Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Артамонов, В. А. Голубева, W -алгебры и высшие
аналоги уравнения Книжника–Замолодчикова, *ТМФ*,
2015, том 182, номер 3, 355–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 04:23:18

© 2015 г.

Д. В. Артамонов*, В. А. Голубева†

W-АЛГЕБРЫ И ВЫСШИЕ АНАЛОГИ УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

При выводе уравнения Книжника–Замолодчикова в модели Весса–Зумино–Виттена ключевую роль играет тензор энергии-импульса, построенный по элементу Казимира второго порядка в универсальной обертывающей алгебре соответствующей алгебры Ли. Исследуется возможность построения аналогов уравнения Книжника–Замолодчикова на основе элементов Казимира высших порядков. Рассматриваются элемент Казимира третьего порядка для алгебры $\mathfrak{sl}_N$ и четвертого порядка для алгебры $\mathfrak{o}_N$. Доказано, что в первом случае такое построение невозможно, во втором удастся получить искомое уравнение.

Ключевые слова: элементы Казимира, W -алгебры, уравнение Книжника–Замолодчикова, коммутативные пфаффианы.

DOI: 10.4213/tmf8644

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предварительные сведения.

1.1.1. *Алгебра петель и ее центральное расширение.* Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, z]$ – алгебра петель, а $\hat{\mathfrak{g}}$ – центральное расширение алгебры петель, определяющееся следующим образом. Если $\{J^\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть базис алгебры $\mathfrak{g}$, индексированный элементами некоторого множества A , то базисом алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ является набор элементов J_n^α , где $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in A$, и элемент K . Таким образом, как векторное пространство

$$\hat{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, z]) \oplus \mathbb{C}K.$$

Коммутационные соотношения удобно записать следующим образом. Возьмем элементы $a \otimes P(z) + nK, b \otimes Q(z) + mK \in \hat{\mathfrak{g}}$, где $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z^{-1}, z]$ – полиномы Лорана, $a, b \in \mathfrak{g}$ и $n, m \in \mathbb{C}$. Тогда

$$[a \otimes P(z) + nK, b \otimes Q(z) + mK] = [a, b] \otimes (P(z)Q(z)) + \omega(a, b) \cdot \text{Res}(P(z) \partial Q(z))K,$$

где ω есть форма Киллинга для алгебры $\mathfrak{g}$.

*Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: artamonov.dmitri@gmail.com

†Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия. E-mail: golubeva@yahoo.com

Ряды $a(z) \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, z]$ называются *токами*¹⁾. Поле назовем произвольный элемент из $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, z]$. Произведение двух полей $a(z)$ и $b(w)$ записывается в виде

$$a(z)b(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(ab)_k(w)}{(z-w)^k}.$$

Коэффициент $(ab)_0(w)$ называется *нормально упорядоченным произведением* полей $a(z)$ и $b(w)$ и обозначается как $(ab)(z)$. Всюду ниже будет использоваться следующая запись операторных разложений произведений:

$$a(z)b(w) = \frac{(ab)_k(w)}{(z-w)^k} + \dots + \frac{(ab)_l(w)}{(z-w)^l} + \dots.$$

Эта запись означает, что $(ab)_r(w) = 0$ при $r < k$, при $r = k, \dots, l$ коэффициенты $(ab)_r(w)$ суть заданные функции $(ab)_k(w), \dots, (ab)_l(w)$, а при $r > l$ – какие-то другие неизвестные функции.

1.1.2. *Токи и примарные поля.* В настоящей работе обсуждается модель Веса–Зумино–Виттена (ВЗВ) [1], являющаяся конформной теорией поля, связанной с простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Введем ток

$$J^\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^\alpha z^{-n-1}.$$

Определим поле $T(z)$, называемое *тензором энергии-импульса*, а также введем обозначение для коэффициентов его разложения на моды:

$$T(z) = \frac{1}{2(\varkappa + g)} \sum_{\alpha \in A} (J^\alpha J^\alpha)(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L_k z^{-k-2}; \quad (1)$$

в данной формуле $\{J^\alpha\}_{\alpha \in A}$ – ортонормированный относительно формы Киллинга базис алгебры $\mathfrak{g}$, g есть дуальное число Коксетера, а $\varkappa$ – константа, участвующая в действии модели ВЗВ.

В модели ВЗВ рассматриваются также поля $\varphi(z) = \sum_n \varphi_n z^n$, такие что φ_n – элементы $\hat{\mathfrak{g}}$ -модуля. В соответствии с этим можно определить действие операторов J_n^α на поле $\varphi(z)$, а также произведение рядов $J^\alpha(z)\varphi(w)$. Используя формулу (1), которая позволяет выразить L_k через J_m^α (см. подробнее книгу [1]), можно определить произведение рядов $T(z)\varphi(w)$. Поле φ называется *примарным* (или *вирасоро-примарным*), если

$$T(z)\varphi(w) = \text{const} \frac{\varphi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \varphi(w)}{z-w} + \dots.$$

Поле φ называется *ВЗВ-примарным*, если

$$J^\alpha(z)\varphi(w) = \frac{J_0^\alpha \varphi(w)}{z-w} + \dots.$$

Отметим, что поле, являющееся ВЗВ-примарным, является примарным, но обратное, вообще говоря, неверно [1] (см. также формулы (9) и (10) ниже).

¹⁾ Часто вместо пространства полиномов Лорана нужно рассматривать его пополнение – алгебру $\mathbb{C}[[z]][z^{-1}]$ рядов Лорана, – но мы не будем этого уточнять, допуская вольность речи.

Для двух токов имеет место операторное разложение [1] (здесь и далее по повторяющимся индексам, из которых один верхний, а другой нижний, предполагается суммирование, но иногда для ясности мы будем указывать знак суммы)

$$J^\alpha(z)J^\beta(w) = \frac{\varkappa\omega(J^\alpha, J^\beta)}{(z-w)^2} + \frac{f_\gamma^{\alpha,\beta}J^\gamma(w)}{z-w} + \dots,$$

где $f_\gamma^{\alpha,\beta}$ – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, при $\varkappa = 0$ поля $J^\beta(w)$ являются ВЗВ-примарными полями, преобразующимися по присоединенному представлению. С помощью полей $J^\beta(w)$ легко получить сначала поля, преобразующиеся как тензорные степени присоединенных представлений, а затем – поля, преобразующиеся как неприводимые компоненты этих тензорных степеней. Среди этих неприводимых компонент содержится векторное представление. Итак, в случае простой алгебры Ли типа $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{sp}$, $\mathfrak{o}$ построены примарные поля, преобразующиеся по произвольному тензорному представлению. Ниже в работе будут использованы поля $J^\beta(w)$ с произвольной константой $\varkappa$.

1.1.3. Алгебра Вирасоро и ее обобщения. Тензор энергии-импульса. В модели ВЗВ имеет место следующий факт, называемый *конструкцией Сугавары* [1]. Рассмотрим разложение на моды тензора энергии-импульса (1). Тогда операторы L_n удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}, \quad \text{где} \quad c = \frac{\varkappa}{\varkappa+g} \dim \mathfrak{g}.$$

Таким образом, L_n и тождественный оператор 1 реализуют алгебру Вирасоро.

В модели ВЗВ естественно возникают обобщения алгебры Вирасоро: W -алгебры, являющиеся ассоциативными алгебрами, порожденными модами L_n тензора энергии-импульса, а также модами других полей, построенных по элементам Казимира более высоких порядков. Более подробное описание этих W -алгебр см. в п. 2.2, 3.2.

1.1.4. Элемент Казимира третьего порядка для алгебры $\mathfrak{sl}_N$. Определим центральные элементы Казимира третьего порядка в универсальной обертывающей алгебре для $\mathfrak{sl}_N$ [2], [3]. В качестве базиса алгебры $\mathfrak{sl}_N$ выберем обобщенные матрицы Гелл-Манна λ_α , где $\alpha = 1, \dots, N^2 - 1$. Для $1 \leq j < k < N$ положим

$$\lambda_{j,k,\text{sym}} = E_{k,j} + E_{j,k}, \quad \lambda_{j,k,\text{ant}} = -i(E_{j,k} - E_{k,j})$$

(в первом равенстве $\alpha = (j, k, \text{sym})$, во втором равенстве $\alpha = (j, k, \text{ant})$), где E_{ij} – матричные единицы. Для $1 \leq l \leq N - 1$ положим (здесь $\alpha = l$)

$$\lambda_l = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left(\sum_{j=1}^l E_{j,j} - lE_{l+1,l+1} \right).$$

Введем тензор

$$d_{\alpha,\beta,\gamma} = \text{Tr}(\lambda_\alpha \{\lambda_\beta, \lambda_\gamma\}), \quad \text{где} \quad \{\lambda_\beta, \lambda_\gamma\} = \lambda_\beta \lambda_\gamma + \lambda_\gamma \lambda_\beta. \quad (2)$$

Определим элемент Казимира третьего порядка формулой

$$Q = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} d_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma \in Z(U(\mathfrak{sl}_N)).$$

Здесь $Z(U(\mathfrak{sl}_N))$ – центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_N)$.

1.1.5. *Некоммутативные пфаффианы и элементы Капелли.* Пусть алгебра $\mathfrak{o}_N$ реализована на пространстве кососимметричных матриц с базисом, состоящим из матриц $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, где $i, j = 1, \dots, N$, $i < j$. Отметим, что этот базис является ортонормированным относительно формы Киллинга. Пусть $\Phi = (\Phi_{ij})$ – кососимметричная $(2k \times 2k)$ -матрица, матричные элементы которой принадлежат некоммутативному кольцу. Некоммутативный пфаффиан матрицы Φ задается формулой

$$\text{Pf}(\Phi) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} (-1)^\sigma \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \dots \Phi_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)},$$

где σ – перестановка множества $\{1, \dots, 2k\}$ и S_{2k} – множество всех перестановок. Пусть $I \subset \{1, \dots, N\}$ – упорядоченный набор индексов.

Выделим в кососимметричной $(N \times N)$ -матрице $F = (F_{ij})_{i,j=1}^N$ подматрицу F_I , строки и столбцы которой занумерованы элементами из множества I ; ее матричные элементы лежат в $U(\mathfrak{o}_N)$.

Справедлива следующая теорема [4], [5].

ТЕОРЕМА 1. *Элементы*

$$C_k = \sum_{\substack{|I|=k, \\ I \subset \{1, \dots, N\}}} \text{Pf}^2(F_I), \quad k = 2, 4, \dots, 2[N/2],$$

принадлежат $Z(U(\mathfrak{o}_N))$, центру алгебры $U(\mathfrak{o}_N)$. В случае нечетного N элементы C_k алгебраически независимы и алгебраически порождают центр. В случае четного N то же самое верно, если вместо $C_N = \text{Pf}^2(F)$ взять $\text{Pf}(F)$.

Элементы C_k называются *элементами Капелли*. Этот термин был введен в работе [6]. Дело в том, что данные элементы естественным образом возникают при разложении по полиномам

$$\left(u + \frac{N}{2} - k\right) \left(u + \frac{N}{2} - k + 1\right) \dots \left(u - \frac{N}{2} + k + 1\right), \quad k = 1, \dots, N,$$

некоммутативного детерминанта

$$\det \left(F + u + \text{diag} \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, -\frac{N}{2} + 1 \right) \right).$$

Доказательство того что этот детерминант, а следовательно, и коэффициенты его разложения, являются центральными элементами, основано на использовании тождества Капелли [4].

В работе [7] найдены коммутационные соотношения между $\text{Pf}(F_I)$ и $F_{i,j}$. Чтобы их сформулировать, определим выражение $F_{ij}I$. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, N\}$ есть подмножество индексов. отождествим индекс i_r с вектором e_{i_r} из векторного пространства V тождественного N -мерного представления алгебры $\mathfrak{o}_N$, а множество I – с тензором $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$. Тогда $F_{ij}I$ определяется как тензор, получающийся в результате действия элемента F_{ij} на тензор I .

Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ положим

$$\text{Pf}(F_{\alpha I + \beta J}) := \alpha \text{Pf}(F_I) + \beta \text{Pf}(F_J).$$

Тогда для каждого $g \in \mathfrak{o}_N$ определено выражение $\text{Pf}(F_{gI})$, удовлетворяющее условию (см. статью [7])

$$[F_{ij}, \text{Pf}(F_I)] = \text{Pf}(F_{F_{ij}I}).$$

Пусть множество $I = I_1 \sqcup I_2$ есть объединение двух непересекающихся подмножеств I_1 и I_2 , а $(-1)^{(I_1, I_2)}$ – знак перестановки множества I , которая первым ставит множество I_1 , а затем – множество I_2 .

Отождествим теперь множество индексов $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ с тензором $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ и определим тензор $I \setminus J$ следующим образом. Если $J \subset I$, то удалим из I индексы, принадлежащие J , построим по полученному множеству тензор и возьмем его со знаком $(-1)^{(J, I \setminus J)}$. Если же $J \not\subset I$, то положим $I \setminus J = 0$. Пусть

$$\text{Pf}(F_{I \setminus J}) = \begin{cases} \text{Pf}(F_{i,j})_{i,j \in I \setminus J}, & \text{если } J \subset I, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $J = \{j_1, j_2\}$, то обозначим символом F_J элемент F_{j_1, j_2} .

1.2. Постановка задачи и основные результаты.

1.2.1. *Уравнение Книжника–Замолотчикова.* В модели ВЗВ, связанной с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, доказано, что корреляционные функции ВЗВ-примарных полей удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Книжника–Замолотчикова [8], которая получается следующим образом.

Возьмем корреляционную функцию

$$\langle \varphi_1(z_1) \dots \varphi_r(z_r) \rangle, \quad (3)$$

где $\varphi_k(z_k)$ – ВЗВ-примарные поля. Оператор L_{-1} (см. формулу (1)), действующий на корреляционную функцию ВЗВ-примарных полей, можно, с одной стороны, представить как дифференциальный (см. книгу [1]):

$$\langle \varphi_1(z_1) \dots (L_{-1}\varphi_j)(z_j) \dots \varphi_n(z_n) \rangle = \partial_j \langle \varphi_1(z_1) \dots \varphi_j(z_j) \dots \varphi_n(z_n) \rangle, \quad (4)$$

где $\partial_j = \partial/\partial z_j$. С другой стороны, этот же оператор можно представить как алгебраический (см. книгу [1]):

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1(z_1) \dots (L_{-1}\varphi_j)(z_j) \dots \varphi_n(z_n) \rangle &= \\ &= \frac{1}{\varkappa + g} \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha} \frac{J^{\alpha, i} J^{\alpha, j}}{z_i - z_j} \langle \varphi_1(z_1) \dots \varphi_j(z_j) \dots \varphi_n(z_n) \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где $J^{\alpha, i}$ обозначает оператор J^{α} , действующий на i -е поле $\varphi_i(z_i)$. Приравнявая правые части равенств (4) и (5), получаем дифференциальное уравнение Книжника–Замолотчикова. Неизвестной функцией здесь является корреляционная функция $\langle \varphi_1(z_1) \dots \varphi_n(z_n) \rangle$, таким образом, это уравнение позволяет найти ее как функцию от $z_1, \dots, z_n$ (см. монографию [9], где приведены интегральные представления решений этой системы в случае $n = 4$, а также монографию [10], где рассмотрен общий случай для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$). Кроме того, данное уравнение неожиданно возникает при описании квантований универсальной обертывающей алгебры [11].

1.2.2. *Высшие аналоги уравнений Книжника–Замолодчикова.* При выводе равенства (4) важную роль играет тот факт, что элемент $\sum_{\alpha} J^{\alpha} J^{\alpha} \in U(\mathfrak{g})$ является центральным. Возникает естественный вопрос, можно ли получить новые уравнения, если использовать аналоги тензора энергии-импульса, построенные по центральным элементам более высоких порядков?

Чтобы пойти по пути вывода уравнения Книжника–Замолодчикова в случае центрального элемента

$$W = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} J^{\alpha_1} \dots J^{\alpha_n}$$

высшего порядка, мы сначала строим поле

$$W(z) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} d_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (J^{\alpha_1} (\dots J^{\alpha_n})) (z) = \sum_k W_k z^{-n-k}.$$

Ассоциативная алгебра, порожденная элементами $1, L_n, W_m$ называется *W-алгеброй Казимира* [3]. Затем мы фиксируем класс рассматриваемых полей и строим аналоги равенств (4), (5). Равенство (4) позволяет представить оператор W_{-1} , действующий на эти поля, как дифференциальный оператор. Чтобы его получить, мы используем операторное разложение произведения $W(z)$ на рассматриваемое поле $\varphi(w)$. Чтобы действие оператора W_{-1} на $\varphi(w)$ представлялось как действие дифференциального оператора, это разложение должно иметь вид

$$W(z)\varphi(w) = \text{const} \frac{\varphi(w)}{(z-w)^n} + \frac{\mathcal{D}\varphi(w)}{(z-w)^{n-1}} + \dots, \quad (6)$$

где $\mathcal{D}$ – дифференциальный оператор. В случае тензора энергии-импульса $T(z)$ второго порядка такое разложение постулируется тождеством Уорда, имеющим геометрическую природу.

Операторное разложение также можно получить алгебраически. Для этого мы вместо ВЗВ-примарных полей используем токи $J^{\alpha}(z)$. Формулы для операторных разложений и тензора $T(z)$, и тока $J^{\alpha}(w)$ при произвольном $\mathfrak{g}$ легко получаются из соотношений операторной алгебры, которые приведены, например, в книге [1]. Этот алгебраический подход мы применим для вычисления операторного разложения произведения поля $W(z)$, построенного по элементу Казимира высшего порядка, на рассматриваемое в работе поле $\varphi(w)$, сконструированное из токов. Случай высшего аналога тензора энергии-импульса, родственного элементу Казимира третьего порядка $Q = d_{\alpha, \beta, \gamma} J^{\alpha} J^{\beta} J^{\gamma}$, где $d_{\alpha, \beta, \gamma} \in \mathbb{C}$, для алгебры $\mathfrak{sl}_N$ рассмотрен в разделе 2, где показано, что в этом случае построить уравнения Книжника–Замолодчикова невозможно.

Операторное разложение произведения тока $J^{\alpha}(z)$ на поле

$$Q(w) = d_{\alpha, \beta, \gamma} (J^{\alpha} (J^{\beta} J^{\gamma})) (w)$$

записывается как

$$J^{\alpha}(z)Q(w) = \frac{\text{const}}{(z-w)^3} d_{\alpha, \beta, \gamma} (J^{\beta} J^{\gamma})(w).$$

Таким образом, это произведение непредставимо в виде (6) – при вычислении операторного разложения произведения на $J^{\alpha}(z)$ происходит “выбивание” множителя J^{α}

из нормально упорядоченного произведения $(J^\alpha(J^\beta J^\gamma))(w)$, и в результате получается $(J^\beta J^\gamma)(w)$.

Отсюда вытекает следующее естественное предположение. Чтобы получить операторное разложение вида (6), необходимо осуществить такое построение: берем центральный элемент высшего порядка в универсальной обертывающей алгебре, причем этот элемент должен иметь вид суммы квадратов $\sum_\alpha P^\alpha P^\alpha$, где P^α – некоторые элементы порядка больше 1 из универсальной обертывающей алгебры. Затем по элементам P^α строим поле $P^\alpha(z)$ и высший аналог тензора энергии-импульса, который имеет вид $W(w) = \sum_\alpha (P^\alpha P^\alpha)(w)$. Тогда разложение результата умножения поля $W(z)$ на $P^\alpha(w)$ должно иметь вид (6).

Наше предположение проверено в разделе 3. В качестве W рассмотрен элемент Капелли четвертого порядка, являющийся суммой квадратов некоммутативных пфаффианов, а в качестве поля P^α – некоммутативный пфафффиан. В этом случае мы построили аналог уравнения Книжника–Замолодчикова. Это уравнение, которому удовлетворяют корреляционные функции, рассмотренные в п. 3.1, явно выписано в разделе 4 и составляет основной результат настоящей работы.

Отметим, что имеется хорошо исследованная связь между уравнением Книжника–Замолодчикова и собственными функциями гамильтонианов Годена. Гамильтонианы Годена являются правыми частями уравнений Книжника–Замолодчикова. В то же время известны высшие гамильтонианы Годена, представляющие собой элементы Сугавары [12]. Как показано в работе [12], высшие гамильтонианы Годена коммутируют с гамильтонианами Годена, следовательно, имеют те же собственные функции. Всё это указывает на то, что высшие гамильтонианы могут, казалось бы, быть правыми частями некоторых высших аналогов уравнений Книжника–Замолодчикова. Однако получить такие уравнения оказывается невозможным, так как невозможно представить действие гамильтонианов Годена через дифференциальные операторы [13], [14].

2. ЭЛЕМЕНТ КАЗИМИРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

2.1. Тензор энергии-импульса третьего порядка. В $U(\mathfrak{sl}_N)$ имеется элемент Казимира третьего порядка (см. формулу (2))

$$Q = d_{\alpha,\beta,\gamma} J^\alpha J^\beta J^\gamma.$$

В работе [2] по этому тензору построено поле

$$Q(z) = A_N(\varkappa) d_{\alpha,\beta,\gamma} (J^\alpha(J^\beta J^\gamma))(z), \quad (7)$$

где

$$A_N(\varkappa) = \sqrt{\frac{N}{18(\varkappa + N)^2(N + 2\varkappa)(N^2 - 4)}}.$$

Благодаря тому что тензор $d_{\alpha,\beta,\gamma}$ бесследовый, т. е. свертка по любой паре индексов есть ноль, элемент $Q(z)$ не зависит от расстановки скобок в нормально упорядоченном произведении в правой части формулы (7) несмотря на неассоциативность этого произведения. Как и $T(z)$, элемент $Q(z)$ является элементом Сугавары для центрального расширения алгебры петель [15]. Покажем, что с этим элементом Сугавары невозможно связать уравнение типа Книжника–Замолодчикова.

2.2. Алгебра WA_2 и поля Q^α . Рассмотрим модель ВЗВ, связанную с серией $\mathfrak{sl}_N$. Поле $Q(z)$, будучи суммой нормально упорядоченных произведений трех токов, имеет конформную размерность 3, поэтому его разложение на моды записывается как

$$Q(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-3} Q_n.$$

Ассоциативная алгебра, порожденная элементами 1, L_n , Q_m , называется алгеброй WA_2 . Это обозначение объясняется тем, что для построения используется третий элемент Казимира для серии $\mathfrak{sl}_N$ (или, в обозначениях Картана, серии A_{N-1}), впервые возникающий для алгебры A_2 (см. [3] и ссылки в этой работе). Действие мод Q_n на поле $A(w)$ определяется равенством

$$Q(z)A(w) = \sum_n (z-w)^{-n-3} (Q_n A)(w). \quad (8)$$

Введем поле

$$Q^\alpha(z) = \frac{1}{2} d_{\alpha, \beta, \gamma} (J^\beta J^\gamma)(z).$$

В работе [2] показано, что для поля $Q^\alpha(z)$ справедливы операторные разложения

$$\begin{aligned} T(z)Q^\alpha(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} Q^\alpha(w) + \frac{1/2}{z-w} \partial Q^\alpha(w), \\ J^a(z)Q^b(w) &= \frac{(\kappa + N/2)}{(z-w)^2} d_{a,b,c} J^c(w) + \frac{1}{z-w} f_c^{a,b} Q^c(w), \end{aligned} \quad (9)$$

где $f_c^{a,b}$ – структурные константы алгебры A_N . Таким образом, поле $Q^\alpha(w)$ является вирасоро-примарным, но не является, вообще говоря, ВЗВ-примарным.

2.3. Операторные разложения. Как показано в работах [2], [3], в дополнение к (9) имеет место следующее операторное разложение:

$$J^a(z)Q(w) = \frac{\kappa + N}{(z-w)^2} Q^a(w). \quad (10)$$

Теперь найдем операторное разложение произведения $Q(z)Q^\gamma(w)$. Для свертки $\overbrace{Q(z)(J^\alpha J^\beta)(w)}$ имеем формулу

$$\begin{aligned} \overbrace{Q(z)(J^\alpha J^\beta)(w)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \left(\overbrace{Q(z)J^\alpha(x)} J^\beta(w) + J^\alpha(x) \overbrace{Q(z)J^\beta(w)} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \left(\frac{(\kappa + N)Q^\alpha(z)}{(z-x)^2} J^\beta(w) + J^\alpha(x) \frac{(\kappa + N)Q^\beta(z)}{(z-w)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{\kappa + N}{(z-x)^2} \left(\frac{(\kappa + N/2)d_{\alpha, \beta, c} J^c(z)}{(z-w)^2} + \frac{f_c^{\beta, \alpha} Q^c(z)}{z-w} \right) + \\ &\quad + \frac{\kappa + N}{(z-w)^2} \left(\frac{(\kappa + N/2)d_{\alpha, \beta, c} J^c(z)}{(x-z)^2} + \frac{f_c^{\beta, \alpha} Q^c(z)}{x-z} \right) = \\ &= (\kappa + N) \left(\frac{2(\kappa + N/2)d_{\alpha, \beta, c} J^c(z)}{(z-w)^4} + \frac{2f_c^{\beta, \alpha} Q^c(z)}{(z-w)^3} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \overbrace{Q(z)Q^\gamma(w)} &= \frac{1}{2}d_{\gamma,\alpha,\beta}(\varkappa + N) \left(\frac{2(\varkappa + N/2)d_{\alpha,\beta,c}J^c(z)}{(z-w)^4} + \frac{f_c^{\beta,\alpha}W^c(z)}{(z-w)^3} \right) = \\ &= (\varkappa + N) \left(\varkappa + \frac{N}{2} \right) \frac{2}{N} (N^2 - 4) \frac{J^\gamma(z)}{(z-w)^4}. \end{aligned} \quad (11)$$

2.4. Действие операторов Q_n на поля $J^a(z)$, $Q^a(z)$ и их производные. Из формулы (10) следует, что

$$Q(z)J^a(w) = \frac{\varkappa + N}{(z-w)^2}Q^a(z);$$

взяв производную по w , получаем

$$Q(z)\partial^r J^a(w) = (-1)^r \frac{(\varkappa + N) \frac{(r+2)!}{2}}{(z-w)^{2+r}} Q^a(z).$$

Отсюда выводим операторное разложение

$$\begin{aligned} Q(z)\partial^r J^a(w) &= (-1)^r (\varkappa + N) \frac{(r+2)!}{2} \times \\ &\times \left(\frac{Q^a(w)}{(z-w)^{2+r}} + \dots + \frac{\frac{1}{k!} \partial^k Q^a(w)}{(z-w)^{2+r-k}} + \frac{\frac{1}{(2+r-1)!} \partial^{2+r-1} Q^a(w)}{z-w} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая формулы (8) и (12), получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место формулы*

$$Q_n(\partial^r J^a(w)) = \begin{cases} 0, & \text{если } n > r-1, \\ (-1)^r (\varkappa + N) \frac{(r+2)!}{2} \frac{1}{(r-n-1)!} \partial^{r-n-1} Q^a(w), & \text{если } n \leq r-1. \end{cases}$$

Таким образом, под действием операторов Q_n поля $J^a(w)$ и их производные переходят в поля $Q^a(w)$ и их производные.

Из формулы (11) получаем, что

$$Q(z)\partial^r Q^\gamma(w) = (-1)^r (\varkappa + N) \left(\varkappa + \frac{N}{2} \right) \frac{2}{N} (N^2 - 4) \frac{J^\gamma(z)}{(z-w)^{4+r}}.$$

Отсюда имеем операторное разложение

$$\begin{aligned} Q(z)\partial^r Q^\gamma(w) &= (-1)^r (\varkappa + N) \left(\varkappa + \frac{N}{2} \right) \frac{2}{N} (N^2 - 4) \times \\ &\times \left(\frac{J^\gamma(w)}{(z-w)^{4+r}} + \dots + \frac{\frac{1}{k!} \partial^k J^\gamma(w)}{(z-w)^{4+r-k}} + \dots + \frac{\frac{1}{(4+r-1)!} \partial^{4+r-1} J^\gamma(w)}{z-w} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Сравнивая формулы (8) и (13), приходим к следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливы формулы*

$$Q_n \partial^r Q^a(w) = \begin{cases} Q^a(w), & \text{если } n \leq r+1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$Q^a(w) = (-1)^r (\kappa + N) \left(\kappa + \frac{N}{2} \right) \frac{2}{N} (N^2 - 4) \frac{1}{(r - n + 1)!} \partial^{r-n+1} J^a(w).$$

Под действием операторов Q_n поля $Q^a(w)$ и их производные переходят обратно в поля $J^a(w)$ и их производные.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Операторы Q_n не являются дифференциальными операторами на ВЗВ-примарных полях, однако дифференциальными являются композиции $Q_n Q_m$.*

Итак, мы явно показали, что не существует высшего аналога уравнения типа Книжника–Замолодчикова, связанного с алгеброй WA_2 .

3. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА, РОДСТВЕННЫЙ ЭЛЕМЕНТУ КАПЕЛЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Построим высший аналог уравнения Книжника–Замолодчикова, используя элемент C_4 .

3.1. Корреляционные функции. Изменим тип рассматриваемых корреляционных функций. Для того чтобы определить, какие корреляционные функции рассматриваются, введем поле, связанное с пфаффианом:

$$\text{Pf}(F_I)(z) = \frac{1}{k! 2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} (-1)^\sigma (F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} (F_{\sigma(i_3)\sigma(i_4)} (F_{\sigma(i_5)\sigma(i_6)} \dots F_{\sigma(i_{2k-1})\sigma(i_{2k})})) \dots)(z).$$

Для множества индексов $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subset \{1, \dots, N\}$ рассмотрим поле $\varphi(z) = \text{Pf}(F_I)(z)$. Это поле уже не является ВЗВ-примарным даже при $\kappa = 0$. Введем корреляционную функцию вида

$$\langle \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle, \quad (14)$$

где $\varphi_k(z_k)$ – ВЗВ-примарные поля. Ниже мы получим уравнение именно на эту корреляционную функцию.

3.2. Поле $C_4(z)$, связанное с элементом Капелли четвертого порядка. Алгебра WB_2 . Введем следующее поле:

$$C_n(z) = \sum_{|I|=n} (\text{Pf}(F_I) \text{Pf}(F_I))(z).$$

Обозначим через WB_2 ассоциативную алгебру, порожденную элементами $1, L_n, C_4^k$. Это обозначение объясняется так же, как и обозначение WA_2 : в процессе построения используется элемент Капелли четвертого порядка, впервые появляющийся для алгебры B_2 .

Для произвольного поля $\varphi(w)$ имеем

$$C_4(z)\varphi(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (C_4^k \varphi)(w)(z-w)^{-k-4}.$$

Рассмотрим действие оператора C_4^{-1} на $\text{Pf } F_I(z_1)$. С одной стороны, представим это действие в виде дифференциального оператора, точнее, покажем, что

$$C_4^{-1} \text{Pf}(F_I)(z_1) = \text{const} \cdot \partial \text{Pf}(F_I)(z_1).$$

С другой стороны, покажем, что корреляционная функция

$$\langle C_4^{-1} \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle$$

алгебраически выражается через корреляционные функции вида (3) и (14). Приравнявая эти два выражения, получим высший аналог уравнения типа Книжника–Замолотчикова.

3.3. Представление элемента C_4^{-1} в виде дифференциального оператора. В этом пункте мы вычислим два старших члена операторного разложения произведения $C_4(z) \text{Pf}(F_J)(w)$. Прежде всего вычислим свертку $\overbrace{\text{Pf}(F_J)(z) \text{Pf}(F_I)(x)}$. Пусть $\{J^\alpha\}_{\alpha \in A}$ – ортонормированный относительно формы Киллинга базис простой алгебры Ли. Пусть $f_\gamma^{\alpha, \beta}$ – структурные константы этой алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеет место следующее равенство:*

$$\begin{aligned} \overbrace{J^\alpha(z)(J^\beta J^\gamma)(w)} &= \frac{\varkappa \delta_{\alpha, \beta} J^\gamma(w)}{(z-w)^2} + \frac{\varkappa \delta_{\alpha, \gamma} J^\beta(w)}{(z-w)^2} + \frac{f_\gamma^{\alpha, \beta} \varkappa}{(z-w)^3} + \\ &+ \frac{f_c^{a, \beta} f_d^{c, \gamma} J^d(w)}{(z-w)^2} + \frac{f_c^{a, \beta} (J^c J^\gamma)(w)}{z-w} + \frac{f_c^{a, \gamma} (J^\beta J^c)(w)}{z-w}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для $\mathfrak{o}_N$ формула (15) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \overbrace{F_{j_1, j_2}(z)(F_{i_1, i_2} F_{i_3, i_4})(w)} &= \frac{\varkappa \delta_{(j_1, j_2), (i_1, i_2)} F_{i_3, i_4}}{(z-w)^2} + \frac{\varkappa \delta_{(j_1, j_2), (i_3, i_4)} F_{i_1, i_2}}{(z-w)^2} + \\ &+ \frac{F_{F_{i_1, i_2} F_{i_3, i_4} \{j_1, j_2\}}(w)}{(z-w)^2} + \frac{F_{F_{j_1, j_2} \{i_1, i_2\}} F_{i_3, i_4}(w)}{(z-w)^2} + \frac{F_{i_1, i_2} F_{F_{j_1, j_2} \{i_3, i_4\}}}{z-w}. \end{aligned}$$

Найдем свертки $\overbrace{F_{j_1, j_2}(z)(\text{Pf}(F_I))(w)}$ в случае $|I| = 4$:

$$\begin{aligned} \overbrace{F_{j_1, j_2}(z)(\text{Pf}(F_I))(w)} &= \frac{\varkappa (-1)^{(\{j_1, j_2\}, I \setminus \{j_1, j_2\})} F_{I \setminus \{j_1, j_2\}}(w)}{(z-w)^2} + \\ &+ \frac{F_{\text{Pf}(F_I \{j_1, j_2\})}(w)}{(z-w)^2} + \frac{(\text{Pf}(F_{F_{j_1, j_2} I}))(w)}{z-w}. \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$\overbrace{F_{j_1, j_2}(z)(\text{Pf}(F_I))(w)} = \frac{(\varkappa + 2)F_{\text{Pf}(F_I\{j_1, j_2\})}(w)}{(z - w)^2} + \frac{(\text{Pf}(F_{F_{j_1, j_2}I}))(w)}{z - w}. \quad (16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $|I| = |J| = 4$ имеем

$$\begin{aligned} & \overbrace{\text{Pf}(F_J)(z)\text{Pf}(F_I)(x)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{I=I_1 \sqcup I_2, \\ |I_1|=|I_2|=2}} (-1)^{(I_1, I_2)} \left(\frac{2(\varkappa + 2)\varkappa \text{Pf}(F_{J \setminus I_1 I_2})(z)}{(z - x)^4} - \frac{2(\varkappa + 2) \text{Pf}(F_{F_{I_2}(J \setminus I_1)})(z)}{(z - x)^3} + \right. \\ &+ \frac{(\varkappa + 2)(F_{I_2} \text{Pf}(F_{J \setminus I_1}))(z)}{(z - x)^2} - \frac{(\varkappa + 2)(F_{I_2} \text{Pf}(F_{J \setminus I_1}))_1(z)}{z - x} - \frac{(F_{I_2} \text{Pf}(F_{F_{I_1}J}))(z)}{z - x} + \\ &+ \left. \frac{(\varkappa + 2)(F_{I_1} \text{Pf}(F_{J \setminus I_2}))(z)}{(z - x)^2} + \frac{(\varkappa + 2)(F_{I_1} \text{Pf}(F_{J \setminus I_2}))_1(z)}{z - x} - \frac{(F_{I_1} \text{Pf}(F_{F_{I_2}J}))(z)}{z - x} \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для пфаффиана четвертого порядка имеет место следующая формула, являющаяся частным случаем формулы суммирования миноров [7]:

$$\text{Pf}(F_I) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{I=I_1 \sqcup I_2, \\ |I_1|=|I_2|=2}} (-1)^{(I_1, I_2)} F_{I_1} F_{I_2}.$$

Используя ее, получаем

$$\begin{aligned} & \overbrace{\text{Pf}(F_J)(z)\text{Pf}(F_I)(x)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{I=I_1 \sqcup I_2, \\ |I_1|=|I_2|=2}} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \times \\ & \times \oint \frac{dx_1}{x_1 - x} \left(\overbrace{\text{Pf}(F_J)(z)F_{I_1}(x_1)} F_{I_2}(x) + F_{I_1}(x_1) \overbrace{\text{Pf}(F_J)(z)F_{I_2}(x)} \right). \end{aligned}$$

Подставим в это выражение формулу (16) для свертки пфаффиана и тока. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\substack{I=I_1 \sqcup I_2, \\ |I_1|=|I_2|=2}} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx_1}{x_1 - x} \left\{ \left(\frac{(\varkappa + 2) \text{Pf}(F_{J \setminus I_1})(z)}{(z - x_1)^2} - \frac{\text{Pf}(F_{F_{I_1}J})(z)}{(z - x_1)} \right) F_{I_2}(x) + \right. \\ &+ \left. F_{I_1}(x_1) \left(\frac{(\varkappa + 2) \text{Pf}(F_{J \setminus I_2})(z)}{(z - x)^2} - \frac{\text{Pf}(F_{F_{I_2}J})(z)}{z - x} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{I=I_1 \sqcup I_2, \\ |I_1|=|I_2|=2}} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx_1}{x - x_1} \left(\frac{(\varkappa + 2) \text{Pf}(F_{J \setminus I_1})(z)F_{I_2}(x)}{(z - x_1)^2} - \right. \\ &- \frac{\text{Pf}(F_{F_{I_1}J})(z)F_{I_2}(x)}{z - x_1} + \frac{(\varkappa + 2)F_{I_1}(x_1) \text{Pf}(F_{J \setminus I_2})(z)}{(z - x)^2} - \frac{F_{I_1}(x_1) \text{Pf}(F_{F_{I_2}J})(z)}{z - x} \left. \right). \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, применяя еще раз правило (16) и приводя подобные слагаемые, приходим к выражению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\substack{I=I_1 \sqcup I_2, \\ |I_1|=|I_2|=2}} (-1)^{(I_1, I_2)} & \left(\frac{2(\varkappa+2)\varkappa \operatorname{Pf}(F_{J \setminus I_1 I_2})(z)}{(z-x)^4} - \frac{2(\varkappa+2) \operatorname{Pf}(F_{F_{I_2}(J \setminus I_1)})(z)}{(z-x)^3} + \right. \\ & + \frac{(\varkappa+2)(F_{I_2} \operatorname{Pf}(F_{J \setminus I_1}))(z)}{(z-x)^2} - \frac{(\varkappa+2)(F_{I_2} \operatorname{Pf}(F_{J \setminus I_1}))_1(z)}{z-x} - \frac{(F_{I_2} \operatorname{Pf}(F_{F_{I_1} J}))(z)}{z-x} + \\ & \left. + \frac{(\varkappa+2)(F_{I_1} \operatorname{Pf}(F_{J \setminus I_2}))(z)}{(z-x)^2} + \frac{(\varkappa+2)(F_{I_1} \operatorname{Pf}(F_{J \setminus I_2}))_1(z)}{z-x} - \frac{(F_{I_1} \operatorname{Pf}(F_{F_{I_2} J}))(z)}{z-x} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Предложение доказано.

Имеет место следующая теорема

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо разложение*

$$\begin{aligned} \overbrace{\operatorname{Pf}(F_J)(z) C_4(w)} &= \\ &= (6(\varkappa+2)\varkappa + 12(N-4) - (\varkappa+2)((N-2)(N-3)(N-4) + 6)) \frac{\operatorname{Pf}(F_J)(w)}{(z-w)^4} + \\ &+ (12(N-4) - (\varkappa+2)((N-2)(N-3)(N-4) + 6)) \frac{\partial \operatorname{Pf}(F_J)(w)}{(z-w)^3} + \text{l. o. t.}, \end{aligned} \quad (18)$$

где l. o. t. обозначает члены более низких порядков²⁾.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \overbrace{\operatorname{Pf}(F_J)(z) (\operatorname{Pf}(F_I) \operatorname{Pf}(F_I))}(w) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \left(\overbrace{\operatorname{Pf}(F_J)(z) \operatorname{Pf}(F_I)(x)} \operatorname{Pf}(F_I)(w) + \operatorname{Pf}(F_I)(x) \overbrace{\operatorname{Pf}(F_J)(z) \operatorname{Pf}(F_I)(w)} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подынтегральное выражение состоит из двух слагаемых. Покажем, что они равны друг другу, так что правую часть выражения (19) можно записать как

$$2 \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \overbrace{\operatorname{Pf}(F_J)(z) \operatorname{Pf}(F_I)(x)} \operatorname{Pf}(F_I)(w). \quad (20)$$

Действительно, положим $a(z) = \operatorname{Pf}(F_J)(z)$, $b(x) = \operatorname{Pf}(F_I)(x)$, $c(w) = \operatorname{Pf}(F_I)(w)$. Предложение 4 дает представление

$$a(z)b(w) = \sum_m (ab)_m(z)(z-w)^m.$$

Тогда правая часть равенства (19) представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \left(\overbrace{a(z)b(x)} c(w) + c(x) \overbrace{a(z)b(w)} \right) &= \\ &= \sum_m (ab)_m(z) c(w) (z-w)^m + c(w) (ab)_m(z-w)^m. \end{aligned}$$

²⁾Мы говорим, что $(z-w)^{-k}$ имеет порядок ниже, чем $(z-w)^{-r}$, если $k < r$.

Однако $(ab)_m(z)c(w)(z-w)^m = c(w)(ab)_m(z)(z-w)^m$, поэтому слагаемые в правой части (19) равны.

Исследуем теперь выражение (20). Докажем, что после вычисления операторного разложения, стоящего в числителе, не возникает членов порядка выше четырех, член четвертого порядка пропорционален $\text{Pf}(F_J)(w)(z-w)^{-4}$, а член третьего порядка пропорционален $\partial \text{Pf}(F_J)(w)(z-w)^{-3}$. Для доказательства подставим выражение (17) в (20) и рассмотрим члены по отдельности. Таким образом, необходимо исследовать следующие выражения, где суммирование по $I = I_1 \sqcup I_2$ ведется по всевозможным подмножествам I , состоящим из четырех элементов, и по всем разбиениям множества I на два двухэлементных подмножества³⁾:

$$\begin{aligned} & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{\text{Pf}(F_{J \setminus I_1 I_2})(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-x)^4}, \\ & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{\text{Pf}(F_{F_{I_2}(J \setminus I_1)})(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-x)^3}, \\ & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{(F_{I_2} \text{Pf}(F_{J \setminus I_1}))(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-x)^2}, \\ & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{(F_{I_2} \text{Pf}(F_{J \setminus I_1}))_1(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{z-x}, \\ & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{(F_{I_1} \text{Pf}(F_{F_{I_2} J}))(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{z-x}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Для приведенных выше выражений имеют место следующие утверждения:

$$\begin{aligned} & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{(\varkappa+2)\varkappa \text{Pf}(F_{J \setminus I_1 I_2})(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-x)^4} = \\ & = \frac{6(\varkappa+2)\varkappa \text{Pf}(F_J)(w)}{(z-w)^4}, \\ & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{\text{Pf}(F_{F_{I_2}(J \setminus I_1)})(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-x)^3} = \\ & = (N-4) \left(\frac{12 \text{Pf}(F_J)(w)}{(z-w)^3} + \frac{12 \partial \text{Pf}(F_J)(w)}{(z-w)^3} + \text{l. o. t.} \right). \end{aligned}$$

В следующих выражениях членов порядка выше второго не возникает:

$$\begin{aligned} & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{(F_{I_2} \text{Pf}(F_{J \setminus I_1}))(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-x)^2}, \\ & \sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{(F_{I_2} \text{Pf}(F_{J \setminus I_1}))_1(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-x)^2}, \end{aligned}$$

³⁾Всюду далее мы будем придерживаться этих соглашений.

$$\sum_{I=I_1 \sqcup I_2} (-1)^{(I_1, I_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x-w} \frac{(F_{I_1} \text{Pf}(F_{F_{I_2} J}))(z) \text{Pf}(F_I)(w)}{z-x} =$$

$$= -(\varkappa + 2)((N-2)(N-3)(N-4) + 6) \left(\frac{\text{Pf}(F_I)(w)}{(z-w)^4} + \frac{\partial \text{Pf}(F_I)(w)}{(z-w)^3} + \text{l. o. t.} \right).$$

Непосредственные вычисления, доказывающие эту лемму, опущены (см. версию настоящей статьи в электронном архиве [16]).

Собирая вместе результаты, получаем формулу (18). Теорема доказана.

Переставляя поля, получаем операторное разложение

$$\overbrace{C_4(z) \text{Pf}(F_J)(w)} =$$

$$= (6(\varkappa + 2)\varkappa + 12(N-4) - (\varkappa + 2)((N-2)(N-3)(N-4) + 6)) \frac{\text{Pf } F_J(w)}{(z-w)^4} +$$

$$+ 6(\varkappa + 2)\varkappa \frac{\partial \text{Pf}(F_J)(w)}{(z-w)^3} + \text{l. o. t.}$$

Таким образом, мы имеем следствие

$$C_4^{-1} \text{Pf}(F_J)(w) = 6(\varkappa + 2)\varkappa \partial \text{Pf}(F_J)(w). \quad (21)$$

3.4. Представление элемента C_4^{-1} через алгебраический оператор. В настоящем пункте мы строим алгебраический оператор $\mathcal{A}$, с помощью которого корреляционная функция $\langle C_4^{-1} \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle$ выражается через корреляционные функции вида (3) и (14).

Рассмотрим поле $PfF_I(z)$. Для него имеет место операторное разложение

$$\overbrace{F_J(z) \text{Pf}(F_I)(w)} = \sum_m (F_J^k Pf(F_I))(w) (z-w)^{-m-1} =$$

$$= \frac{(\varkappa + 2) \text{Pf}(F_{I \setminus J})(w)}{(z-w)^2} + \frac{\text{Pf}(F_{F_J I})(w)}{z-w}.$$

Сопоставляя две части равенства, получаем

$$F_J^n \text{Pf}(F_I)(w) = 0 \quad \text{при } n > 1,$$

$$F_J^1 \text{Pf}(F_I)(w) = (\varkappa + 2) \text{Pf}(F_{I \setminus J})(w),$$

$$F_J^0 \text{Pf}(F_I)(w) = \text{Pf}(F_{F_J I})(w). \quad (22)$$

Воспользуемся тем, что

$$(AB)_m = \sum_{n \leq h_A} A_n B_{m-n} + \sum_{n > h_A} B_{m-n} A_n.$$

Тогда имеем

$$C_4^{-1} = (\text{Pf}(F_J))_2 (\text{Pf}(F_J))_{-3} + (\text{Pf}(F_J))_1 (\text{Pf}(F_J))_{-2} + \dots +$$

$$+ (\text{Pf}(F_J))_{-4} (\text{Pf}(F_J))_3 + (\text{Pf}(F_J))_{-5} (\text{Pf}(F_J))_4 + \dots,$$

где

$$(\text{Pf}(F_J))_m = \frac{1}{2} \sum_{J=J_1 \sqcup J_2} (-1)^{(J_1, J_2)} F_{J_1}^1 F_{J_2}^{m-1} + F_{J_1}^0 F_{J_2}^m + \dots + F_{J_2}^{m-2} F_{J_2}^2 + F_{J_2}^{m-3} F_{J_1}^3 + \dots.$$

Отсюда получаем, что

$$(\text{Pf}(F_J))_m P f(F_I) = 0 \quad \text{при} \quad m > 2. \quad (23)$$

Таким образом, с учетом (22), (23) получаем, что

$$\begin{aligned} C_4^{-1} \text{Pf}(F_I)(w) &= \\ &= \frac{1}{4} \sum_{J=J_1 \sqcup J_2} \sum_{J=J'_1 \sqcup J'_2} \sum_{k, l, p, q} (-1)^{(J_1, J_2)} (-1)^{(J'_1, J'_2)} F_{J_1}^k F_{J_2}^l F_{J'_1}^p F_{J'_2}^q P f(F_I)(w), \end{aligned} \quad (24)$$

где допустимы следующие наборы (k, l, p, q) :

$$(0, 1, -1, -1), \quad (0, 1, 0, -2), \quad (0, 0, 0, -1),$$

а также всевозможные наборы, получающиеся перестановками индексов J_1 и J_2 или J'_1 и J'_2 .

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \langle C_4^{-1} \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle &= \\ &= \mathcal{A}(\langle \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle, \langle \varphi(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle), \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}$ – алгебраический оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (24). Покажем, что соответствующее каждому набору (k, l, p, q) слагаемое представляется как результат действия алгебраического оператора на указанные корреляционные функции. Выпишем для этого в явном виде формулы действия операторов F_J^{-2} , F_J^{-1} , F_J^0 и F_J^1 .

Начнем с самого простого. Очевидно, имеем

$$\langle F_J^0 \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle = F_J^{(1)} \langle \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle,$$

где $F_J^{(k)}$ обозначает оператор F_J , действующий на k -ю тензорную компоненту значения корреляционной функции (см. п. 3.1).

Стандартные вычисления в рамках ВЗВ-модели приводят к формуле

$$\langle F_J^{-1} \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle = - \sum_{j \geq 2} \frac{F_J^{(j)}}{z_1 - z_j} \langle \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle.$$

Аналогично получаем, что

$$\langle F_J^{-2} \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle = - \sum_{j \geq 2} \frac{F_J^{(j)}}{(z_1 - z_j)^2} \langle \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle.$$

Наконец, согласно (22) имеем

$$\langle F_J^1 \text{Pf}(F_I)(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle = (\varkappa + 2) \langle \text{Pf}(F_{I \setminus J})(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle.$$

Отметим, что поле $\text{Pf}(F_{I \setminus J})(z_1) = F_{I \setminus J}(z_1)$ уже является примарным.

4. ВЫСШЕЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

Объединяя результаты следствия (21) и теоремы 3, получаем следующее уравнение, где суммирование по I идет по всевозможным четырехэлементным подмножествам $I \subset \{1, \dots, N\}$, а суммирование по $I = I_1 \sqcup I_2$, $I' = I'_1 \sqcup I'_2$ – по всевозможным разбиениям $I = I_1 \sqcup I_2$, $I' = I'_1 \sqcup I'_2$ множества I на два двухэлементных подмножества; оператор $F_I^{(k)}$ есть оператор F_I , действующий на k -ю тензорную компоненту значения корреляционной функции:

$$\begin{aligned}
 6(\varkappa + 2)\varkappa \partial_{z_1} \langle \text{Pf}(F_J)(z_1)\varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle &= \frac{1}{4} \sum_I \sum_{\substack{I=I_1 \sqcup I_2, \\ I'=I'_1 \sqcup I'_2}} (-1)^{(I_1, I_2)} (-1)^{(I'_1, I'_2)} \times \\
 &\times 2 \sum_{j \geq 2} \frac{F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(j)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(1)}}{z_1 - z_j} \langle \text{Pf}(F_J)(z_1)\varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle + \\
 &+ (\varkappa + 2) \left(8 \sum_{\substack{i \leq j, \\ j \geq 2}} \frac{F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(i)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_2}^{(i)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_2}^{(i)} F_{I'_1}^{(j)} F_{I'_2}^{(1)}}{(z_i - z_1)(z_j - z_1)} - \right. \\
 &- 4 \sum_{j \geq 2} \frac{F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_2}^{(j)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(1)}}{(z_j - z_1)^2} \Big) \langle \text{Pf}(F_{J \setminus I_1})(z_1)\varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle + \\
 &+ (\varkappa + 2) \left(8 \sum_{\substack{i \leq j, \\ j \geq 2}} \frac{F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(i)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_1}^{(i)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_1}^{(i)} F_{I_2}^{(j)} F_{I'_2}^{(1)}}{(z_i - z_1)(z_j - z_1)} - \right. \\
 &- 4 \sum_{j \geq 2} \frac{F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_1}^{(j)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_2}^{(1)}}{(z_j - z_1)^2} \Big) \langle \text{Pf}(F_{J \setminus I'_1})(z_1)\varphi_2(z_2) \dots \varphi_r(z_r) \rangle.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ и $I'_1 \cap I'_2 = \emptyset$, имеем $[F_{I_1}^{(k)}, F_{I_2}^{(l)}] = [F_{I'_1}^{(k)}, F_{I'_2}^{(l)}] = 0$, и, таким образом, сумму, отвечающую набору индексов $(0, 0, 0, -1)$ и их перестановкам, можно записать так:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 2} (F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(j)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(1)} + F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(j)} F_{I'_2}^{(1)} + F_{I_1}^{(j)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(1)}) = \\
 = 2 \sum_{j \geq 2} (F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(1)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(j)} + F_{I_1}^{(1)} F_{I_2}^{(j)} F_{I'_1}^{(1)} F_{I'_2}^{(1)}).
 \end{aligned}$$

Аналогично, упрощая суммы по наборам индексов $(0, 1, 0, -2)$ и $(0, 1, -1, -1)$, получаем уравнение (25).

Благодарности. Работа Д. В. Артамонова поддержана Программой поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант МК-4594.2013.1).

Список литературы

- [1] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, New York, 1997.
- [2] F. A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens, *Nucl. Phys. B*, **304** (1988), 348–370.
- [3] P. Bouwknegt, K. Schoutens, *Phys. Rep.*, **223**:4 (1993), 183–276, [arXiv: hep-th/9210010](#).
- [4] A. I. Molev, M. N. Nazarov, *Math. Ann.*, **313**:2 (1999), 315–357.
- [5] M. Itoh, T. Umeda, *Compositio Math.*, **127**:3 (2001), 333–359.
- [6] M. Itoh, *J. Lie Theory*, **10**:2 (2000), 463–489.
- [7] Д. В. Артамонов, В. А. Голубева, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 5–34.
- [8] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247**:1 (1984), 83–103.
- [9] J. A. Fuchs, *Affine Lie algebras and Quantum Groups. An Introduction with Application in Conformal Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [10] P. Etingof, I. B. Frenkel, A. A. Kirillov, Jr., *Lectures on Representation Theory and Knizhnik–Zamolodchikov Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, **58**, AMS, Providence, RI, 1998.
- [11] В. Г. Дринфельд, *Алгебра и анализ*, **2**:4 (1990), 149–181.
- [12] B. L. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, *Commun. Math. Phys.*, **166**:1 (1994), 27–62, [arXiv: hep-th/9402022](#).
- [13] G. M. T. Watts, “*W*-algebras and their representations”, *Conformal Field Theories and Integrable Models* (Budapest, Hungary, August 13–18, 1996), Lecture Notes in Physics, **498**, eds. Z. Horvath, L. Palla, Springer, Berlin, 1997, 55–84.
- [14] S. Ribault, *JHEP*, **10** (2009), 002, 29 pp., [arXiv: 0811.4587](#).
- [15] A. Chervov, L. Rybnikov, D. Talalaev, *Rational Lax operators and their quantization*, [arXiv: hep-th/0404106](#).
- [16] D. V. Artamonov, V. A. Golubeva, *W-algebras and higher analogs of the Knizhnik–Zamolodchikov equations*, [arXiv: 1401.4960](#).

Поступила в редакцию 20.01.2014,
после доработки 28.09.2014