Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ровенчак, Перечисление плоских разбиений с ограниченным количеством частей, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 2, 349–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:38:46

© 2014 г.

А. А. Ровенчак*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ЧАСТЕЙ

Квантово-статистический подход используется для оценки числа ограниченных плоских разбиений целого n при условии, что количество частей не превосходит некоторого конечного N . Применяется аналогия между этой теоретико-числовой задачей и перечислением микросостояний идеального двумерного бозе-газа. Полученное выражение для числа ограниченных плоских разбиений при $10 \leq n \leq 20$ демонстрирует хорошее согласие между вычисленными и точными значениями.

Ключевые слова: бозе-газ, плоские разбиения, ограниченные разбиения.

DOI: 10.4213/tmf8643

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о разбиениях целого числа, восходящая еще к работам Лейбница и Эйлера, имеет много применений не только в математике, но и в различных областях физики. Области математики, где она используется, включают, например, комбинаторику и теорию вероятностей, а в физике эта задача связана с теорией кристаллов, теорией перколяции, а также с квантовой статистикой (см., например, работу [1] и приведенную в ней литературу).

Так называемые двумерные, или плоские разбиения представляют собой специальный тип разбиений целого числа. Плоское разбиение положительного целого числа n есть двумерный массив неотрицательных целых чисел n_{ij} , удовлетворяющих условию невозрастания по строкам и столбцам:

$$n = \sum_{i,j>0} n_{ij}, \quad n_{i_1 j_1} \geq n_{i_2 j_2} \quad \text{при} \quad i_1 \leq i_2, \quad j_1 \leq j_2$$

(см. монографию [2]). Например, все 13 двумерных разбиений числа 4 имеют вид [3]

$$4, \quad 31, \quad \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad 22, \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad 211, \quad \begin{smallmatrix} 21 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad 1111, \quad \begin{smallmatrix} 111 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 11 \\ 11 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}.$$

*Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина.
E-mail: andrij.rovenchak@gmail.com

Нулевые элементы при записи разбиений традиционно опускаются; оставшиеся ненулевые элементы называются частями. Число различных плоских разбиений числа n будем в дальнейшем обозначать как $p^{2D}(n)$; в приведенном выше примере $p^{2D}(4) = 13$. В математике об этой величине традиционно говорят как о функции разбиений (partition function). Во избежание двусмысленности, поскольку в статистической физике таким же термином называют статистическую сумму, мы будем $p^{2D}(n)$ называть *числом разбиений*.

Аналогично простым одномерным, или линейным разбиениям [4]–[7] проблеме перечисления плоских разбиений можно связать с задачей подсчета числа микросостояний в системе двумерных квантовых гармонических осцилляторов, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна [5], [8].

На разбиения можно налагать различные типы ограничений. Можно принять, что части являются или нечетными, или четными числами, ограничить величину частей или их количество и т. д. [2]. С точки зрения квантовых ансамблей это соответствует, в частности, изучению дробной статистики или эффектам конечного числа частиц [6], [9], [10]. Для плоских разбиений можно также требовать, чтобы они имели определенную геометрическую форму, ограничивать количество строк и столбцов и т. д. [2], [11], [12]. Весьма любопытно, что проблема перечисления плоских разбиений с единственным ограничением на количество частей, если посмотреть на нее с точки зрения асимптотического поведения, не была должным образом отражена в литературе. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы частично заполнить этот пробел.

Работа построена следующим образом. Раздел 2 содержит вывод искомых выражений для системы с конечным числом частиц N в общем D -мерном случае. Затем эти выражения применяются к одномерной задаче, и отсюда в разделе 3 выводится известное поведение обыкновенных (линейных) ограниченных разбиений. Ограниченные плоские разбиения рассматриваются в разделе 4. Работа завершается кратким обсуждением.

2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ N ЧАСТИЦ

Статистическая сумма Z_N конечной системы N бозонных гармонических осцилляторов подчиняется рекуррентному соотношению [6], [13]

$$Z_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N B_k(x) Z_{N-k}(x), \quad Z_0(x) \equiv 1, \quad (1)$$

где $x = e^{-\beta\hbar\omega}$, β – обратная температура, ω – частота осцилляторов. В D измерениях

$$B_k(x) = \frac{1}{(1 - x^k)^D}.$$

Выражение для Z_N в замкнутом виде существует только в одномерном случае:

$$Z_N^{1D}(x) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k}. \quad (2)$$

Далее мы используем этот результат, чтобы проверить предложенный метод.

Чтобы решить уравнение (1), можно применить интегральное преобразование. Во избежание усложнений, связанных с переходом от суммирования к интегрированию, лучшим выбором будет, как нам представляется, использование дискретного преобразования.

Z -преобразование функции $f(N)$ определяется как [14]

$$\mathfrak{Z}[f(N)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)s^{-n} = \tilde{f}(s).$$

Оно представляет собой дискретный аналог преобразования Лапласа. Для решения уравнения (1) требуются следующие два свойства Z -преобразования:

$$\mathfrak{Z}[Nf(N)] = -s \frac{d\tilde{f}(s)}{ds}, \quad \mathfrak{Z}[f(N) * g(N)] = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s),$$

где свертка определяется как

$$f(N) * g(N) = \sum_{n=0}^N f(n)g(N-n).$$

Перепишем уравнение (1) в виде, который позволяет непосредственно применить Z -преобразование:

$$NZ_N(x) = \sum_{k=0}^N B_k(x)Z_{N-k}(x), \quad B_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Представляется более удобным рассматривать поправку к статистической сумме бесконечной системы $Z_{\infty}(x)$:

$$Z_N(x) = Z_{\infty}(x)y_N(x), \quad (3)$$

где функция $y_N(x)$ в пределе ведет себя очевидным образом:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_N(x) = 1. \quad (4)$$

Для преобразования данной поправки легко получить уравнение

$$-s \frac{d\tilde{y}(s|x)}{ds} = \tilde{B}(s|x)\tilde{y}(s|x), \quad (5)$$

следовательно,

$$\tilde{y}(s|x) = C \exp \left\{ - \int^s \frac{\tilde{B}(s'|x)}{s'} ds' \right\},$$

где постоянную интегрирования C можно найти из условия (4).

3. ПРОВЕРКА ПОДХОДА В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Сначала проверим метод в одномерном случае, для которого все результаты хорошо известны [6], [7], [15].

Суммирование в преобразовании функции $B_N(x)$ нетрудно выполнить в первом порядке по x :

$$\tilde{B}^{1D}(s|x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{-k}}{1-x^k} \simeq \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} (1+x^k) = \frac{s-2x+sx}{(s-1)(s-x)},$$

что дает

$$\tilde{y}^{1D}(s|x) = C \frac{s^2}{(s-1)(s-x)},$$

а потому, обращая преобразование, получаем

$$y_N^{1D}(x) = 3^{-1} \left[C \frac{s^2}{(s-1)(s-x)} \right] = C \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}. \quad (6)$$

Из уравнения (4) находим постоянную интегрирования $C = 1 - x$ и окончательно в главном порядке

$$y_N^{1D}(x) = 1 - x^{N+1}.$$

Этот результат правильно воспроизводит точное выражение (2). Действительно,

$$Z_{\infty}^{1D}(x) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} \prod_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

таким образом,

$$y_N^{1D}(x) = \prod_{k=N+1}^{\infty} (1-x^k) = \exp \sum_{k=N+1}^{\infty} \ln(1-x^k). \quad (7)$$

Как и ранее, в главном порядке, учитывая, что $x < 1$, а число N является большим, получаем

$$y_N^{1D}(x) = e^{-x^{N+1}} = 1 - x^{N+1} \pm \dots \quad (8)$$

Здесь потребуются некоторые пояснения. Число (одномерных, или линейных) разбиений $p^{1D}(n) \equiv p(n)$ целого числа n равно количеству микросостояний $\Gamma(E)$ в системах с энергией $E = \hbar\omega n$. Функция $\Gamma(E)$ связана с $Z(\beta)$ посредством обратного преобразования Лапласа, и ее можно вычислить, используя метод перевала [7]:

$$\Gamma(E) = \frac{e^{S(\beta_0)}}{\sqrt{2\pi S''(\beta_0)}}, \quad (9)$$

где энтропия есть $S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta)$, а стационарная точка β_0 определяется соотношением $S'(\beta_0) = 0$.

Рассматривая конечное число частиц N (или, что эквивалентно, конечное количество частей в разбиении), из уравнения (3) видим, что выражение для $y_N(x)$ должно входить в формулу для числа ограниченных разбиений. Действительно, для конечного N энтропия равна $S_N = \beta E + \ln Z_\infty + \ln y_N$, что в силу равенства (9) дает

$$p_N(n) = p(n)y_N(e^{-\beta_0}),$$

где стационарная точка есть $\beta_0 = \pi/\sqrt{6n}$ [7], [8]. Заметим, что при больших n стационарная точка β_0 является малым числом, а аргумент $x = e^{-\beta_0}$ близок к единице, хотя все еще выполнено неравенство $x < 1$. Таким образом, суммирование в формуле (7) требует более аккуратного подхода, а именно

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \ln(1 - x^k) \simeq - \sum_{k=N+1}^{\infty} x^k = - \frac{x^{N+1}}{1 - x}.$$

При $N \gg 1$ это дает следующую модификацию выражения (8):

$$y_N^{1D}(x) = \exp\left(-\frac{x^N}{1 - x}\right) \simeq \exp\left(-\frac{x^N}{\beta_0}\right).$$

Поэтому главная поправка к числу ограниченных разбиений равна [4], [7]

$$p_N(n) = p(n) \exp\left\{-\frac{\sqrt{6n}}{\pi} e^{-\pi N/\sqrt{6n}}\right\}, \quad (10)$$

что воспроизводит классический результат Эрдеша и Ленера [16] об асимптотическом поведении числа разбиений числа n не более чем на N частей.

Получение выражения (10) непосредственно из уравнения (6) было бы несколько спекулятивным, поскольку подвергнутая Z -преобразованию функция $\tilde{B}^{1D}(s)$ была получена в пределе малых x . Уравнение для $\tilde{y}^{1D}(s)$ можно решить в пределе $x \rightarrow 1$, однако в этом случае невозможно аналитически выполнить обращение $\mathfrak{Z}^{-1}[\tilde{y}^{1D}(s)]$. Поэтому можно использовать связь между зависимостями от N и от x для $y_N^{1D}(x)$, полученных с помощью двух разных подходов, и допустить, что подобный переход также справедлив в пространствах более высокой размерности. Как будет показано ниже, такое допущение приводит к весьма хорошему согласию между реальными и вычисленными числами ограниченных плоских разбиений.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ

В двумерном случае функция $B_k^{2D}(x)$ равна

$$B_k^{2D}(x) = \frac{1}{(1-x^k)^2},$$

что приводит к приближенному выражению

$$\tilde{B}^{2D}(s|x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k}(1+2x^k) = \frac{s-3x+2sx}{(s-1)(s-x)}.$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\tilde{y}^{2D}(s|x) = C \frac{s^3}{(s-1)(s-x)^2},$$

а его обратное Z -преобразование есть

$$y_N^{2D}(x) = \mathfrak{Z}^{-1}[\tilde{y}^{2D}(s|x)] = C \frac{(N+1)x^{N+2} - (N+2)x^{N+1} + 1}{(x-1)^2},$$

где $C = (x-1)^2$; при больших N и малых x оно принимает вид

$$y_N^{2D}(x) = 1 - Nx^N. \quad (11)$$

Аналогичное выражение можно получить для системы N изотропных двумерных осцилляторов, если статистическую сумму записать в виде

$$\ln Z_N^{2D}(x) = - \sum_{k=1}^N k \ln(1-x^k), \quad (12)$$

где учтена k -кратная вырожденность k -го уровня. Если верхний предел суммирования заменить на бесконечность, то мы получим производящую функцию Макмагона для плоских разбиений [17]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{2D}(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^n}.$$

Сравнивая равенства (11), (12) и действуя по аналогии с одномерным случаем, рассмотрим предел $\beta \rightarrow 0$. Для $y_N^{2D}(x)$ можно получить формулу

$$\begin{aligned} y_N^{2D}(x) &= \exp \sum_{k=N+1}^{\infty} k \ln(1-x^k) \simeq \\ &\simeq \exp \left(- \sum_{k=N+1}^{\infty} kx^k \right) = \exp \left(- \frac{x^{N+1}[N(1-x)+1]}{(1-x)^2} \right). \end{aligned}$$

Таблица 1. Число ограниченных плоских разбиений. Точные значения взяты из работы [18]. В столбце “Расчет 1” приведены точные значения $p^{2D}(n)$ из работы [19]; в столбцах “Расчет 2” и “Расчет 3” приведены значения $p^{2D}(n)$, полученные с помощью формулы (15) для двух значений постоянной c : взятых из работы [8] и из работ [20], [21].

n	N	$p^{2D}(n)$	$p_N^{2D}(n)$				Относительные ошибки, %		
			Точные значения	Расчет 1	Расчет 2	Расчет 3			
							1	2	3
10	9	500	458	474	498	497	3.5	8.8	8.7
15	14	6879	6703	6791	7082	7073	1.3	5.7	5.5
20	19	75278	74651	75003	77574	77478	0.5	3.9	3.8
	18		74161	74898	77435	77339	1.0	4.4	4.3

Таким образом, при $N\beta_0 \gg 1$ получаем асимптотику

$$y_N^{2D}(x) = \exp\left(-\frac{Nx^N}{1-x}\right) \simeq \exp\left(-\frac{Nx^N}{\beta_0}\right),$$

где стационарная точка есть

$$\beta_0 = \left(\frac{2\zeta(3)}{n}\right)^{1/3},$$

а $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана [8].

Поэтому можно предположить, что число ограниченных плоских разбиений имеет следующее асимптотическое поведение:

$$p_N^{2D}(n) = p^{2D}(n) \exp\left\{-\frac{Nn^{1/3}}{[2\zeta(3)]^{1/3}} e^{-N[2\zeta(3)/n]^{1/3}}\right\}. \quad (13)$$

Данная формула представляет собой основной результат настоящей работы. С ее помощью можно оценить количество плоских разбиений числа n не более чем на N частей.

Из самой процедуры немедленно следуют условия для N :

$$0.75n^{1/3} \ll N < n, \quad 0.75 \approx [2\zeta(3)]^{-1/3}. \quad (14)$$

Результаты вычислений с применением равенства (13) приведены в табл. 1. Точные значения числа неограниченных плоских разбиений $p^{2D}(n)$ можно найти в работе [18], при этом асимптотическая зависимость от n имеет вид [20], [21]

$$p^{2D}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} n^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3}n^{2/3} + c\right\}, \quad (15)$$

где $c = \zeta'(-1) = -0.165421\dots$. В работе [8] было получено значение

$$c = -\frac{1}{6} = -0.166666\dots,$$

что дает лучшую аппроксимацию для $n \leq 7573$, однако недостаточно хорошо описывает поведение при $n \rightarrow \infty$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Как видно из табл. 1, хорошая точность достигается для числа ограниченных плоских разбиений, задаваемых равенством (13), по крайней мере для $n = 10 \div 20$. Относительно высокие (4–9%) ошибки обусловлены в основном асимптотической формулой (15) для числа неограниченных плоских разбиений. Ожидаемое монотонное убывание относительной ошибки наблюдается по крайней мере для $N/n = 9/10$.

При дальнейших исследованиях проблемы мы планируем численно решить рекуррентное уравнение (1) для $Z_N(x)$ с целью проверки поведения по x и N , в особенности в пределах $x \rightarrow 1$ и больших N . Когда будут известны точные значения $p_N^{2D}(n)$, гипотезу о справедливости формулы (13) можно будет проверить для больших значений n .

Представляется соблазнительным распространить предложенный подход на разбиения более высоких размерностей. Однако мы воздержимся от этого, пока не будет проведен всесторонний анализ ограниченных плоских разбиений.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке со стороны Министерства образования и науки Украины, грант ФФ–110Ф (№ 0112U001275).

Список литературы

- [1] Н. М. Боголюбов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 193–203.
- [2] Г. Эндрюс, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.
- [3] G. Andrews, P. Paule, *J. London Math. Soc.* (2), **76**:3 (2007), 647–666.
- [4] F. C. Auluck, D. S. Kothari, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **42** (1946), 272–277.
- [5] V. S. Nanda, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 591–601.
- [6] S. Grossmann, M. Holthaus, *Phys. Rev. Lett.*, **79**:19 (1997), 3557–3560.
- [7] M. N. Tran, M. V. N. Murthy, R. K. Bhaduri, *Ann. Phys.*, **311**:1 (2004), 204–219.
- [8] D. Prokhorov, A. Rovenchak, *Condens. Matter Phys.*, **15**:3 (2012), 33001, 9 pp., arXiv: 1210.1415.
- [9] C. S. Srivatsan, M. V. N. Murthy, R. J. Bhaduri, *Pramana – J. Phys.*, **66**:3 (2006), 485–494.
- [10] A. Rovenchak, *ФНТ*, **35**:5 (2009), 510–513.
- [11] R. P. Stanley, *Stud. Appl. Math.*, **50** (1971), 167–188; 259–279.
- [12] N. M. Bogoliubov, *J. Phys. A*, **38**:43 (2005), 9415–9430.
- [13] P. Borrmann, G. Franke, *J. Chem. Phys.*, **98**:3 (1993), 2484–2485.
- [14] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Application*, McGraw-Hill, New York, 2000.
- [15] C. Weiss, M. Holthaus, *Europhys. Lett.*, **59**:4 (2002), 486–492.
- [16] P. Erdős, J. Lehner, *Duke Math. J.*, **8**:2 (1941), 335–345.

- [17] P. A. MacMahon, *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **187** (1897), 619–673.
- [18] On-line Encyclopedia of Integer Sequences, *Triangle read by rows: $T[n, k] = \text{plane partitions of } n \text{ containing } k \text{ parts}$* , 2014, <http://oeis.org/A091298>.
- [19] On-line Encyclopedia of Integer Sequences, *Number of planar partitions of n* , 2014, <http://oeis.org/A000219>.
- [20] L. Mutafchiev, E. Kamenov, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **59**:4 (2006), 361–366.
- [21] E. M. Wright, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **os-2**:1 (1931), 177–189.

Поступила в редакцию 19.01.2014,
после доработки 22.04.2014