации, присущего свободной теории. Соответственно операторная реализация достигается (см., например, [1, § 10.2.A]) обычной фоковской конструкцией, и полное пространство состояний $\mathcal{H}$ представляет собой симметричную тензорную алгебру над одночастичным пространством $\mathcal{H}_1$. В дальнейшем мы рассматриваем параллельно случай четырехмерного и двумерного пространства-времени, $d = 4, 2$. Вайтмановская теорема реконструкции, восстанавливающая оператор поля по вакуумным средним, в данном случае нуждается в модификации [2], поскольку индефинитная эрмитова форма

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \bar{\varphi}(x) w(x-y) \psi(y) dx dy \quad (2)$$

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

на шварцевском пространстве пробных функций S сама по себе не определяет никакой топологии, и с ней необходимо связать неотрицательную мажоранту, задающую ту преднорму, пополнением по которой из S получается $\mathcal{H}_1$. К тому же из-за инфракрасной сингулярности произведение распределений $\theta(p^0)\delta'(p^2)$ определено однозначно лишь при дополнительных ограничениях на поведение пробных функций в точке $p = 0$. Для $d = 4$ неотрицательная эрмитова мажоранта формы (2) найдена Цванцигером [3], а проблема определения в этой модели пространства физических состояний $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ и реализации симметрий детально исследовалась Мошеллой и Строкки [4, 5]. Согласно общему требованию вероятностной интерпретации $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ строится из некоторого максимального $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательного подпространства $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ по формуле

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \overline{\mathcal{H}'/\mathcal{H}''}, \quad (3)$$

где $\mathcal{H}'' = \{\Psi \in \mathcal{H}' : \langle \Psi, \Psi \rangle = 0\}$, т.е. $\mathcal{H}''$ состоит из векторов нулевой длины, а черта означает замыкание в метрике, индуцируемой на фактор-пространстве формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. (Мы используем для индефинитной метрики в $\mathcal{H}$ то же обозначение, что и в формуле (2), поскольку, как уже сказано, она полностью определяется заданием на S .) В работе [5] показано, что любое $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательное и трансляционно-инвариантное подпространство в $S(\mathbf{R}^4)$ состоит из векторов с нулевой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -длиной. Если принять, что физическое подпространство должно быть пуанкаре-инвариантным, то вышеприведенное утверждение из работы [5] согласуется с утверждением [1] о тривиальности физического содержания модели. В [4, 5] предложена другая трактовка полученного результата как демонстрации роли инфракрасных сингулярностей в нарушении группы Пуанкаре в пространстве физических состояний и считается, что он служит простым прототипом одного из аспектов механизма конфайнмента, обсуждавшегося в [6].

В данной статье показано, что использование основных фактов из теории интеграла Лебега позволяет усилить теорему из [5] и распространить ее на любое $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательное подпространство в области определения операторов представления, т.е. освободиться от ограничения функциями из S , образы которых в $\mathcal{H}$ называют локальными состояниями. Аналогичный результат установлен и для двумерной модели, инфракрасная структура которой сложнее. В обоих случаях задача сводится к анализу представления группы трансляций в подпространстве пробных функций с “хорошим” инфракрасным поведением, пополненном по собственной мажорантной преднорме. Предложенный способ доказательства может быть полезен при изучении более содержательных моделей с инфракрасными сингулярностями “удерживающего” типа, когда предложенная авторами работ [4, 5] интерпретация результатов имеет большие основания. Предгильбертова мажоранта формы (2) уточняется в следующем разделе статьи; в двумерном случае она отличается от использовавшейся ранее [7], и мы обосновываем предложенную модификацию. В разделе 3 выписаны явные формулы для представлений группы трансляций в соответствующих пополнениях пространств $S(\mathbf{R}^4)$ и $S(\mathbf{R}^2)$, основные тео-

ремы доказаны в разделе 4, а раздел 5 посвящен заключительным замечаниям. В ходе изложения мы в основном придерживаемся обозначений, принятых в [1].

2. МАЖОРАНТНАЯ ТОПОЛОГИЯ

2.1. Четырехмерная модель. После преобразования Фурье на пробных функциях из $S(\mathbf{R}^4 \setminus 0) = \{f \in S : \text{supp } f \subset \mathbf{R}^4 \setminus 0\}$ форма (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \bar{f}(p) \tilde{w}(p) g(p) d^4 p &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2p^0} \frac{\partial}{\partial p^0} \left(\frac{\bar{f}g}{2p^0} \right) \Big|_{p^0=|\mathbf{p}|} d^3 p = \\ &= \int_{\Gamma^+} (\bar{F}_1 G_2 + \bar{F}_2 G_1) d\mu, \end{aligned} \quad (4)$$

где $d\mu = d^3 p / ((2\pi)^3 2p^0)$ – инвариантная мера на верхнем световом конусе Γ^+ и введены обозначения¹⁾

$$F_1 = \frac{1}{2p^0} f(p) \Big|_{p^0=|\mathbf{p}|}, \quad F_2 = \left(-\frac{\partial}{\partial p^0} + \frac{1}{2p^0} \right) f(p) \Big|_{p^0=|\mathbf{p}|}. \quad (5)$$

Правая часть формулы (4) сохраняет смысл для любых функций из подпространства $S_0 = \{f \in S : f(0) = 0\}$. Хорошо известно, что эта полуторалинейная форма допускает непрерывное трансляционно-инвариантное продолжение на все пространство $S \times S$, включающее произвольную константу κ (параметр инфракрасной регуляризации), и в конфигурационном пространстве это продолжение сводится к подстановке в формулу (2) распределения

$$w(\xi) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \ln(-\kappa^2 \xi^2 + i\epsilon \xi^0), \quad \xi = x - y.$$

Неотрицательная эрмитова форма на S_0

$$(f, g)_0 = \int_{\Gamma^+} (\bar{F}_1 G_1 + \bar{F}_2 G_2) d\mu \quad (6)$$

имеет то же ядро, что и форма (4), состоящее из функций, сужения которых на Γ^+ обращаются в нуль вместе с производной. Пространство S_0 , снабженное соответствующей преднормой $\|\cdot\|_0$, мы обозначим через $\mathcal{S}_0$, а его пополнение (точнее, пополнение фактор-пространства по ядру) – через $\hat{\mathcal{S}}_0$. Справедливо естественное отождествление

$$\hat{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu) \oplus \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu).$$

¹⁾Отметим, что в [4, 5] символы F_1 и F_2 обозначают другие величины, диагонализующие (4). Эти величины в наших обозначениях (5) равны $2p^0(F_1 + F_2)$ и $2p^0(F_1 - F_2)$.

Действительно, гладкие функции с ограниченным носителем, не содержащим начала координат, плотны в $\mathcal{L}^2$, и для любой пары F_1 , и F_2 таких функций нетрудно указать элемент $S_0(\mathbf{R}^4)$, для которого справедливо (5), например,

$$f(p) = 2|\mathbf{p}|\eta(p^2)F_1(\mathbf{p}) + \frac{1}{2|\mathbf{p}|}\zeta(p^2)(F_1(\mathbf{p}) - F_2(\mathbf{p})), \quad (7)$$

где η, ζ – вещественные функции из $S(\mathbf{R})$ со свойствами $\eta(0) = \zeta'(0) = 1$, $\eta'(0) = \zeta(0) = 0$. Определяемое на $\widehat{S}_0$ формулой (6) скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_0$ связано с продолжением формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ очевидным соотношением $\langle F, G \rangle = (F, \sigma_1 G)_0$, т.е. матрица Паули σ_1 играет в данном случае роль той эрмитовой инволюции, существование которой является условием согласования мажорантной гильбертовой топологии с индефинитной метрикой [1].

Теперь фиксируем, следуя [3], функцию $h \in S(\mathbf{R}^4)$ со свойствами $h(0) = 1$, $\langle h, h \rangle = 0$. Для любых $f, g \in S$ имеем

$$\langle f, g \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle + \bar{f}(0)\langle h, g \rangle + g(0)\langle f, h \rangle, \quad (8)$$

где $f_0 = f - f(0)h \in S_0$.

ЛЕММА 1. *Существует последовательность $g_\nu \in S_0$ такая, что $\|g_\nu\|_0 \rightarrow 0$ и $\langle h, g_\nu \rangle = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\zeta \in S(\mathbf{R})$ – функция такая, что $\zeta(0) = 0$, $\zeta'(0) = 1$, и пусть ψ_ν – δ -образная последовательность функций из $S(\mathbf{R})$ с единичным интегралом, носители которых лежат на положительной полуоси, стягиваются к началу координат, но не содержат его ни при каком ν . Положим

$$g_\nu(p) = -\frac{1}{2|\mathbf{p}|}\zeta(p^2)\psi_\nu(|\mathbf{p}|).$$

Тогда по теореме о среднем

$$\langle h, g_\nu \rangle = \int_{\Gamma^+} \frac{1}{2p^0} h \psi_\nu d\mu = \frac{1}{8\pi^2} h(p_\nu),$$

где $p_\nu \rightarrow 0$. С другой стороны, имеем

$$\|g_\nu\|_0^2 = \int_{\Gamma^+} \psi_\nu^2 d\mu = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \psi_\nu^2(\omega) \omega d\omega,$$

и нетрудно выбрать ψ_ν так, чтобы последний интеграл стремился к нулю, например, сгладив последовательность ступенчатых функций, равных $(\omega|\ln \omega|)^{-1}$ при $(1/\nu)^e \leq$

$\omega \leq 1/\nu$ и 0 в остальных точках. Нормировка $g_\nu \rightarrow g_\nu/\langle h, g_\nu \rangle$ завершает доказательство.

Из леммы 1 видно, что любая функция из ядра формы (8) принадлежит S_0 и, следовательно, это ядро совпадает с ядром формы (4). Определим мажоранту для (8) так же, как и в [1]:

$$(f, g) = (f_0, g_0)_0 + \overline{F}_3 G_3 + \overline{F}_4 G_4,$$

где $F_3 = \langle h, f \rangle$ и $F_4 = f(0)$, а также обозначим через $\widehat{S}$ пополнение S по соответствующей преднорме $\|\cdot\|$. Имеет место равенство

$$\widehat{S} = \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu) \oplus \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu) \oplus \mathbf{C}^2.$$

Действительно, если F_1 и F_2 — функции, сопоставляемые f_0 по формулам (5), то образ линейного отображения $f \rightarrow (F_1, F_2, F_3, F_4)$ пространства S в прямую сумму $\mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu) \oplus \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu) \oplus \mathbf{C}^2$ всюду плотен, как показывает комбинация аппроксимационных процедур, описываемых формулой (7) и леммой 1. Снова очевидным образом выполнено условие согласования с продолжением формы (8) на $\widehat{S}$ по непрерывности. Стоит отметить, что согласно лемме 1 ограничение преднормы $\|\cdot\|$ на S_0 строго сильнее, чем $\|\cdot\|_0$, и не согласуется с формой (4). Если обозначить через $\widehat{S}_0$ пополнение этого пространства по $\|\cdot\|$, то имеют место канонические изоморфизмы

$$\widehat{S} = \widehat{S}_0 \oplus \mathbf{C}, \quad \widehat{S}_0 = \widehat{S}_0/\mathbf{C}. \quad (9)$$

2.2. Двумерная модель. В этом случае удобны конусные переменные $u = p_0 + p_1$, $v = p_0 - p_1$. На пробных функциях из $S(\mathbf{R}^2 \setminus 0)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{f}(p) \tilde{w}(p) g(p) d^2 p &= \int \bar{f}(u, v) \left[\frac{\theta(u)}{u^2} \delta'(v) + \frac{\theta(v)}{v^2} \delta'(u) \right] g(u, v) \frac{du dv}{4\pi} = \\ &= \int_0^\infty (\overline{F}_1^R G_2^R + \overline{F}_2^R G_1^R) d\mu + (R \rightarrow L), \end{aligned} \quad (10)$$

где на этот раз $d\mu = du/(4\pi u)$ и использованы обозначения

$$F_1^R = \frac{1}{u} f(u, 0), \quad F_2^R = -\partial_v f(u, 0), \quad F_1^L = \frac{1}{v} f(0, v), \quad F_2^L = -\partial_u f(0, v)$$

($u, v \geq 0$). Правая часть формулы (10) сохраняет смысл для функций из подпространства $S_{00} = \{f \in S(\mathbf{R}^2) : f(0) = \partial_u f(0) = \partial_v f(0) = 0\}$ коразмерности 3. Непрерывное продолжение до пуанкаре-инвариантной полуторалинейной формы на $S \times S$ получается заменой выражения в квадратных скобках в формуле (10) распределением

$$u_+^{-2} \delta'(v) + v_+^{-2} \delta'(u) + \kappa_0 \delta(u) \delta(v) + \kappa_1 \delta'(u) \delta'(v),$$

где

$$u_+^{-2}(\psi) = - \int_0^\infty \psi''(u) \ln u \, du + \psi'(0)$$

(относительно свойств обобщенных функций u_+^{-2} см. [7, § 3.2]). Константы $\kappa_{0,1}$ в дальнейшем считаем равными нулю, тогда

$$w(\xi) = -\frac{1}{16\pi} \xi^2 \ln(-\kappa^2 \xi^2 + i\epsilon \xi^0)$$

с параметром κ , точное значение которого (равное $(1/2) \exp(\gamma - 1)$, где $\gamma = -\Gamma'(1)$ – постоянная Эйлера) несущественно для дальнейшего. Неотрицательную эрмитову мажоранту формы (10) определим формулой

$$(f, g)_{00} = \int_0^\infty \left(\bar{F}_1^R G_1^R + \bar{F}_2^R G_2^R \right) d\mu + (R \rightarrow L). \quad (11)$$

Пространство S_{00} с преднормой $\|\cdot\|_{00}$ обозначим через $\mathcal{S}_{00}$, а его пополнение – через $\widehat{\mathcal{S}}_{00}$. Имеет место изоморфизм

$$\widehat{\mathcal{S}}_{00} = \mathcal{L}^2(\Gamma^{(2)+}) \oplus \mathcal{L}^2(\Gamma^{(2)+}),$$

где $\mathcal{L}^2(\Gamma^{(2)+})$, в свою очередь, является прямой суммой двух пространств функций на полуоси, квадратично интегрируемых с весом $1/u$. Устанавливается это прежним рассуждением с заменой формулы (7) на

$$f(u, v) = \eta(v) u F_1^R(u) + \eta(u) v F_1^L(v) - \zeta(v) F_2^R(u) - \zeta(u) F_2^L(v).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [7] для двумерной модели диполя используется другая неотрицательная мажоранта, которая в конусных переменных выглядит следующим образом:

$$[f, g] = \int (\bar{f}g + \partial_v \bar{f} \partial_v g) \Big|_{u \geq 0, v=0} \frac{du}{4\pi u^2} + (u \leftrightarrow v) \quad (f, g \in S_{00}). \quad (12)$$

Основное отличие мажоранты (11) от (12) в том, что она наследует свойства однородности исходной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Именно, если обозначить $f_t(p) = f(tp)$, то $\langle f_t, g_t \rangle = t^2 \langle f, g \rangle$ и $(f_t, g_t)_{00} = t^2 (f, g)_{00}$. Аналогичным свойством наследования обладает и форма (6), в то время как слагаемые в интеграле (12) имеют разную степень однородности. Нетрудно видеть, что в координатном представлении распределение, задающее форму (12), растет в инфракрасном пределе как $(|x|^3 + |y|^3) \ln |x - y|$, а распределение, соответствующее форме (11), оценивается как $(|x|^2 + |y|^2) \ln |x - y|$, что ближе к поведению функции $w(x - y)$. Отметим еще, что мажоранты (11), (12) определяют разную топологию на S_{00} , ибо в противном случае соответствие $(F_1; F_2) \rightarrow (uF_1^R, vF_1^L; F_2)$ было бы непрерывным отображением из $\bigoplus^4 L^2(du/u)$ в $\bigoplus^4 L^2(du/u^2)$.

ЛЕММА 2. *Существуют пробные функции $h_0, h_1, h_2 \in S(\mathbf{R}^2)$, удовлетворяющие условиям $h_i(0) = \delta_{0i}$, $\partial_u h_i(0) = \delta_{1i}$, $\partial_v h_i(0) = \delta_{2i}$, и такие, что $\langle h_i, h_j \rangle = 0$ при всех i, j .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем

$$h_0(u, v) = \eta(u)\eta(v), \quad h_1(u, v) = \zeta(u)\eta(v), \quad h_2(u, v) = \eta(u)\zeta(v).$$

Тогда все условия в начале координат соблюдены и, кроме того, $\langle h_i, h_i \rangle = 0$ при любом i . Далее, $\langle h_0, h_1 \rangle = \langle h_0, h_2 \rangle = -a_0/(4\pi)$, где $a_0 = u_+^{-2}(\eta^2)$. Конечно, это число нетрудно обратить в нуль путем деформации η . Именно, пусть $\eta \equiv 1$ при $|u| < 1$. Заменим η на $\eta + t\chi$, где χ — аппроксимация характеристической функции сегмента $\varepsilon \leq u \leq 2\varepsilon$. Тогда $a_0 \rightarrow a = a_0 + 2A_1t + A_2t^2$, где A_1 и A_2 сколь угодно близки к $\int_\varepsilon^{2\varepsilon} u^{-2} du$. Поэтому $a = 0$ при подходящем выборе ε и t . Осталось рассмотреть $\langle h_1, h_2 \rangle = -u_+^{-2}(\eta\zeta)/2\pi$. Сделаем преобразование $\eta(u) \rightarrow \eta_t(u) = \eta(tu)$, $\zeta \rightarrow t^{-1}\zeta_t$. Оно сохраняет все уже установленные условия, поскольку на пробных функциях с нулевой производной в начале координат распределение u_+^{-2} является однородным. В случае ненулевой производной справедливо соотношение $t^{-1}u_+^{-2}(\psi_t) = u_+^{-2}(\psi) - \psi'(0) \ln t$, и, подставляя сюда $\psi = \eta\zeta$, мы видим, что должный выбор t завершает доказательство.

ЛЕММА 3. *Для каждой из функций h_i предыдущей леммы можно указать последовательность $g_\nu \in S_{00}$ такую, что $\|g_\nu\|_{00} \rightarrow 0$, $\langle h_i, g_\nu \rangle = 1$ и $\langle h_j, g_\nu \rangle \rightarrow 0$ при $j \neq i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова считаем, что $\eta \equiv 1$ при $|u| < 1$. Пусть ζ_ν — последовательность функций из $S(\mathbf{R})$ со свойствами

$$\zeta_\nu(0) = 0, \quad \zeta'_\nu(0) = 1, \quad \text{supp } \zeta_\nu \subset \{u : |u| < 1\}. \quad (13)$$

Положим $g_\nu(u, v) = \zeta_\nu(u)\zeta_\nu(v)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle h_0, g_\nu \rangle &\sim -u_+^{-2}(\eta\zeta_\nu) = \int_0^1 \zeta''_\nu \ln u \, du - 1, \\ \langle h_1, g_\nu \rangle &= \langle h_2, g_\nu \rangle \sim -\int_0^1 \zeta \zeta_\nu \, du / u^2, \quad \|g_\nu\|_{00}^2 \sim \int_0^1 \zeta_\nu^2 \, du / u. \end{aligned}$$

Возьмем в качестве ζ_ν сглаженную последовательность функций, равных u при $|u| < 1/\nu$ и 0 в остальных точках. Тогда при $\nu \rightarrow \infty$ первый интеграл логарифмически растет, а остальные убывают. Значит, желаемую последовательность для h_0 получаем нормировкой.

Теперь рассмотрим последовательность $g_\nu(u, v) = \eta(u)v\zeta_\nu(v)$ при тех же условиях (12) на ζ_ν . В этом случае имеем

$$\langle h_1, g_\nu \rangle \sim \int_0^1 \zeta_\nu \, dv / v, \quad \langle h_0, g_\nu \rangle = \langle h_2, g_\nu \rangle = 0, \quad \|g_\nu\|_{00}^2 \sim \int_0^1 \zeta_\nu^2 \, dv / v.$$

В классе функций, квадратично интегрируемых на отрезке $[0, 1]$ с весом $1/u$, в силу теоремы Рисса существует последовательность, для которой первый интеграл растёт, а последний стремится к нулю. Стандартные способы аппроксимации позволяют приблизить каждый элемент такой последовательности функцией ζ_ν с сохранением этого свойства и тем самым доказать утверждение леммы 3 для h_1 . Завершает доказательство аналогичная аргументация для h_2 с последовательностью вида $\eta(v)u\zeta_\nu(u)$.

Построенные вспомогательные функции используем для инфракрасного вычитания

$$f_0 = f - f(0)h_0 - \partial_u f(0)h_1 - \partial_v f(0)h_2 \in S_{00},$$

посредством которого форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на S приводится к виду

$$\langle f, g \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle + \sum_{i=0}^2 (\overline{F}_{3+2i} G_{4+2i} + \overline{F}_{4+2i} G_{3+2i}),$$

где

$$F_{3+2i} = \langle h_i, f \rangle, \quad F_4 = f(0), \quad F_6 = \partial_u f(0), \quad F_8 = \partial_v f(0).$$

Соответственно ее неотрицательную мажоранту определяем формулой

$$(f, g) = (f_0, g_0)_{00} + \sum_{i=3}^8 \overline{F}_i G_i. \quad (14)$$

Обозначая через $\widehat{S}(\mathbf{R}^2)$ и $\widehat{S}_{00}$ соответствующие отделимые пополнения, имеем очевидные изоморфизмы

$$\widehat{S}(\mathbf{R}^2) = \widehat{S}_{00} \oplus \mathbf{C}^3, \quad \widehat{S}_{00} = \widehat{S}_{00}/\mathbf{C}^3. \quad (15)$$

3. ПСЕВДОУНИТАРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ТРАНСЛЯЦИЙ

3.1. Четырёхмерная модель. Поскольку во всех рассмотренных выше случаях факторизация производится по одному и тому же релятивистски-инвариантному ядру, действие $f_{\{a, \Lambda\}}(p) = e^{ip_a} f(\Lambda^{-1}p)$ группы Пуанкаре на пробных функциях можно перенести на их образы в $\widehat{S}_0, \widehat{S}_0, \widehat{S}$. Тем самым в каждом из этих пространств задано представление группы Пуанкаре, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -унитарное опять-таки из-за инвариантности исходной двухточечной функции (1). Ясно, что операторы $\mathcal{T}_a$, реализующие представление подгруппы трансляций в $\widehat{S}_0$, имеют вид

$$(\mathcal{T}_a F)_1 = e^{ip_a} F_1, \quad (\mathcal{T}_a F)_2 = e^{ip_a} (F_2 - 2ip^0 a^0 F_1) \quad (p \in \Gamma^+). \quad (16)$$

В случае пространства $\widehat{S} = \mathcal{H}_1$ мы обозначим операторы сдвига через T_a . Если H_1, H_2 – функции на световом конусе, сопоставляемые h по формулам (5), то

$$(T_a F)_1 = e^{ipa} (F_1 + F_4 H_1) - F_4 H_1, \quad (17)$$

$$(T_a F)_2 = e^{ipa} (F_2 + F_4 H_2 - 2ip^0 a^0 (F_1 + F_4 H_1)) - F_4 H_2, \quad (18)$$

$$(T_a F)_3 = F_3 + ((e^{-ipa} - 1)H_1, F_2 + F_4 H_2) + \\ + (e^{-ipa} (H_2 + 2ip^0 a^0 H_1) - H_2, F_1 + F_4 H_1), \quad (19)$$

$$(T_a F)_4 = F_4. \quad (20)$$

Участвующее в (19) спаривание $(\cdot, \cdot)$ задается тем же интегралом, что и скалярное произведение в $\mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu)$, и, хотя функции H_1, H_2 не принадлежат этому пространству, корректно определено благодаря хорошему поведению в нуле второй из спариваемых функций. Отметим, что фактически лишь соотношения (16), (17) и (20) понадобятся при выводе интересующей нас теоремы в следующем разделе статьи.

Все операторы T_a , определенные первоначально на образе S в $\mathcal{H}_1$, допускают замкнутое расширение. В случае чисто пространственных сдвигов замыкание дает ограниченный оператор. Если же $a^0 \neq 0$, то областью определения замыкания служит подпространство $\mathcal{D} = \{F : |\mathbf{p}|F_1 \in \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu)\}$; плотность в нем образа S по норме графика легко проверяется с помощью тех же аппроксимационных процедур, что и выше. Подпространство $\mathcal{D}$ является наибольшей общей областью определения операторов T_a , инвариантной относительно их действия. Элемент пополнения вида $F = \{0, 0, F_3, 0\}$ трансляционно-инвариантен, что видно как из (17)–(20), так и из одной элементарной формулы (20) при учете псевдоунитарности, благодаря которой $\langle (1 - T_a)F, G \rangle = \langle F, (1 - T_{-a})G \rangle = \overline{F}_3(G_4 - G_4) = 0$ при любом $G \in \mathcal{D}$. Важно, что на этих векторах форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обращается в нуль и что других инвариантных состояний в $\mathcal{H}_1$ нет, поскольку требование неизменности первой компоненты дает $F_1 + F_4 H_1 = 0$, а вместе с $H_1 \notin \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu)$ и (18) это равенство влечет последовательно равенство нулю величин F_4, F_1 и F_2 . Отметим еще, что представление группы Пуанкаре в $\widehat{S}_0$ является ограничением представления в $\mathcal{H}_1$ на инвариантное гиперподпространство $F_4 = 0$, которому $\widehat{S}_0$ канонически изоморфно, а представление в $\widehat{S}_0$ получается последующей факторизацией по одномерному подпространству инвариантных векторов в соответствии с формулами (9).

3.2. Двумерная модель. С использованием обозначений $a^+ = (a^0 + a^1)/2$, $a^- = (a^0 - a^1)/2$ представление группы трансляций во вспомогательном пространстве $\widehat{S}_{00}$ записывается в виде

$$(\mathcal{T}_a F)_1^R = e^{iua^+} F_1^R, \quad (\mathcal{T}_a F)_2^R = e^{iua^+} (F_2^R - iua^- F_1^R), \quad (21)$$

$$(\mathcal{T}_a F)_1^L = e^{iva^-} F_1^L, \quad (\mathcal{T}_a F)_2^L = e^{iva^-} (F_2^L - iva^+ F_1^L). \quad (22)$$

Для представления в $\widehat{S} = \mathcal{H}_1$ выпишем лишь те формулы, которые понадобятся в дальнейшем:

$$(T_a F)_1^R = e^{iu a^+} (F_1^R + u^{-1}(F_4 \eta + F_6 \zeta)) - u^{-1}(F_4 \eta + (F_6 + i a^+ F_4) \zeta), \quad (23)$$

$$(T_a F)_2^R = e^{iu a^+} (F_2^R - F_8 \eta - i a^- (u F_1^R + F_4 \eta + F_6 \zeta)) + (F_8 + i a^- F_4) \eta, \quad (24)$$

$$(T_a F)_1^L = e^{iv a^-} (F_1^L + v^{-1}(F_4 \eta + F_8 \zeta)) - v^{-1}(F_4 \eta + (F_8 + i a^- F_4) \zeta), \quad (25)$$

$$(T_a F)_2^L = e^{iv a^-} (F_2^L - F_6 \eta - i a^+ (v F_1^L + F_4 \eta + F_8 \zeta)) + (F_6 + i a^+ F_4) \eta, \quad (26)$$

$$(T_a F)_4 = F_4, \quad (T_a F)_6 = F_6 + i a^+ F_4, \quad (T_a F)_8 = F_8 + i a^- F_4. \quad (27)$$

Из (27) и псевдоунитарности представления следует, что трехмерное $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -нейтральное подпространство тех векторов, у которых лишь компоненты F_3 , F_5 , F_7 отличны от нуля, является трансляционно-инвариантным и $T_a(0, 0, F_3, 0, F_5, 0, F_7, 0) = (0, 0, F_3 - i a^+ F_5 - i a^- F_7, 0, F_5, 0, F_7, 0)$. Как и прежде, условие инвариантности состояния влечет равенство нулю всех его компонент, кроме третьей, а наибольшая общая область определения операторов T_a выделяется (ультрафиолетовыми) ограничениями $u F_1^R \in L^2(du/u)$, $v F_1^L \in L^2(dv/v)$.

4. СИММЕТРИЯ И ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ

4.1. Четырехмерная модель. Сначала охарактеризуем неотрицательные инвариантные подпространства в $\widehat{S}_0$.

ЛЕММА 4. *Подпространство, порождаемое чисто пространственными сдвигами вектора $F \in \widehat{S}_0$, будет $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательным в том и только том случае, если*

$$\operatorname{Re} \overline{F}_1 F_2 \geq 0 \quad \text{почти всюду.} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a = (0, \mathbf{a})$, то $\mathcal{T}_a F = e^{-i \mathbf{p} \mathbf{a}} F$, и, обозначая через $\mathcal{F}$ конечную линейную комбинацию $\sum c_n \mathcal{T}_{a_n} F$, мы имеем

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle = 2 \int_{\Gamma^+} \left| \sum c_n e^{-i \mathbf{p} \mathbf{a}_n} \right|^2 \operatorname{Re} \overline{F}_1 F_2 d\mu. \quad (29)$$

Тем самым достаточность условия (28) для $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательности очевидна и задача состоит лишь в том, чтобы доказать необходимость. Будем считать n мультииндексом, пробегающим целочисленную решетку $\mathbf{Z}^3$, и положим $\mathbf{a}_n = n\varepsilon$, $c_n = \varepsilon^3 \varphi(n\varepsilon)$, где $\varphi \in S(\mathbf{R}^3)$. Тогда $\sum_{|n| < N} c_n e^{-i \mathbf{p} \mathbf{a}_n}$ представляет собой риманову сумму для преобразования Фурье функции φ , которое мы обозначим через ψ . В каждой точке $\mathbf{p}$ римановы суммы сходятся к $\psi(\mathbf{p})$ и, кроме того, равномерно мажорируются по модулю константой, сколь угодно близкой к $\int |\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$, когда ε достаточно мало, а N велико. Поэтому

согласно теореме Лебега о мажорированной сходимости выражение (29) стремится к интегралу

$$2 \int_{\Gamma^+} \bar{\psi} \psi \operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2 d\mu, \quad (30)$$

который наследует неотрицательность. Таким образом, определяемое функцией $\operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2 / |\mathbf{p}|$ распределение на пространстве Шварца мультипликативно положительно. Предположим, что измеримое множество $\{\mathbf{p} : \operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2 < 0\}$ имеет ненулевую лебегову меру. Тогда и мера множества $\{\mathbf{p} : \operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2 < -1/R, |\mathbf{p}| < R\}$ положительна при достаточно большом R . Пусть χ — характеристическая функция последнего множества и ψ_ν — ее стандартная регуляризация посредством свертки с δ -образной последовательностью гладких неотрицательных функций с компактным носителем. Тогда $\psi_\nu \rightarrow \chi$ в каждом пространстве Лебега L^p с $p < \infty$ и, в частности, в L^2 (см. [8, теорема 1.3.2]). Используя неравенство Шварца, получаем

$$\|\psi_\nu^2 - \chi^2\|_{L^1} \leq \|\psi_\nu - \chi\|_{L^2} \|\psi_\nu + \chi\|_{L^2}.$$

Значит, последовательность ψ_ν^2 стремится к $\chi^2 = \chi$ по норме L^1 , и из нее можно выбрать подпоследовательность ψ_{ν_k} , сходящуюся к χ почти всюду. Однако тогда снова в силу теоремы о мажорированной сходимости интеграл $\int \psi_{\nu_k}^2 \operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2 d\mathbf{p} / |\mathbf{p}|$ строго отрицателен при достаточно большом k , что противоречит мультипликативной положительности. Доказательство завершено.

ЛЕММА 5. *Если F принадлежит $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательному трансляционно-инвариантному подпространству $\hat{S}_0$, то $F_1 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = (t, 0, 0, 0)$ — сдвиг во времени. Вектор $F - \mathcal{T}_a F$ принадлежит тому же подпространству, а в силу формул (16) его первая и вторая компоненты равны соответственно $(1 - e^{i\omega t})F_1$ и $(1 - e^{i\omega t})F_2 + 2i\omega t e^{i\omega t} F_1$, где $\omega = |\mathbf{p}|$. Подставляя их в условие (28), получаем

$$(1 - \cos \omega t) \operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2 \geq \omega t \sin \omega t |F_1|^2. \quad (31)$$

Поскольку функция $|F_1|^2$ всюду, кроме начала координат, локально интегрируема по Лебегу, для нее почти все точки $\mathbf{R}^3$ лебеговы (см. [9, § III.12.8]), т.е. почти всюду соблюдается предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'| < \varepsilon} |F_1(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = |F_1(\mathbf{p}')|^2. \quad (32)$$

Фиксируем такую точку $\mathbf{p}'$ и положим $t = (\pi/2 + 2\pi\nu)/\omega'$, $\varepsilon t = \pi/6$. В той окрестности $\mathbf{p}'$, по которой ведется интегрирование в формуле (32), соблюдаются неравенства

$\omega' - \varepsilon \leq \omega \leq \omega' + \varepsilon$ и при указанном выборе t и ε мы имеем $\omega t \geq 2\pi\nu$ и $\sin \omega t \geq 1/2$. Значит, из (31) следует, что

$$\frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|<\varepsilon} 2 \operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2 d\mathbf{p} \geq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|<\varepsilon} \pi\nu |F_1|^2 d\mathbf{p}.$$

Переходя к пределу $\nu \rightarrow \infty$, мы заключаем, что среднее значение функции $\operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2$ равно бесконечности в каждой точке из лебегова множества функции $|F_1|^2$, где она положительна. Поскольку функция $\operatorname{Re} \bar{F}_1 F_2$ также локально интегрируема в $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, лебегова мера таких точек обязана быть нулем. Таким образом, $F_1 = 0$ почти всюду, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 1. *Каждое $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательное и инвариантное относительно пространственно-временных сдвигов подпространство в одночастичном пространстве $\mathcal{H}_1$ является $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -нейтральным, т.е. при сужении на него эта форма обращается в нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — любой элемент подпространства с указанными в условиях теоремы свойствами. Снова рассмотрим вектор $F - T_a F$, где $a = (t, 0, 0, 0)$, считая на сей раз t фиксированным и ненулевым. Первая компонента этой разности равна $(1 - e^{i\omega t})(F_1 + F_4 H_1)$, а четвертая — нулю. Последнее означает, что оператор $1 - T_a$ переводит рассматриваемое подпространство в $\hat{S}_0$. Последующим каноническим отображением $\hat{S}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{S}}_0$ мы получаем подпространство, удовлетворяющее условиям леммы 5. Значит, $F_1 + F_4 H_1 = 0$. Как уже отмечалось, отсюда следует, что $F_4 = 0$ и $F_1 = 0$, поскольку $H_1 \notin \mathcal{L}^2(\Gamma^+, d\mu)$. Таким образом, $\langle F, F \rangle = 0$, а по неравенству Шварца, которое справедливо для любой неотрицательно определенной эрмитовой формы, отсюда вытекает, что $\langle F, G \rangle = 0$ для всех G из рассматриваемого подпространства. Теорема доказана.

4.2. Двумерная модель. Рассуждаем по той же схеме, что и в пункте 4.1, начиная с пространства $\hat{\mathcal{S}}_{00}$.

ЛЕММА 6. *Если F принадлежит $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательному трансляционно-инвариантному подпространству $\hat{\mathcal{S}}_{00}$, то $F_1 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова используем обозначение $\mathcal{F} = \sum c_n \mathcal{T}_{a_n} F$ и полагаем $a_n^- = 0$, тогда

$$\begin{aligned} 2\pi \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle &= \int_0^\infty \left| \sum c_n e^{iu a_n^+} \right|^2 \operatorname{Re} \bar{F}_1^R F_2^R du / u^2 + \\ &+ \int_0^\infty \left\{ \left| \sum c_n \right|^2 \operatorname{Re} \bar{F}_1^L F_2^L + \operatorname{Im} \left(\sum \bar{c}_n \cdot \sum c_n a_n^+ \right) v |F_1^L|^2 \right\} dv / v^2. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n \in \mathbf{Z}$, $a_n^+ = n\varepsilon$, $c_n = \varepsilon\varphi(n\varepsilon)$ и $\varphi \in S(\mathbf{R})$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\sum_{|n| < N} c_n e^{iu a_n^+} \rightarrow \tilde{\varphi} = \psi(u), \quad \sum_{|n| < N} c_n \rightarrow \psi(0), \quad \sum_{|n| < N} c_n a_n^+ \rightarrow -i\partial_u \psi(0).$$

Считая, что ψ исчезает в окрестности нуля, в пределе получаем соотношение

$$\int_0^\infty \overline{\psi} \psi \operatorname{Re} \overline{F}_1^R F_2^R du / u^2 \geq 0,$$

откуда по прежней аргументации следует, что

$$\operatorname{Re} \overline{F}_1^R F_2^R \geq 0 \quad \text{почти всюду.} \quad (33)$$

Аналогичному условию обязан удовлетворять вектор $F - T_a F$ с $a^- = a^+ = t$, для которого вследствие формул (21) условие (33) принимает вид

$$2(1 - \cos ut) \operatorname{Re} \overline{F}_1^R F_2^R \geq ut \sin ut |F_1^R|^2 \quad \text{почти всюду,}$$

вполне аналогичный формуле (31), откуда, как и прежде, вытекает, что $F_1^R = 0$. Начиная теперь с предположения $a_n^+ = 0$ и повторяя это рассуждение, мы получаем равенство $F_1^L = 0$, что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 2. *Каждое $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -неотрицательное трансляционно-инвариантное подпространство в $\widehat{S}(\mathbf{R}^2)$ является $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -нейтральным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — произвольный элемент рассматриваемого подпространства. Вследствие инвариантности этому же подпространству принадлежит вектор $(1 - T_a)^2 F$, четвертая, шестая и восьмая компоненты которого равны нулю в силу формул (27), а правая часть первой компоненты согласно (23) имеет вид

$$(1 - e^{iu a^+})^2 (F_1^R + u^{-1}(F_4 \eta + F_6 \zeta)).$$

Пусть $a^+ \neq 0$. Используя формулы (15) и рассматривая образ этого вектора в $\widehat{S}_{00}$, мы получаем возможность применить лемму 6, согласно которой $F_1^R + F_4 u^{-1} \eta(u) + F_6 u^{-1} \zeta(u) = 0$. Поскольку поведение в нуле слагаемых разное, отсюда следует, что $F_4 = 0$, $F_6 = 0$ и $F_1^R = 0$. Считая $a^- \neq 0$ и используя (25), получаем также, что $F_8 = 0$, $F_1^L = 0$. Из перечисленных равенств следует $\langle F, F \rangle = 0$, что и требовалось доказать.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, изложенный в статье способ анализа пространственно-временных симметрий в теории с индефинитной метрикой сохраняет эффективность при усложнении инфракрасной структуры. Его основные приемы можно применить и к более содержательным моделям, включая реалистические модели конфайнмента. Вопрос о выборе для заданной метрики мажорантной топологии не является чисто техническим, поскольку от него в значительной мере зависит физическая интерпретация теории. В работе [2] показано, что естественно использовать максимальные гильбертовы структуры (пространства Крейна с эрмитовой инволюцией), которые реализуют максимум информации, заложенной в вайтмановских функциях. Однако, как мы видели, и в этом случае остается произвол в выборе топологии. Принцип наследования свойств однородности метрики представляется разумным требованием, позволяющим устранить произвол и получить в некотором смысле оптимальную мажоранту. Конкретизация топологии особенно существенна при построении [7] нормально упорядоченных целых функций от свободного поля с индефинитной метрикой, поскольку в этой топологии должны сходиться соответствующие операторные ряды. В частности, две обсуждавшиеся во втором разделе статьи гильбертовы мажоранты приводят к разным функциональным областям определения нормальной экспоненты диполя. Точное описание пространств пробных функций, на которых возможна операторная реализация при заданном порядке роста целой функции, позволяет получить подходящее обобщение [10, 11] теоремы Пэли–Винера–Шварца. Подробнее этот круг вопросов будет изложен в другой статье.

Автор признателен проф. В. Я. Файнбергу за полезное обсуждение. Он благодарен также за финансовую поддержку, оказанную работе грантами РФФИ–96–02–16117 и ИНТАС–96–0398.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [2] G. Morchio, F. Strocchi. Ann. Inst. Henri Poincaré. A. 1980. V. 33. P. 251.
- [3] D. Zwanziger. Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 457.
- [4] U. Moschella, F. Strocchi. Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 143.
- [5] U. Moschella. J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 2480.
- [6] G. Morchio, F. Strocchi. Nucl. Phys. B. 1983. V. 211. P. 471.
- [7] U. Moschella, F. Strocchi. Lett. Math. Phys. 1992. V. 24. P. 103.
- [8] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
- [9] Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
- [10] М. А. Соловьев. ТМФ. 1995. Т. 105. С. 405.
- [11] M. A. Soloviev. Lett. Math. Phys. 1997. V. 41. P. 265.

Поступила в редакцию 21.I.1998 г.