Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Ильин, Симметрии, функция тока и точные решения для двумерной стационарной кинетической модели Бродуэлла, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 3, 350–359

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 06:47:10

© 2014 г.

О. В. Ильин*

СИММЕТРИИ, ФУНКЦИЯ ТОКА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БРОДУЭЛЛА

Стационарная кинетическая модель Бродуэлла для четырех скоростей на плоскости исследуется с помощью функции тока, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных. Для данного уравнения вычисляются алгебры классических и неклассических симметрий, затем строятся инвариантные решения. Все классы решений описывают непотенциальные течения. Рассматривается взаимосвязь между неклассическими симметриями и решениями, полученными ранее.

Ключевые слова: кинетическая модель Бродуэлла, функция тока, симметрии.

DOI: 10.4213/tmf8641

1. ВВЕДЕНИЕ

Система Бродуэлла для четырех скоростей является простейшей моделью, которая правильно передает многие свойства полного уравнения Больцмана для двух пространственных координат. Например, для системы Бродуэлла выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии, верна H -теорема [1]. В стационарной форме модель имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_4}{\partial y} = I(f), \quad I(f) = f_3 f_4 - f_1 f_2, \quad (1)$$

где $f_i(x, y)$, $i = 1, \dots, 4$, суть плотности частиц, движущихся в направлениях $\pm x$ и $\pm y$. Для построения решений этой модели в явном виде использовались различные методы. Все решения, отвечающие потенциальным течениям, были полностью описаны в работах [2]–[4]. В статье [5] два новых класса решений стационарной модели Бродуэлла были построены с помощью метода усеченного ряда Пенлеве (для нестационарной системы Карлемана основанные на данном методе решения, не являющиеся знакопостоянными, приведены в работе [6]), решения в автомобильной форме (для переменной, инвариантной относительно группы растяжений) получены

*Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия.
E-mail: oilyin@gmail.com

в работе [7]. С помощью соответствия между решениями нестационарной системы Карлемана и стационарной моделью Бродуэлла в работах [4], [8] выведены решения, относящиеся к несжимаемому течению.

Из уравнений (1) получаем, что выполняются равенства

$$f_2 = -f_1 + Q(y), \quad f_4 = -f_3 + S(x),$$

где $Q(y)$ и $S(x)$ – неизвестные гладкие функции. С помощью этих равенств система (1) записывается в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_3}{\partial y} = f_1^2 - f_3^2 - Q(y)f_1 + S(x)f_3. \quad (2)$$

Введем функцию $\psi(x, y)$ по следующему правилу:

$$f_1 = \psi_y, \quad f_3 = -\psi_x. \quad (3)$$

Тогда условие $(f_1)_x + (f_3)_y = 0$ (вытекающее из уравнений (2)) выполняется как тождество, и любое из равенств в системе (2) сводится к уравнению

$$\psi_{xy} = \psi_y^2 - \psi_x^2 - S(x)\psi_x - Q(y)\psi_y. \quad (4)$$

Итак, модель Бродуэлла редуцируется к уравнению (4), которое является предметом исследований настоящей статьи.

2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ФУНКЦИЯ ТОКА И ЗАВИХРЕННОСТЬ

Определим плотность $\rho(x, y)$ и скорости потока $U(x, y)$, $V(x, y)$ в направлениях x , y с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} \rho &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = P(y) + S(x), \\ \rho U &= f_1 - f_2 = 2f_1 - P(y), \quad \rho V = f_3 - f_4 = 2f_3 - Q(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что выполняется уравнение непрерывности $(\rho U)_x + (\rho V)_y = 0$. Это позволяет ввести функцию тока $\Psi(x, y)$ по правилу

$$\Psi(x, y) = 2\psi(x, y) + \int^x Q(z) dz - \int^y P(z) dz.$$

Сразу получаем уравнения

$$\rho U = \Psi_y = 2\psi_y - P, \quad \rho V = -\Psi_x = -2\psi_x - Q(x),$$

где функция ψ задается формулами (3). Теперь определим скалярную завихренность v :

$$v = (\rho V)_x - (\rho U)_y = 2(f_3)_x - 2(f_1)_y + P_y - Q_x. \quad (5)$$

Тогда скалярная завихренность течения запишется как $v = -2\nabla^2\psi + P_y - Q_x$.

3. СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ (4)

Для дифференциальных уравнений с одной зависимой переменной (в нашем случае переменной ψ) векторное поле классических симметрий [9]–[12] представляется в следующем виде [12]:

$$X = -F_{\psi_x}\partial_x - F_{\psi_y}\partial_y + (F - \psi_x F_{\psi_x} - \psi_y F_{\psi_y})\partial_\psi + \\ + (F_x + F_{\psi}\psi_x)\partial_{\psi_x} + (F_y + F_{\psi}\psi_y)\partial_{\psi_y},$$

где $F = F(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y)$ – производящая функция.

Уравнение (4) содержит производные второго порядка, следовательно, требуется определить действие векторного поля симметрий на члены, содержащие такие производные. Это осуществляется с помощью формулы продолжения (см. монографию [12]), применяя которую, получаем поле X_2 , действующее в пространстве переменных $(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y, \psi_{xy}, \psi_{yy}, \psi_{xx})$:

$$X_2 = X + (D_y(F_x + F_{\psi}\psi_x) + \psi_{xx}D_y(F_{\psi_x}) + \psi_{xy}D_y(F_{\psi_y}))\partial_{\psi_{xy}} + \\ + (D_x(F_x + F_{\psi}\psi_x) + \psi_{xx}D_x(F_{\psi_x}) + \psi_{xy}D_x(F_{\psi_y}))\partial_{\psi_{xx}} + \\ + (D_y(F_y + F_{\psi}\psi_y) + \psi_{xy}D_y(F_{\psi_x}) + \psi_{yy}D_y(F_{\psi_y}))\partial_{\psi_{yy}}, \quad (6)$$

где D_x, D_y – полные производные, задаваемые соотношениями

$$D_x = \partial_x + \psi_x\partial_\psi + \psi_{xx}\partial_{\psi_x} + \psi_{xy}\partial_{\psi_y} + \dots, \\ D_y = \partial_y + \psi_y\partial_\psi + \psi_{yy}\partial_{\psi_y} + \psi_{xy}\partial_{\psi_x} + \dots.$$

Векторное поле (6) является симметрией уравнения (4), если выполнено условие

$$X_2(E)|_{E=0} = 0, \quad E \equiv -\psi_{xy} + \psi_y^2 - \psi_x^2 - S(x)\psi_x - Q(y)\psi_y.$$

Раскрывая это условие, получаем следующее уравнение относительно функции F :

$$(F_{\psi_x}S_x\psi_x + F_{\psi_y}Q_y\psi_y - (2\psi_x + S)(F_x + F_{\psi}\psi_x) + (2\psi_y - Q)(F_y + F_{\psi}\psi_y) - \\ - \{F_{xy} + F_{x\psi}\psi_y + F_{x\psi_x}\psi_{xy} + F_{x\psi_y}\psi_{yy} + F_{\psi}\psi_{xy} + F_{y\psi}\psi_y + F_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + \\ + F_{\psi\psi_x}\psi_x\psi_{xy} + F_{\psi\psi_y}\psi_x\psi_{yy} + (F_y\psi_x + F_{\psi}\psi_x\psi_y + F_{\psi_x}\psi_x\psi_{xy} + F_{\psi_x}\psi_y\psi_{yy})\psi_{xx} + \\ + (F_y\psi_y + F_{\psi}\psi_y\psi_y + F_{\psi_x}\psi_y\psi_{xy} + F_{\psi_y}\psi_y\psi_{yy})\psi_{xy}\})|_{E=0} = 0. \quad (7)$$

Соберем все коэффициенты при $\psi_{xx}\psi_{yy}$, ψ_{xx} , ψ_{yy} и получим уравнения

$$\begin{aligned} \psi_{xx}\psi_{yy}: \quad & F_{\psi_x}\psi_y = 0, \\ \psi_{xx}: \quad & F_y\psi_x + F_{\psi}\psi_x\psi_y + F_{\psi_x}\psi_x\psi_{xy} = 0, \\ \psi_{yy}: \quad & F_x\psi_y + F_{\psi}\psi_y\psi_x + F_{\psi_y}\psi_y\psi_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений заключаем, что функция F линейна по переменным ψ_x, ψ_y :

$$F = a(x)\psi_x + b(y)\psi_y + c(x, y, \psi).$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при $\psi_x\psi_y$, получаем уравнение $F_{\psi\psi} = 0$, тогда

$$F = a(x)\psi_x + b(y)\psi_y + c(x, y)\psi + d(x, y), \quad (8)$$

где $a(x)$, $b(y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$ – некоторые неизвестные функции. Подставляем равенство (8) в уравнение (7) и вместо (7) получаем

$$\begin{aligned} aS_x\psi_x + bQ_y\psi_y - (2\psi_x + S)(a_x\psi_x + c_x\psi + d_x + c\psi_x) + \\ + (2\psi_y - Q)(b_y\psi_y + c_y\psi + d_y + c\psi_y) - (c_{xy}\psi + d_{xy} + c_x\psi_y + c_y\psi_y) - \\ - (\psi_y^2 - \psi_x^2 - S(x)\psi_x - Q(y)\psi_y)(a_x + c + b_y) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемые, содержащие ψ :

$$-(2\psi_x + S)c_x + (2\psi_y - Q)c_y - c_{xy} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что $c_x = c_y = 0$.

Теперь соберем члены при ψ_x^2 и ψ_y^2 , получим

$$\begin{aligned} \psi_x\psi_x: \quad -2a_x - 2c + (a_x + b_y + c) &= 0, \\ \psi_y\psi_y: \quad 2b_y + 2c - (a_x + b_y + c) &= 0. \end{aligned}$$

Решаем эти уравнения и получаем, что $c = 0$ и $a_x = b_y = K$, где K – постоянная. Тогда

$$a = Kx + \alpha, \quad b = Ky + \beta,$$

где α, β – постоянные.

Рассмотрим коэффициенты при ψ_x, ψ_y :

$$\psi_x: \quad aS_x - 2d_x + KS = 0, \quad (9)$$

$$\psi_y: \quad bQ_y + 2d_y + KQ = 0. \quad (10)$$

Теперь соберем все члены, не содержащие функции ψ и ее производных, получим уравнение

$$Sd_x + Qd_y + d_{xy} = 0. \quad (11)$$

Продифференцируем уравнение (9) по y (или уравнение (10) по x), получим $d_{xy} = 0$. Отсюда имеем

$$d(x, y) = d_1(x) + d_2(y),$$

где $d_1(x)$, $d_2(y)$ – неизвестные функции. Итак,

$$F = (Kx + \alpha)\psi_x + (Ky + \beta)\psi_y + d_1(x) + d_2(y).$$

Уравнение (11) сводится к уравнению

$$Sd_x + Qd_y = 0. \quad (12)$$

Теперь, вспоминая, что Sd_x есть функция от переменной x , а Qd_y есть функция от переменной y , из уравнения (12) выводим, что выполняются следующие равенства:

$$Sd_x = L, \quad Qd_y = -L, \quad (13)$$

где L – постоянная. Теперь подставим выражения для d_x и d_y из равенств (13) в уравнения (9), (10):

$$\begin{aligned} \psi_x: \quad (Kx + \alpha)S_x - 2LS^{-1} + KS &= 0, \\ \psi_y: \quad (Ky + \beta)Q_y - 2LQ^{-1} + KQ &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Следует рассмотреть два случая. Если постоянная $K \neq 0$, тогда решения уравнений (14) имеют следующий вид:

$$S(x) = \sqrt{\frac{C_1}{(Kx + \alpha)^2} + M}, \quad Q(y) = \sqrt{\frac{C_2}{(Ky + \beta)^2} + M},$$

где $C_1, C_2, \alpha, \beta, M$ – постоянные. Производящая функция F такова:

$$F = (Kx + \alpha)\psi_x + (Ky + \beta)\psi_y + \frac{1}{2}\sqrt{M(Kx + \alpha)^2 + C_1} - \frac{1}{2}\sqrt{M(Ky + \beta)^2 + C_2} + \lambda.$$

В случае $K = 0$ решения уравнений (14) записываются как

$$S(x) = \sqrt{\frac{4L}{\alpha}x + C_1}, \quad Q(y) = \sqrt{\frac{4L}{\beta}y + C_2},$$

где $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ – постоянные. Производящая функция имеет вид

$$F = \alpha\psi_x + \beta\psi_y + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{4L}{\alpha}x + C_1} - \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{4L}{\beta}y + C_2} + \lambda.$$

Сформулируем полученные результаты в виде утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Рассмотрим уравнение (4)

$$\psi_{xy} = \psi_y^2 - \psi_x^2 - S(x)\psi_x - Q(y)\psi_y.$$

Если

$$S(x) = \sqrt{\frac{C_1}{(Kx + \alpha)^2} + M}, \quad Q(y) = \sqrt{\frac{C_2}{(Ky + \beta)^2} + M},$$

то классические симметрии уравнения (4) задаются полем

$$X = -(Kx + \alpha)\partial_x - (Ky + \beta)\partial_y + \left(\frac{1}{2}\sqrt{M(Kx + \alpha)^2 + C_1} - \frac{1}{2}\sqrt{M(Ky + \beta)^2 + C_2} + \lambda \right) \partial_\psi, \quad (15)$$

где $K \neq 0, C_1, C_2, \alpha, \beta, M, \lambda$ – постоянные. В случае

$$S(x) = \sqrt{\frac{L}{\alpha}x + C_1}, \quad Q(y) = \sqrt{\frac{L}{\beta}y + C_2}$$

классические симметрии уравнения (4) задаются полем

$$X = -\alpha\partial_x - \beta\partial_y + \left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{L}{\alpha}x + C_1} - \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{L}{\beta}y + C_2} + \lambda \right) \partial_\psi, \quad (16)$$

где $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, C_1, C_2, L, \lambda$ – постоянные.

4. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ БРОДУЭЛЛА

В качестве приложения результатов утверждения 1 построим инвариантные относительно группы симметрий решения уравнения (4) и, как следствие, модели Бродуэлла. Очевидно, что физический смысл имеют только неотрицательные плотности. Для всех решений, построенных в данном разделе, существуют ограниченные прямоугольные области $x \in [a_1, a_2]$, $y \in [b_1, b_2]$, в которых функции f_j , $j = 1, \dots, 4$, неотрицательны и удовлетворяют граничным условиям

$$f_1(a_1, y) = F_1(y), \quad f_2(a_2, y) = F_2(y), \quad f_3(x, b_1) = F_3(x), \quad f_4(x, b_2) = F_4(x), \quad (17)$$

где F_j , $j = 1, \dots, 4$, – плотности частиц на границах. В работе [13] показано, что данная задача разрешима в прямоугольнике, если граничные плотности суть непрерывные функции. С физической точки зрения условия (17) определяют испарение газа с границ прямоугольной области.

СЛУЧАЙ 1. Пусть

$$Q(x) = \sqrt{\frac{C_1}{(Kx + \alpha)^2} + M}, \quad P(y) = \sqrt{\frac{C_2}{(Ky + \beta)^2} + M}, \quad K \neq 0.$$

Для простоты положим $\lambda = 0$. Поле (15) обладает следующими инвариантами:

$$I_1 = \frac{Ky + \beta}{Kx + \alpha}, \quad I_2 = -\psi + g_1(x) + g_2(y),$$

где

$$(g_1)_x = -\frac{1}{2}Q(x), \quad (g_2)_y = \frac{1}{2}P(y).$$

Следовательно, решения следует искать в форме

$$\psi = f(\xi) + g_1(x) + g_2(y), \quad \xi \equiv \frac{Ky + \beta}{Kx + \alpha}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (4), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-f_\xi - \xi f_{\xi\xi} = f_\xi^2 - \xi^2 f_\xi^2 + (4K^2)^{-1}C_1 - (4K^2)^{-1}C_2\xi^{-2}.$$

Оно сводится к уравнению типа Рикатти подстановкой $f(\xi)_\xi = \xi^{-1}h(\xi)$, где $h(\xi)$ – неизвестная функция:

$$h_\xi + (1 - \xi^2)\xi^{-2}h^2 + (4K^2)^{-1}(C_1 - C_2\xi^{-2}) = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим случай $C_1 = C_2 = C > 0$. Тогда уравнение (18) имеет следующее решение:

$$h(\xi) = \left[B \exp\left(-\frac{\sqrt{C}}{K}(\xi^{-1} + \xi)\right) - \frac{K}{\sqrt{C}} \right]^{-1} + \frac{\sqrt{C}}{2K},$$

где B – постоянная интегрирования. Тогда

$$\psi = g_1(x) + g_2(y) + \int^{\frac{Ky+\beta}{Kx+\alpha}} \frac{d\eta}{\eta} \left(\left[B \exp\left(-\frac{\sqrt{C}}{K}(\xi^{-1} + \xi)\right) - \frac{K}{\sqrt{C}} \right]^{-1} + \frac{\sqrt{C}}{2K} \right).$$

Используя равенства $f_1 = \psi_y$, $f_2 = -\psi_y + Q$, $f_3 = -\psi_x$, $f_4 = \psi + S$, получаем решения модели Бродуэлла (1):

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \pm \frac{K}{Ky + \beta} \left[B \exp\left(-\frac{\sqrt{C}}{K}(\xi^{-1} + \xi)\right) - \frac{K}{\sqrt{C}} \right]^{-1} \pm \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{C}}{2(Ky + \beta)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{(Ky + \beta)^2} + M}, \\ f_{3,4} &= \pm \frac{K}{Kx + \alpha} \left[B \exp\left(-\frac{\sqrt{C}}{K}(\xi^{-1} + \xi)\right) - \frac{K}{\sqrt{C}} \right]^{-1} \pm \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{C}}{2(Kx + \beta)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{(Kx + \beta)^2} + M}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $C > 0$, $K \neq 0$, M , α , β , B – постоянные. Очевидно, что только неотрицательные плотности f_j , $j = 1, \dots, 4$, имеют физический смысл. Следовательно, необходимо определить области на плоскости (x, y) , в которых $f_j(x, y) \geq 0$, $j = 1, \dots, 4$.

Рассмотрим прямоугольник $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, пусть $x_1 > x_0 > 0$, $y_1 > y_0 > 0$ и величины $C > 0$, $K > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ произвольны. Возьмем $B > K/\sqrt{C}$. Все члены при $\pm$ в (19) ограничены в рассматриваемом прямоугольнике. Тогда, выбирая постоянную M достаточно большой, получаем, что $f_j(x, y) \geq 0$, $j = 1, \dots, 4$, в области $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$.

В частном случае $\alpha = \beta = M = 0$, $K = 1$ функции (19) переходят в решения, лежащие в одном из классов, найденных в работе [7].

Явное выражение для завихренности (5) в данном случае громоздко, но можно убедиться, что оно не равно нулю.

СЛУЧАЙ 2. Пусть

$$Q(x) = \sqrt{\frac{L}{\alpha}x + C_1}, \quad P(y) = \sqrt{\frac{L}{\beta}y + C_2}, \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

Инварианты поля (16) равны

$$I_1 = \beta x - \alpha y, \quad I_2 = -\psi + g_1(x) + g_2(y),$$

где

$$(g_1)_x = -\frac{1}{2}Q(x) + \frac{\lambda}{2}, \quad (g_2)_y = \frac{1}{2}P(y) + \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда можно построить решения уравнения (4) в следующем виде:

$$\psi = f(z) + g_1(x) + g_2(y), \quad z \equiv \beta x - \alpha y,$$

где $f(z)$ – неизвестная функция. Как и в предыдущем случае, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $f(z)$:

$$\alpha\beta f_{zz} - \lambda(\alpha + \beta)f_z + (\alpha^2 - \beta^2)f_z^2 + \left(\frac{L}{4\alpha\beta}\right)z + \frac{1}{4}(C_1 - C_2) = 0. \quad (20)$$

Построим решения этого уравнения в трех случаях: при $\alpha = -1$, $\beta = 1$, при $\lambda = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и при $\lambda \neq 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Если $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то

$$\psi = g_1(x) + g_2(y) - \frac{L}{24}(x+y)^3 + \frac{1}{8}(C_1 - C_2)(x+y)^2 + K(x+y).$$

Соответствующие решения модели Бродуэлла записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \mp \frac{L}{8}(x+y)^2 \pm \frac{1}{4}(C_1 - C_2)(x+y) \pm \left(K + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{Ly + C_2}, \\ f_{3,4} &= \pm \frac{L}{8}(x+y)^2 \mp \frac{1}{4}(C_1 - C_2)(x+y) \mp \left(K + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-Lx + C_1}, \end{aligned}$$

где L , C_1 , C_2 , K , λ – постоянные. Найдём области на плоскости, в которых функции f_j , $j = 1, \dots, 4$, неотрицательны. Для простоты положим $C_1 = C_2 = C > 0$. Как и в предыдущем случае, рассмотрим прямоугольник $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ при $x_1 > x_0 > 0$, $y_1 > y_0 > 0$. Все слагаемые при $\pm, \mp$ в выражениях для f_i ограничены в рассматриваемой области. Выбирая постоянную $C > 0$ достаточно большой, получаем, что функции f_j , $j = 1, \dots, 4$, неотрицательны в прямоугольнике.

Завихренность вычисляется по формуле (5):

$$v = L(x+y) - (C_1 - C_2),$$

т. е. течение непотенциально.

Далее рассмотрим случай $\lambda = 0$, $\alpha = \beta = 1$. Решая уравнение (20), получаем выражение для функции ψ :

$$\psi = g_1(x) + g_2(y) - \frac{L}{24}(x-y)^3 - \frac{1}{8}(C_1 - C_2)(x-y)^2 + K(x-y).$$

В итоге получаем решения модели Бродуэлла:

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \pm \frac{L}{8}(x-y)^2 \pm \frac{1}{4}(C_1 - C_2)(x-y) \mp K + \frac{1}{2}\sqrt{Ly + C_2}, \\ f_{3,4} &= \pm \frac{L}{8}(x-y)^2 \pm \frac{1}{4}(C_1 - C_2)(x-y) \mp K + \frac{1}{2}\sqrt{Lx + C_1}, \end{aligned}$$

где L , C_1 , C_2 , K – постоянные. Аналогично предыдущему случаю получаем, что функции f_j , $j = 1, \dots, 4$, неотрицательны в той же области $(x, y) \in [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, где $x_1 > x_0 > 0$, $y_1 > y_0 > 0$, если выбрать достаточно большие значения постоянных $C_1 = C_2 = C > 0$.

Завихренность решений снова отлична от нуля:

$$v = L(x-y) + (C_1 - C_2).$$

Теперь в уравнении (20) положим $\lambda \neq 0$, $\alpha = \beta = 1$, получаем в итоге выражение для функции ψ :

$$\psi = g_1(x) + g_2(y) + \psi_0 e^{2\lambda(x-y)} + \left(\frac{L}{16\lambda}\right)(x-y)^2 + \frac{1}{8\lambda}\left(\frac{L}{2\lambda} + (C_1 - C_2)\right)(x-y).$$

Используя формулы $f_1 = \psi_y$, $f_2 = -\psi_y + Q$, $f_3 = -\psi_x$, $f_4 = \psi + S$, получаем решения модели Бродуэлла

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \mp 2\lambda\psi_0 e^{2\lambda(x-y)} \mp \left(\frac{L}{8\lambda}\right)(x-y) \mp \frac{1}{8\lambda}\left(\frac{L}{2\lambda} + (C_1 - C_2)\right) \pm \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{Ly + C_2}, \\ f_{3,4} &= \mp 2\lambda\psi_0 e^{2\lambda(x-y)} \mp \left(\frac{L}{8\lambda}\right)(x-y) \mp \frac{1}{8\lambda}\left(\frac{L}{2\lambda} + (C_1 - C_2)\right) \mp \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{Lx + C_1}, \end{aligned}$$

где $\lambda \neq 0$, ψ_0 , L , C_1 , C_2 – постоянные. Аналогично предыдущим случаям, если $C_1 = C_2$, то в любом прямоугольнике $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, где $x_1 > x_0 > 0$, $y_1 > y_0 > 0$, можно добиться неотрицательности плотностей $f_j(x, y)$, $j = 1, \dots, 4$, выбирая постоянную $C_1 = C_2$ достаточно большой.

Завихренность решений отлична от нуля:

$$v = -16\lambda^2\psi_0 e^{2\lambda(x-y)} - \frac{L}{2\lambda} \neq 0.$$

5. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ БРОДУЭЛЛА

Существуют решения модели Бродуэлла, которые невозможно получить с помощью симметрий, вычисленных в предыдущих разделах. Например, рассмотрим одно из решений, полученных в работе [5] с помощью метода усеченного ряда Пенлеве:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{c_1 x}{Lxy + (x + c_1 y)(c_1 x + y)}, & f_2 &= -f_1 + ay, \\ f_3 &= -\frac{c_1 y}{Lxy + (x + c_1 y)(c_1 x + y)}, & f_4 &= -f_3 + ax, \end{aligned} \quad (21)$$

где a , L , $c_1 \neq \pm 1$ – постоянные. Очевидно, что утверждение 1 не охватывает решения (21). Тем не менее их можно получить с помощью неклассических симметрий.

Рассмотрим векторное поле $Y = x\partial_x + y\partial_y$. Производящая функция этого поля есть $F = -x\psi_x - y\psi_y$. Второе продолжение для поля Y имеет следующий вид:

$$Y_2 = Y - \psi_x \partial_{\psi_x} - \psi_y \partial_{\psi_y} - 2\psi_{xy} \partial_{\psi_{xy}}.$$

Рассмотрим уравнение (4) при условии, что $S(x) = ax$, $Q(y) = ay$, $a \neq 0$. Имеем

$$Y_2(E)|_{E=0} = -2a(x\psi_x + y\psi_y) = 2aF \neq 0,$$

где

$$E \equiv -\psi_{xy} + \psi_y^2 - \psi_x^2 - S(x)\psi_x - Q(y)\psi_y,$$

следовательно, поле Y не является классической симметрией. Однако поле Y является *частной симметрией* [14]–[16] уравнения (4), а именно условие $Y_2(E) = 0$ выполняется на пересечении многообразий $E = 0$ и $E_F = 0$, где E_F задается равенством $F(x, y, \psi, \psi^{(1)}) = 0$:

$$Y_2(E)|_{E \cap E_F} = 0.$$

Очевидно, решения уравнения (4), инвариантные относительно поля $Y = x\partial_x + y\partial_y$, следует искать в виде $\psi = f(z)$, где $z \equiv y/x$. В итоге получаются равенства (21).

Следует отметить, что нахождение неклассических симметрий представляется перспективным инструментом для поиска решений других кинетических моделей.

В заключение отметим еще один интересный момент. Уравнение (4) в случае $S(x) = ax$, $Q(y) = ay$, $a \neq 0$ допускает более общую неклассическую симметрию

$$x\partial_x + y\partial_y + w\partial_\psi, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Решения, инвариантные относительно этого поля, имеют вид $\psi = w \ln r + f(z)$, где $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$, $z \equiv y/x$. Подстановка данного анзаца в уравнение (4) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению типа Риккати относительно функции $f(z)$, которое, по-видимому, имеет решение в элементарных функциях только в случае $w = 0$. Тем не менее рассматриваемый функциональный вид решения $\psi = w \ln r + f(z)$ представляет интерес в силу следующих обстоятельств. Во-первых, подстановка $\psi = w \ln r + f(z)$ является примером анзаца Кларксона–Крускала [17], позволяющего свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Связь между методом Кларксона–Крускала и неклассическими симметриями обсуждается в монографии [15]. Во-вторых, нетрудно видеть, что подстановка $\psi = w \ln r + f(z)$ представляет собой решение в полярных координатах с разделенными переменными. Вполне вероятно, что переход к полярным координатам (или сферическим в случае трехмерных моделей) позволит находить решения более сложных дискретных кинетических моделей.

Список литературы

- [1] С. К. Годунов, У. М. Султангазин, *УМН*, **26**:3(159) (1971), 3–51.
- [2] A. V. Bobylev, G. Spiga, *J. Phys. A*, **27**:22 (1994), 7451–7459.
- [3] A. V. Bobylev, G. Caraffini, G. Spiga, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **19**:2 (2000), 303–315.
- [4] A. V. Bobylev, *Math. Methods Appl. Sci.*, **19**:10 (1996), 825–845.
- [5] О. Илын, *J. Stat. Phys.*, **146**:1 (2012), 67–72.
- [6] О. Линдблом, Н. Эйлер, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 179–193.
- [7] О. В. Ильин, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 481–488.
- [8] H. Cabannes, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **16**:1 (1997), 1–15.
- [9] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, **9**, World Sci., Singapore, 1992.
- [10] N. H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Reidel, Dordrecht, 1985.
- [11] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [12] I. S. Krasil'shchik, P. H. M. Kersten, *Symmetries and Recursion Operators for Classical and Supersymmetric Differential Equations*, Mathematics and its Applications, **507**, Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [13] C. Cercignani, R. Illner, M. Shinbrot, *Commun. Math. Phys.*, **114**:4 (1988), 687–698.
- [14] P. J. Olver, *Appl. Numer. Math.*, **10**:3–4 (1992), 307–324.
- [15] P. J. Olver, E. M. Vorob'ev, “Nonclassical and conditional symmetries”, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, v. 3: *New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, 291–328.
- [16] P. J. Olver, P. Rosenau, *SIAM J. Appl. Math.*, **47**:2 (1987), 263–278.
- [17] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, **30**:10 (1989), 2201–2213.