Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Лавров, О. В. Радченко, И. В. Тютин, О тождествах типа Якоби в алгебрах и супералгебрах, *ТМФ*, 2014, том 179, номер 2, 196–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 12:55:56

© 2014 г. П. М. Лавров^{*†}, О. В. Радченко^{*†}, И. В. Тютин[‡]

О ТОЖДЕСТВАХ ТИПА ЯКОБИ В АЛГЕБРАХ И СУПЕРАЛГЕБРАХ

Вводятся два замечательных тождества для любых трех элементов произвольных ассоциативных алгебр, записываемых в терминах одинарных коммутаторов и антикоммутаторов. Одно из этих тождеств является следствием другого (фундаментального). Из фундаментального тождества выводится набор четырех тождеств (одно из которых есть тождество Якоби), представленных через двойные коммутаторы и антикоммутаторы. Устанавливается, что два из четырех тождеств являются независимыми. Показано, что если в алгебре выполняется фундаментальное тождество, тогда умножение является ассоциативным. Найдено обобщение полученных результатов на суперслучай. Приведено обобщение фундаментального тождества для случая произвольного числа элементов. Обсуждаются аналоги фундаментального тождества для невырожденных четных симплектических (супер)многообразий.

Ключевые слова: ассоциативные алгебры и супералгебры, тождество Якоби, симплектические супермногообразия.

DOI: 10.4213/tmf8645

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в формулировках классических и квантовых теорий широко используются алгебры, снабженные скобкой, удовлетворяющей тождеству Якоби. Так, формулировки классической механики и классической теории поля основаны на использовании симплектических многообразий, оснащенных скобкой Пуассона, удовлетворяющей тождеству Якоби [1], [2]. Одним из основных инструментов в последовательной формулировке квантовой механики является коммутатор операторов, удовлетворяющий тождеству Якоби. Основным объектом общей теории относительности является тензор Римана, который удовлетворяет, в частности,

^{*}Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия.
E-mail: lavrov@tspu.edu.ru, radchenko@tspu.edu.ru

[†]Томский государственный университет, Томск, Россия

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: tyutin@lpi.ru

тождеству Бьянки, следующему из тождества Якоби для ковариантных производных. Квантование динамических систем со связями в гамильтоновом формализме [3]–[6] предполагает использование четных симплектических супермногообразий [7], [8], оснащенных суперрасширением коммутатора и скобкой Пуассона, удовлетворяющей обобщенному тождеству Якоби. Квантовая теория калибровочных полей в лагранжевом формализме строится с помощью нечетных симплектических супермногообразий, оснащенных антискобкой [9], которая удовлетворяет обобщенному тождеству Якоби. Список таких примеров может быть продолжен.

В настоящей работе тождества Якоби, естественным образом существующие для любой ассоциативной алгебры, рассматриваются с новой точки зрения (в нашем понимании). Для этого используется замечательное тождество для трех произвольных элементов заданной ассоциативной алгебры, представленное с помощью только одинарных коммутаторов. Из этого тождества следует тождество Якоби, которое, как известно, записывается в терминах двойных коммутаторов. Используя антикоммутатор, мы вводим второе (фундаментальное) тождество для произвольных ассоциативных алгебр, которое записывается для трех элементов алгебры в терминах одинарных коммутаторов и антикоммутаторов. Мы показываем, что первое тождество является следствием второго. Это позволяет нам говорить, что второе тождество следует рассматривать как основное или фундаментальное для любой ассоциативной алгебры. Из фундаментального тождества можно вывести четыре тождества (одно из которых тождество Якоби) в терминах двойных коммутаторов и антикоммутаторов. Среди этих четырех тождеств независимыми оказываются два. Мы доказываем, что в любой алгебре, в которой выполняется основное тождество, операция умножения является ассоциативной. Осуществляется также обобщение основных соотношений и утверждений на случай супералгебр.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 для произвольных ассоциативных алгебр мы вводим фундаментальное тождество, записанное в терминах одинарных коммутаторов и антикоммутаторов, и получаем набор четырех (приводимых) тождеств в терминах двойных коммутаторов и антикоммутаторов. Мы показываем, что любая алгебра, оснащенная основным тождеством, является ассоциативной алгеброй. В разделе 3 мы обобщаем полученные в предыдущем разделе результаты на суперслучай. В разделе 4 исследуется интересное тождество, существующее для невырожденных симплектических (супер)многообразий. В разделе 5 приводится обобщение фундаментального тождества, обсуждаемого в разделе 2, на случай наличия в нем произвольного числа элементов. И, наконец, в разделе 6 мы даем заключительные замечания.

2. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА В АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Рассмотрим произвольную ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ с элементами $X \in \mathcal{A}$. Пусть элементы $T_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, образуют базис в алгебре $\mathcal{A}$ так, что любой элемент X из $\mathcal{A}$ можно представить в виде $X = x^i T_i$. Поскольку $T_i T_j \in \mathcal{A}$, то

$$T_i T_j = F_{ij}^k T_k, \quad (2.1)$$

где F_{ij}^k являются структурными константами алгебры. В терминах F_{ij}^k условие ассоциативности

$$(XY)Z = X(YZ) \quad (2.2)$$

записывается в виде

$$F_{ij}^n F_{nk}^m = F_{jk}^n F_{in}^m. \quad (2.3)$$

Эти константы единственным образом можно представить в виде суммы симметричных и антисимметричных слагаемых

$$F_{ij}^k = \frac{1}{2}c_{ij}^k + \frac{1}{2}f_{ij}^k,$$

где c_{ij}^k и f_{ij}^k обладают следующими свойствами симметрии:

$$c_{ij}^k = c_{ji}^k, \quad f_{ij}^k = -f_{ji}^k. \quad (2.4)$$

Коммутатор $[\cdot, \cdot]$ и антикоммутатор $\{\cdot, \cdot\}$ в данной алгебре определены для любых двух элементов $X, Y \in \mathcal{A}$ соотношениями

$$[X, Y] = XY - YX, \quad \{X, Y\} = XY + YX \quad (2.5)$$

и сами являются элементами алгебры $\mathcal{A}$.

Из (2.5) получаем следующие правила Лейбница для коммутатора и антикоммутатора:

$$[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z], \quad \{X, YZ\} = \{X, Y\}Z - Y[X, Z]. \quad (2.6)$$

Очевидно, что

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k, \quad \{T_i, T_j\} = c_{ij}^k T_k. \quad (2.7)$$

Для любой ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ и для любых элементов $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ (при этом без каких-либо предположений о базисе) существуют следующие замечательные тождества, записываемые с помощью одинарных коммутаторов и антикоммутаторов:

$$[X, YZ] + [Z, XY] + [Y, ZX] \equiv 0, \quad (2.8)$$

$$[X, YZ] + \{Y, ZX\} - \{Z, XY\} \equiv 0. \quad (2.9)$$

Из этих тождеств можно получить набор тождеств в терминах двойных коммутаторов и антикоммутаторов. В частности, тождество Якоби

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] \equiv 0 \quad (2.10)$$

является следствием (2.8). Более того, из (2.8) можно получить тождество, содержащее антикоммутатор:

$$[X, \{Y, Z\}] + [Z, \{X, Y\}] + [Y, \{Z, X\}] \equiv 0. \quad (2.11)$$

Аналогично из (2.9) получаются следующие тождества:

$$[X, \{Y, Z\}] - \{Z, [X, Y]\} + \{Y, [Z, X]\} \equiv 0, \quad (2.12)$$

$$[X, [Y, Z]] + \{Y, \{Z, X\}\} - \{Z, \{X, Y\}\} \equiv 0. \quad (2.13)$$

Заметим, что тождества (2.8) и (2.9) не являются независимыми, так как суммирование в (2.9) по циклическим перестановкам дает тождество (2.8). Таким образом, мы имеем основание рассматривать тождество (2.9) как фундаментальное тождество в ассоциативных алгебрах, так как соотношения (2.8), (2.10)–(2.13) могут быть получены из него. В свою очередь, набор тождеств (2.10)–(2.13) также не является независимым. Действительно, суммирование (2.12) по циклическим перестановкам дает тождество (2.11). Применение такой же операции к тождеству (2.13) приводит к тождеству Якоби (2.10) [10]. Заметим, что для ассоциативных алгебр тождества (2.12), (2.13) уже обсуждались в работе [11]. Очевидно, что, имея (2.12) и (2.13) и явную реализацию коммутатора и антикоммутатора (2.5), можно воспроизвести фундаментальное тождество (2.9).

Следует заметить, что из условия ассоциативности (2.3) можно получить аналоги тождеств (2.8)–(2.13) в терминах структурных констант. В частности, тождества Якоби для антисимметричных частей структурных констант f_{ij}^k имеют вид

$$f_{ij}^m f_{mk}^n + f_{ki}^m f_{mj}^n + f_{jk}^m f_{mi}^n \equiv 0. \quad (2.14)$$

Тождества, содержащие симметричные и антисимметричные части структурных констант, могут быть записаны как

$$\begin{aligned} c_{ij}^m f_{mk}^n + c_{ki}^m f_{mj}^n + c_{jk}^m f_{mi}^n &\equiv 0, \\ f_{ij}^m c_{mk}^n - f_{ki}^m c_{mj}^n + c_{jk}^m f_{mi}^n &\equiv 0, \\ c_{ij}^m c_{mk}^n - c_{ki}^m c_{mj}^n + f_{jk}^m f_{mi}^n &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Существование фундаментального тождества (2.9) позволяет нам обсудить свойство ассоциативности операции умножения в алгебре с новой точки зрения. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, тогда можно ввести коммутатор и антикоммутатор по правилам (2.5) как элементы $\mathcal{A}$. Предположим, что выполняется основное тождество (2.9). Мы знаем, что тождества (2.11)–(2.13) следуют из (2.9). Тогда можно показать, что произведение в алгебре $\mathcal{A}$ ассоциативно. Для этого умножение любых двух элементов $X, Y \in \mathcal{A}$ представим в виде

$$XY = \frac{1}{2}([X, Y] + \{X, Y\}) \quad (2.16)$$

и убедимся, что равенство (2.2) выполняется. Действительно, из (2.16) следует

$$(XY)Z = [[X, Y], Z] + [\{X, Y\}, Z] + \{[X, Y], Z\} + \{\{X, Y\}, Z\}, \quad (2.17)$$

$$X(YZ) = [X, [Y, Z]] + [X, \{Y, Z\}] + \{X, [Y, Z]\} + \{X, \{Y, Z\}\}. \quad (2.18)$$

Для разности (2.17) и (2.18) получаем

$$\begin{aligned} (XY)Z - X(YZ) = & -[Z, [X, Y]] - [X, [Y, Z]] - [Z, \{X, Y\}] - [X, \{Y, Z\}] + \\ & + \{Z, [X, Y]\} - \{X, [Y, Z]\} + \{Z, \{X, Y\}\} - \{X, \{Y, Z\}\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

или, принимая во внимание тождество (2.13) и тождество Якоби (2.10), которое следует из него, соотношение (2.19) примет вид

$$(XY)Z - X(YZ) = -[Z, \{X, Y\}] - [X, \{Y, Z\}] + \{Z, [X, Y]\} - \{X, [Y, Z]\}. \quad (2.20)$$

Далее, выражая $[Z, \{X, Y\}]$ и $[X, \{Y, Z\}]$ с помощью тождества (2.12), мы приходим к соотношению (2.2). Таким образом, для любой алгебры $\mathcal{A}$ основное тождество (2.9) эквивалентно условию ассоциативности. Этот результат сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы операция умножения в алгебре $\mathcal{A}$ была ассоциативной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество (2.9), в котором коммутаторы и антикоммутаторы определены по правилу (2.5).*

Любая ассоциативная алгебра обладает естественной структурой алгебры Ли, если определить скобку Ли через ассоциативное умножение. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: скобка Ли в общем случае не позволяет ввести ассоциативное умножение. Однако справедлива

ТЕОРЕМА 2. *В любой алгебре $\mathcal{A}$, оснащенной двумя билинейными операциями $[\cdot, \cdot]$ и $\{\cdot, \cdot\}$ со свойствами симметрии*

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad \{X, Y\} = \{Y, X\}, \quad (2.21)$$

которые удовлетворяют тождествам (2.12) и (2.13), можно ввести ассоциативное умножение по правилу (2.16).

Доказательство теоремы 2 фактически содержится в соотношениях (2.2), (2.17)–(2.20).

Следует отметить, что приведенные выше результаты не используют предположений о конечности или бесконечности системы базисных векторов $\{T_i\}$ алгебры $\mathcal{A}$, так же как и о существовании базиса вообще.

3. СУПЕРРАСПИРЕНИЕ

Результаты, полученные в предыдущем разделе, могут быть обобщены на случай супералгебры $\mathcal{A}_s$ с элементами $X \in \mathcal{A}_s$, имеющими грассманову четность $\varepsilon(X)$. Пусть элементы T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $\varepsilon(T_i) = \varepsilon_i$, образуют базис в $\mathcal{A}_s$ так, что для любого элемента $X \in \mathcal{A}_s$ имеет место представление $X = x^i T_i$, $\varepsilon(x^i) = \varepsilon(X) + \varepsilon_i$. Поскольку $T_i T_j \in \mathcal{A}_s$, то

$$T_i T_j = F_{ij}^k T_k, \quad (3.1)$$

где F_{ij}^k , $\varepsilon(F_{ij}^k) = \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k$, – структурные константы. В терминах F_{ij}^k условие ассоциативности (2.2) запишется в виде

$$F_{ij}^n F_{nk}^m = F_{jk}^n F_{in}^m (-1)^{\varepsilon_i(\varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_n)}. \quad (3.2)$$

В суперслучае коммутатор $[\cdot, \cdot]$ и антикоммутатор $\{\cdot, \cdot\}$ вводятся для любых двух элементов $X, Y \in \mathcal{A}_s$ по правилам

$$[X, Y] = XY - (-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)} YX, \quad \{X, Y\} = XY + (-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)} YX \quad (3.3)$$

с очевидными свойствами симметрии

$$[X, Y] = -[Y, X](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}, \quad \{X, Y\} = \{Y, X\}(-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) вытекают следующие правила Лейбница:

$$\begin{aligned} [X, YZ] &= [X, Y]Z + Y[X, Z](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}, \\ \{X, YZ\} &= \{X, Y\}Z - Y[X, Z](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для базисных элементов имеем

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k, \quad \{T_i, T_j\} = c_{ij}^k T_k, \quad (3.6)$$

где структурные константы f_{ij}^k и c_{ij}^k удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$c_{ij}^k = c_{ji}^k(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j}, \quad f_{ij}^k = -f_{ji}^k(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j}. \quad (3.7)$$

Они могут быть определены через симметричные и антисимметричные части структурных коэффициентов F_{ij}^k :

$$c_{ij}^k = F_{ij}^k + F_{ji}^k(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j}, \quad f_{ij}^k = F_{ij}^k - F_{ji}^k(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j}. \quad (3.8)$$

Для любой ассоциативной супералгебры $\mathcal{A}_s$ и для любых $X, Y, Z \in \mathcal{A}_s$ выполняются тождества

$$[X, YZ](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Z)} + [Z, XY](-1)^{\varepsilon(Z)\varepsilon(Y)} + [Y, ZX](-1)^{\varepsilon(Y)\varepsilon(X)} \equiv 0, \quad (3.9)$$

$$[X, YZ](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Z)} + \{Y, ZX\}(-1)^{\varepsilon(Y)\varepsilon(X)} - \{Z, XY\}(-1)^{\varepsilon(Z)\varepsilon(Y)} \equiv 0, \quad (3.10)$$

которые обобщают соотношения (2.8) и (2.9). Тожество (3.9) может быть получено из (3.10), тождество (3.10) может рассматриваться как фундаментальное тождество для ассоциативных супералгебр. В терминах двойных коммутаторов и антикоммутаторов имеем следующие тождества:

$$[X, [Y, Z]](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Z)} + [Z, [X, Y]](-1)^{\varepsilon(Z)\varepsilon(Y)} + [Y, [Z, X]](-1)^{\varepsilon(Y)\varepsilon(X)} \equiv 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} [X, \{Y, Z\}](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Z)} + [Z, \{X, Y\}](-1)^{\varepsilon(Z)\varepsilon(Y)} + \\ + [Y, \{Z, X\}](-1)^{\varepsilon(Y)\varepsilon(X)} \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} [X, \{Y, Z\}](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Z)} - \{Z, [X, Y]\}(-1)^{\varepsilon(Z)\varepsilon(Y)} + \\ + \{Y, [Z, X]\}(-1)^{\varepsilon(Y)\varepsilon(X)} \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]](-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Z)} + \{Y, \{Z, X\}\}(-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)} - \\ - \{Z, \{X, Y\}\}(-1)^{\varepsilon(Z)\varepsilon(Y)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тожества (3.11) и (3.12) получаются из (3.14) и (3.13) соответственно суммированием по циклическим перестановкам.

Из условия ассоциативности (3.2) следуют тождества в терминах симметричных и антисимметричных частей структурных констант:

$$\begin{aligned} f_{ij}^n f_{nk}^m (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_k} + f_{ki}^n f_{nj}^m (-1)^{\varepsilon_k \varepsilon_j} + f_{jk}^n f_{ni}^m (-1)^{\varepsilon_j \varepsilon_i} &\equiv 0, \\ c_{ij}^n f_{nk}^m (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_k} + c_{ki}^n f_{nj}^m (-1)^{\varepsilon_j \varepsilon_k} + c_{jk}^n f_{ni}^m (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} &\equiv 0, \\ f_{ij}^n c_{nk}^m (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_k} - f_{ki}^n c_{nj}^m (-1)^{\varepsilon_k \varepsilon_j} + c_{jk}^n f_{ni}^m (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} &\equiv 0, \\ c_{ij}^n c_{nk}^m (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_k} - c_{ki}^n c_{nj}^m (-1)^{\varepsilon_j \varepsilon_k} + f_{jk}^n f_{ni}^m (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Мы снова можем рассмотреть ассоциативность операции умножения в супералгебрах с новой точки зрения. Для этого рассмотрим супералгебру $\mathcal{A}_s$. Введем коммутатор и антикоммутатор как элементы $\mathcal{A}_s$ по правилам (3.3). Предположим, что выполняется фундаментальное тождество (3.10). Используя представление умножения любых двух элементов $X, Y \in \mathcal{A}_s$ в виде

$$XY = \frac{1}{2}([X, Y] + \{X, Y\}) \quad (3.16)$$

и повторяя доказательство, приведенное в разделе 2, приходим к ассоциативности умножения (2.2). Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Для ассоциативности операции умножения в супералгебре $\mathcal{A}_s$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество (3.10), в котором коммутаторы и антикоммутаторы определены по правилу (3.3).*

Любая ассоциативная супералгебра обладает естественной структурой супералгебры Ли, если определить скобку Ли через ассоциативное умножение по формуле $[X, Y] = XY - YX(-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: скобка Ли в общем случае не позволяет ввести ассоциативное умножение. Однако справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\mathcal{A}_s$ – произвольная супералгебра, оснащенная двумя билинейными операциями $[\cdot, \cdot]$ и $\{\cdot, \cdot\}$ со свойствами симметрии*

$$[X, Y] = -(-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}[Y, X], \quad \{X, Y\} = (-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}\{Y, X\}. \quad (3.17)$$

Если эти операции удовлетворяют тождествам (3.13) и (3.14), то в $\mathcal{A}_s$ можно ввести ассоциативное умножение.

Действительно, определим умножение $X \circ Y$ по правилу (3.16),

$$X \circ Y = \frac{1}{2}([X, Y] + \{X, Y\}),$$

и применим доказательство, аналогичное приведенному в разделе 2. Тогда мы приддем к ассоциативности такого умножения. В терминах этого умножения бинарные операции, введенные выше, имеют обычное представление:

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X(-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}, \quad \{X, Y\} = X \circ Y + Y \circ X(-1)^{\varepsilon(X)\varepsilon(Y)}. \quad (3.18)$$

Заметим, что приведенные выше обсуждения не содержат предположений, касающихся базиса супералгебры.

4. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ (СУПЕР)МНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрим невырожденное симплектическое супермногообразие $(\mathcal{M}, \omega)$, где $\mathcal{M}$ является супермногообразием, а ω – невырожденной замкнутой симплектической 2-суперформой с грассмановой четностью $\varepsilon(\omega(X, Y)) = \varepsilon(X) + \varepsilon(Y) + \varepsilon(\omega)$, X и Y – элементы кокасательного пространства $\mathcal{M}$. Мы говорим о четном симплектическом супермногообразии, когда $\varepsilon(\omega) = 0$, и о нечетном симплектическом супермногообразии, если $\varepsilon(\omega) = 1$. Хорошо известно (см., например, [1]), что четное симплектическое супермногообразие является основой при описании классических динамических систем в гамильтоновом формализме. В свою очередь, ковариантное квантование калибровочных теорий (метод Баталина–Вилковскового [9]) основано на невырожденных нечетных симплектических супермногообразиях. Любая невырожденная замкнутая симплектическая структура определяет суперскобку Пуассона $\{F, G\}$, $\varepsilon(\{F, G\}) = \varepsilon(F) + \varepsilon(G) + \varepsilon(\omega)$, которая для любых двух скалярных функций F, G на $\mathcal{M}$ является скаляром относительно произвольных замен координат на $\mathcal{M}$. Суперскобка Пуассона обладает свойством антисимметрии

$$\{F, G\} = -\{G, F\}(-1)^{(\varepsilon(F) + \varepsilon(\omega))(\varepsilon(G) + \varepsilon(\omega))}, \quad (4.1)$$

линейности

$$\{F + G, H\} = \{F, H\} + \{G, H\}, \quad (4.2)$$

удовлетворяет правилу Лейбница

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G(-1)^{\varepsilon(H)\varepsilon(G)}, \quad (4.3)$$

тождеству Якоби

$$\begin{aligned} & \{F, \{G, H\}\}(-1)^{(\varepsilon(F) + \varepsilon(\omega))(\varepsilon(H) + \varepsilon(\omega))} + \{H, \{F, G\}\}(-1)^{(\varepsilon(H) + \varepsilon(\omega))(\varepsilon(G) + \varepsilon(\omega))} + \\ & + \{G, \{H, F\}\}(-1)^{(\varepsilon(G) + \varepsilon(\omega))(\varepsilon(F) + \varepsilon(\omega))} \equiv 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которое является следствием замкнутости симплектической структуры.

В четном случае ($\varepsilon(\omega) = 0$) суперскобка Пуассона совпадает с суперрасширением скобки Пуассона. В нечетном случае ($\varepsilon(\omega) = 1$) суперскобка Пуассона представляет собой антискобку, являющуюся одной из основных операций в методе квантования Баталина–Вилковскового [9], [12] и известную в математике как скобка Бюттэн [13].

Отметим, что в четном случае ($\varepsilon(\omega) = 0$) из (4.1) и (4.3) следует тождество

$$\{F, GH\}(-1)^{\varepsilon(F)\varepsilon(H)} + \{H, FG\}(-1)^{\varepsilon(H)\varepsilon(G)} + \{G, HF\}(-1)^{\varepsilon(G)\varepsilon(F)} \equiv 0. \quad (4.5)$$

К сожалению, в отличие от ассоциативных алгебр, в этом случае мы не можем рассматривать данное тождество как фундаментальное для невырожденных замкнутых четных симплектических супермногообразий, так как нам не удастся вывести тождество Якоби (4.4) из (4.5). Тем не менее, если каноническое квантование применяется к динамической системе, для которой фазовое пространство описывается невырожденным четным замкнутым симплектическим супермногообразием, скобка Пуассона преобразуется в коммутатор, $\{F, G\} \rightarrow (i\hbar)^{-1}[\hat{F}, \hat{G}]$, а тождество (4.5) сводится к (3.9) для операторов $\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}$.

5. ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТОЖДЕСТВ

Заметим, что для любой ассоциативной алгебры имеют место тождества

$$[X_1, X_2 X_3 \cdots X_n] + \text{cycle}(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv 0, \quad n = 3, 4, \dots, \quad (5.1)$$

являющиеся обобщением тождества (2.8). Тождество Якоби

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_3, X_1], X_2] + [[X_2, X_3], X_1] \equiv 0$$

следует из (5.1) для $n = 3$

$$[X_1, X_2 X_3] - [X_2, X_1 X_3] + \text{cycle}(X_1, X_2, X_3) \equiv 0. \quad (5.2)$$

Обобщенное тождество Якоби для $n = 4$ обсуждалось в работе [14] и имеет вид

$$\begin{aligned} & [[[X_1, X_2], X_3], X_4] + [[[X_2, X_1], X_4], X_3] + [[[X_3, X_4], X_1], X_2] + \\ & + [[[X_4, X_3], X_2], X_1] \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это тождество может быть получено из (5.1). Действительно, непосредственная проверка показывает, что фактически оно совпадает с тождеством

$$\begin{aligned} & [X_1, X_2 X_3 X_4] - [X_2, X_1 X_3 X_4] + [X_4, X_3 X_2 X_1] - [X_4, X_3 X_1 X_2] + \\ & + \text{cycle}(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Обобщение (5.3) для $n = 5, 6, \dots$ было дано в работе [15], и снова эти обобщенные тождества Якоби могут быть получены из фундаментальных тождеств (5.1).

Рассмотрим обобщение тождества (2.9). Для четырех элементов имеет место

$$[X_1, X_2 X_3 X_4] - \{X_4, X_1 X_2 X_3\} + \{X_3, X_4 X_1 X_2\} + [X_2, X_3 X_4 X_1] \equiv 0. \quad (5.5)$$

В общем случае для любой ассоциативной алгебры имеем следующие тождества:

$$\begin{aligned} & [X_1, X_2 X_3 \cdots X_n] - \{X_n, X_1 X_2 \cdots X_{n-1}\} + \{X_{n-1}, X_n X_1 \cdots X_{n-2}\} + \\ & + [X_{n-2}, X_{n-1} X_n X_1 \cdots X_{n-3}] + [X_{n-3}, X_{n-2} X_{n-1} X_n X_1 \cdots X_{n-4}] + \cdots \\ & \cdots + [X_2, X_3 \cdots X_n X_1] \equiv 0, \quad n \geq 4. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Доказательство (5.6) основано на очевидном равенстве

$$\begin{aligned} & [X_n, X_1 X_2 \cdots X_{n-1}] + [X_{n-1}, X_n X_1 \cdots X_{n-2}] + \\ & + \{X_n, X_1 X_2 \cdots X_{n-1}\} - \{X_{n-1}, X_n X_1 \cdots X_{n-2}\} \equiv 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Затем, применяя к (5.7) тождество (5.1), приходим к (5.6). Как и в случае (2.8), тождество (5.1) может быть получено из (5.6). Для этого рассмотрим суммирование (5.6) по циклическим перестановкам. Имеем

$$\begin{aligned} & ((n-2)[X_1, X_2 X_3 \cdots X_n] - \{X_n, X_1 X_2 \cdots X_{n-1}\} + \{X_{n-1}, X_n X_1 \cdots X_{n-2}\}) + \\ & + \text{cycle}(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Однако

$$(\{X_n, X_1 X_2 \cdots X_{n-1}\} - \{X_{n-1}, X_n X_1 \cdots X_{n-2}\}) + \text{cycle}(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv 0,$$

и из (5.8) следует (5.1). Это позволяет говорить о тождествах (5.6) как о фундаментальных в любой ассоциативной алгебре.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обсудили тождество (2.9) для произвольной ассоциативной алгебры и аналог этого тождества для произвольной ассоциативной супералгебры (3.10). Мы предложили рассматривать эти тождества как фундаментальные, так как они представлены в терминах одинарных коммутаторов и антикоммутаторов, в отличие от обычно обсуждаемых тождеств для алгебр (см. [10], [11]), которые являются фактически следствиями этих тождеств.

Было доказано (теорема 2 (теорема 4)), что любая алгебра (супералгебра), оснащенная двумя билинейными операциями (коммутатор и антикоммутатор), которые удовлетворяют тождествам (2.12) и (2.13) ((3.13) и (3.14)), является ассоциативной алгеброй¹⁾ (супералгеброй). Следует подчеркнуть, что доказательство не использует каких-либо предположений о конечности или даже существовании базиса для заданной алгебры (супералгебры).

Мы ввели тождество (4.4) для произвольного невырожденного четного симплектического супермногообразия и обсудили применение этого тождества в каноническом квантовании динамических систем.

Наконец, мы предложили обобщение основных тождеств для случая произвольного числа элементов, входящих в эти соотношения (см. (5.1) и (5.6)).

Благодарности. Авторы благодарят В. В. Жаринова и А. К. Погребкова за внимательное прочтение рукописи работы, а также П. А. Зусмановича и Д. А. Лейтеса за ссылки и полезные замечания, касающиеся тождеств в алгебрах. Работа П. М. Лаврова и О. В. Радченко частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-88.2014.2), Министерством образования и науки Российской Федерации (грант ТГПУ-122) и РФФИ (грант № 12-02-00121). Работа И. В. Тютина частично поддержана РФФИ (грант № 14-01-00489).

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантовых полей*, Наука, М., 1984.
- [3] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B*, **69**:3 (1977), 309–312.
- [4] I. A. Batalin, E. S. Fradkin, *Phys. Lett. B*, **122**:2 (1983), 157–164.
- [5] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.
- [6] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1992.
- [7] Д. А. Лейтес, *УМН*, **35**:1(211) (1980), 3–57.

¹⁾ Отметим, что для случая алгебр этот факт был доказан в работе [10].

- [8] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [9] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B*, **102**:1 (1981), 27–31.
- [10] M. Markl, E. Remm, *J. Algebra*, **299**:1 (2006), 171–189.
- [11] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **346**, Springer, Berlin, 2012.
- [12] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Rev. D*, **28**:10 (1983), 2567–2582.
- [13] C. Buttin, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A*, **269**:1 (1969), 87–89.
- [14] F. Wever, *Math. Ann.*, **120**:1 (1949), 563–580.
- [15] D. Blessnohl, H. Laue, *Note di Matematika*, **8**:1 (1988), 111–121.

Поступила в редакцию 22.01.2014