Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Тахтаджян, О вещественных проективных связностях, подходе В. И. Смирнова и решениях уравнения Лиувилля типа черных дыр, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 1, 206–217

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 07:19:02

© 2014 г.

Л. А. Тахтаджян^{*†}

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ СВЯЗНОСТЯХ, ПОДХОДЕ В. И. СМЕРНОВА И РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ТИПА ЧЕРНЫХ ДЫР

Рассмотрены вещественные проективные связности на римановых поверхностях и отвечающие им решения уравнения Лиувилля. Показано, что эти решения имеют сингулярности специального типа (типа черных дыр) на конечном числе простых аналитических контуров. Подробно разобран случай сферы Римана с четырьмя вещественными проколами, рассмотренный в магистерской диссертации В. И. Смирнова (Петроград, 1918 год).

Ключевые слова: униформизация, римановы поверхности, проективные связности, фуксова проективная связность, группа монодромии, уравнение Лиувилля, действие Лиувилля, сингулярные решения.

DOI: 10.4213/tmf8646

*Посвящается моему Учителю Людвигу Дмитриевичу Фаддееву
в связи с его восьмидесятилетием*

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из центральных проблем математики во второй половине XIX – в начале XX века была задача об униформизации римановых поверхностей. Классики, Клейн [1], и Пуанкаре [2], связывали ее с исследованием обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с регулярными особыми точками. Другой подход к задаче об униформизации был предложен Пуанкаре [3]. Он состоит в нахождении полной конформной метрики постоянной отрицательной кривизны и сводится к глобальной разрешимости уравнения Лиувилля, специального нелинейного уравнения в частных производных эллиптического типа на римановой поверхности.

В настоящей работе мы поясняем связи между этими двумя подходами и описываем решения уравнения Лиувилля, отвечающие обыкновенным дифференциальным

---

^{*}Department of Mathematics, Stony Brook University, Stony Brook, NY, USA.
E-mail: leontak@math.sunysb.edu

[†]Международный математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия

уравнениям 2-го порядка с вещественной группой монодромии. В современной физической литературе, посвященной уравнению Лиувилля, распространено утверждение о том, что вещественность группы монодромии соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка на римановой поверхности является достаточным условием ее фуксовой униформизации. Однако еще классикам было известно, что это не так, и ими был подробно разобран случай вещественной группы монодромии для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка на римановой поверхности рода 0 с проколами. В то же время связь с уравнением Лиувилля ими не была рассмотрена, и здесь мы частично восполняем этот пробел.

Именно, в разделе 2, следуя лекциям [4], мы кратко излагаем теорию проективных связностей на римановой поверхности – инвариантный способ определения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с регулярными особыми точками. Следуя [5], [6], мы сообщаем основные результаты, связанные с фуксовой униформизацией, уравнением Лиувилля и комплексной геометрией пространства модулей. В разделе 3, следуя работе [7], мы приводим современную классификацию проективных связностей с вещественной группой монодромии и результаты магистерской диссертации В. И. Смирнова [8] (Петроград, 1918 год). Эта диссертация, опубликованная в [9], [10], была первой работой, где для случая четырех вещественных проколов была приведена полная классификация уравнений с вещественной группой монодромии. В п. 3.2 мы приводим современную интерпретацию результатов В. И. Смирнова. В разделе 4 мы описываем решения уравнения Лиувилля с сингулярностями типа черных дыр, ассоциированные с вещественными проективными связностями. Насколько нам известно, подобные решения ранее не рассматривались.

2. ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ, УНИФОРМИЗАЦИЯ И УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

2.1. Проективные связности. Пусть X_0 – компактная риманова поверхность рода g с отмеченными точками $x_1, \dots, x_n$, где $2g + n - 2 > 0$, и пусть $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ – комплексно-аналитический атлас с локальными координатами z_α и функциями перехода $z_\alpha = g_{\alpha\beta}(z_\beta)$ на $U_\alpha \cap U_\beta$. Обозначим через $X = X_0 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ соответствующую риманову поверхность типа (g, n) – поверхность рода g с n проколами. Набор $R = \{r_\alpha\}$, где r_α – голоморфная функция на $U_\alpha \cap X$, называется (*голоморфной*) *проективной связностью* на X , если на каждом из пересечений $U_\alpha \cap U_\beta \cap X$

$$r_\beta = r_\alpha \circ g_{\alpha\beta}(g'_{\alpha\beta})^2 + S(g_{\alpha\beta}),$$

где $S(f)$ – производная Шварца голоморфной функции f ,

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2.$$

При этом дополнительно предполагается, что если $x_i \in U_\alpha$ и $z_\alpha(x_i) = 0$, то

$$r_\alpha(z_\alpha) = \frac{1}{2z_\alpha^2} + O\left(\frac{1}{|z_\alpha|}\right), \quad z_\alpha \rightarrow 0. \quad (1)$$

Проективные связности образуют аффинное пространство $\mathcal{P}(X)$ над комплексным векторным пространством $\mathcal{Q}(X)$ голоморфных квадратичных дифференциалов на X ; элементами $\mathcal{Q}(X)$ являются наборы $Q = \{q_\alpha\}$ с законом преобразования

$$q_\beta = q_\alpha \circ g_{\alpha\beta}(g'_{\alpha\beta})^2$$

и дополнительными условиями $q_\alpha(z_\alpha) = O(|z_\alpha|^{-1})$ при $z_\alpha \rightarrow 0$, если $x_i \in U_\alpha$ и $z_\alpha(x_i) = 0$. Пространство $\mathcal{Q}(X)$ имеет комплексную размерность $3g - 3 + n$. (Подробнее о проективных связностях и квадратичных дифференциалах см. [4] и цитированную там литературу.)

Проективная связность R естественно определяет линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка на римановой поверхности X – уравнение Фукса

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dz_\alpha^2} + \frac{1}{2} r_\alpha u_\alpha = 0, \quad (2)$$

где $U = \{u_\alpha\}$ понимается как многозначный дифференциал порядка $-1/2$ на X . Уравнение (2) определяет группу монодромии – представление фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ римановой поверхности X с выделенной точкой x_0 в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$. Из условия (1) следует, что при отображении монодромии образы стандартных образующих в $\pi_1(X, x_0)$, отвечающих обходам вокруг проколов x_i , являются параболическими элементами в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

2.2. Униформизация. Согласно теореме об униформизации

$$X \cong \Gamma \backslash \mathbb{H}, \quad (3)$$

где $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} \tau > 0\}$ – модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, а $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ – фуксова группа типа (g, n) , действующая на $\mathbb{H}$ дробно-линейными преобразованиями. Другими словами, существует комплексно-аналитическое накрытие $J: \mathbb{H} \rightarrow X$, группой автоморфизмов которого является Γ . Обратная к J многозначная аналитическая функция $J^{-1}: X \rightarrow \mathbb{H}$ представляет собой локально-однолистную, линейно-полиморфную функцию на римановой поверхности X (последнее означает, что ее ветви связаны между собой дробно-линейными преобразованиями из Γ). Производные Шварца функции J^{-1} по z_α в U_α корректно определены и задают *фуксову проективную связность* $R_F = \{S_{z_\alpha}(J^{-1})\}$ на X , а многозначные функции $1/\sqrt{(J^{-1})'}$ и $J^{-1}/\sqrt{(J^{-1})'}$ удовлетворяют уравнению Фукса (2) с $R = R_F$. Группа монодромии этого уравнения совпадает, с точностью до сопряжения в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, с фуксовой группой Γ .

Клейн [1] и Пуанкаре [2] решали проблему униформизации римановой поверхности X , подбирая проективную связность в уравнении Фукса (2) так, чтобы его группа монодромии оказалась такой фуксовой группой Γ , что выполняется соотношение (3). Прямое доказательство существования фуксовой проективной связности R_F на X оказалось весьма трудной задачей, которая и по сей день не получила окончательного решения (см. [11], [12]). В случае римановых поверхностей типа $(0, n)$, которыми мы здесь ограничимся, эта задача формулируется следующим образом.

Пусть X_0 – сфера Римана $\mathbb{P}^1$, а X – риманова поверхность рода 0 с n проколами $z_1, \dots, z_n$. Без ограничения общности можно считать, что $z_{n-2} = 0$, $z_{n-1} = 1$,

$z_n = \infty$ и $X = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-3}, 0, 1\}$. Уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2(z-z_i)^2} + \frac{c_i}{z-z_i} \right) u = 0, \quad (4)$$

где z – глобальная комплексная координата на X . Комплексные параметры $c_1, \dots, c_{n-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} z_i c_i = 1 - \frac{n}{2}, \quad (5)$$

которые позволяют явно выразить c_{n-2} и c_{n-1} через $z_1, \dots, z_{n-3}$ и оставшиеся $n-3$ параметра $c_1, \dots, c_{n-3}$.

В классическом подходе Клейна и Пуанкаре к проблеме униформизации по заданным регулярным особым точкам $z_1, \dots, z_{n-3}, 0, 1, \infty$ требовалось выбрать параметры $c_1, \dots, c_{n-3}$ таким образом, чтобы группа монодромии уравнения (4) была фуксовой группой, изоморфной фундаментальной группе римановой поверхности X . Тогда отношение двух линейно независимых решений уравнения (4) и являлось бы, с точностью до дробно-линейного преобразования, искомым многозначным отображением $J^{-1}: X \rightarrow \mathbb{H}$, осуществляющим униформизацию римановой поверхности X . Соответствующая Γ -автоморфная функция $J: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ называется инвариантом Клейна. Комплексные числа $c_1, \dots, c_{n-3}$, *акцессорные параметры* фуксовой униформизации поверхности X , однозначно определяются по особым точкам $z_1, \dots, z_{n-3}$. При этом

$$S(J^{-1})(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2(z-z_i)^2} + \frac{c_i}{z-z_i} \right). \quad (6)$$

Для доказательства существования акцессорных параметров Пуанкаре предложил так называемый *метод непрерывности* [2]. Однако этот метод не позволил получить строгое решение проблемы униформизации и, подвергнутый критике, был вскоре оставлен. Окончательное решение проблемы униформизации было получено Кёбе и Пуанкаре в 1907 г. при помощи принципиально иных методов, в частности с использованием теории потенциала (современное изложение см., например, в [13]).

2.3. Уравнение Лиувилля. Проекция на X метрики Пуанкаре $(\text{Im } \tau)^{-2} |d\tau|^2$ на $\mathbb{H}$ представляет собой полную метрику постоянной отрицательной кривизны -1 , согласованную с комплексной структурой на X . Она имеет вид $e^{\varphi(z)} |dz|^2$, где

$$e^{\varphi(z)} = \frac{|(J^{-1})'(z)|^2}{(\text{Im } J^{-1}(z))^2}. \quad (7)$$

Гладкая функция φ на X удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\varphi_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} e^{\varphi} \quad (8)$$

и имеет следующие асимптотики:

$$\varphi(z) = \begin{cases} -2 \ln |z - z_i| - 2 \ln |\ln |z - z_i|| + o(1), & z \rightarrow z_i, \quad i \neq n, \\ -2 \ln |z| - 2 \ln \ln |z| + o(1), & z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (9)$$

В работе [3] Пуанкаре предложил подход к проблеме униформизации, использующий уравнение Лиувилля. А именно, он доказал, что в классе гладких вещественнозначных функций на X с асимптотиками (9) уравнение Лиувилля (8) однозначно разрешимо. Отсюда следует, что $T_\varphi = \varphi_{zz} - \varphi_z^2/2$ является рациональной функцией вида (6), а уравнение

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{2} T_\varphi u = 0$$

имеет фуксову группу монодромии, которая и униформизует риманову поверхность X .

Уравнение Лиувилля является уравнением Эйлера–Лагранжа для экстремалей функционала

$$S(\psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{X_\varepsilon} (|\psi_z|^2 + e^\psi) d^2 z + 2\pi n \ln \varepsilon + 4\pi(n-2) \ln |\ln \varepsilon| \right),$$

где $d^2 z$ – мера Лебега на $\mathbb{C}$,

$$X_\varepsilon = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{|z - z_i| < \varepsilon\} \cup \left\{ |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \right),$$

а ψ принадлежит классу функций с асимптотиками (9). Величина $T_\psi = \psi_{zz} - \psi_z^2/2$ играет роль $(2, 0)$ -компоненты тензора энергии-импульса в классической теории Лиувилля и

$$T_\varphi = S(J^{-1}).$$

Обозначим через

$$\mathcal{M}_{0,n} = \{(z_1, \dots, z_{n-3}) \in \mathbb{C}^{n-3} : z_i \neq z_j \text{ для } i \neq j, \text{ и } z_i \neq 0, 1\}$$

пространство модулей римановых поверхностей рода 0 с n упорядоченными проколами (рациональных кривых с n отмеченными точками). Критические значения функционала действия уравнения Лиувилля $S(\psi)$ (значения на экстремальных φ для всех поверхностей X) задают гладкую функцию $S: \mathcal{M}_{0,n} \rightarrow \mathbb{R}$ – *классическое действие уравнения Лиувилля*. Как было показано в работах [5], [6], классическое действие уравнения Лиувилля играет фундаментальную роль в комплексной геометрии пространства модулей $\mathcal{M}_{0,n}$. А именно, S является общей первообразной функцией для аксессуарных параметров

$$c_i = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n-3,$$

и кэлеровым потенциалом метрики Вейля–Петерсона на $\mathcal{M}_{0,n}$,

$$-\frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right\rangle_{WP}, \quad i, j = 1, \dots, n-3.$$

Утверждение, что для поверхностей рода 0 классическое действие уравнения Лиувилля является производящей функцией для аксессуарных параметров, было высказано Поляковым¹⁾ на основе анализа квазиклассического предела конформных тождеств Уорда квантовой теории Лиувилля (см. [14]).

¹⁾ Доклад в Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова, 1982 г., не опубликовано.

3. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ И ДИССЕРТАЦИЯ В. И. СМИРНОВА

3.1. Общий случай. Пусть X – риманова поверхность типа (g, n) . Проективная связность R на X называется *вещественной* (фуксовой), если ее группа монодромии, с точностью до сопряжения в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, есть подгруппа в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (фуксова группа). Согласно теореме об униформизации фуксова проективная связность R_F однозначно характеризуется условием, что ее группа монодромии в точности есть фуксова группа Γ , униформизирующая поверхность X . Естественно возникает вопрос, нельзя ли задать проективную связность R_F на поверхности X более простыми условиями типа вещественности (см. стр. 224 в работе [15]) или фуксовости? Ответ на этот вопрос отрицателен.

Именно, в случае, когда $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ есть компактная риманова поверхность рода $g > 1$, Голдман [7] показал, что каждой целочисленной измеримой ламинации Тёрстона $\mu = \sum_i m_i \gamma_i$ (дизъюнктное объединение), где γ_i – простые замкнутые геодезические в гиперболической метрике на X , а m_i – неотрицательные целые числа, отвечает риманова поверхность $Gr_\mu(X)$ рода g с проективной связностью $R(\mu)$, имеющей группу монодромии Γ . Римановы поверхности $Gr_\mu(X)$ получаются из X при помощи так называемой процедуры “графтинга” и обобщают классические примеры Маскита–Хейхала и Салливана–Тёрстона (см. [7]). При этом множество фуксовых проективных связностей на всех римановых поверхностях рода g изоморфно прямому произведению пространства Тейхмюллера T_g и множества целочисленных измеримых ламинаций на топологической поверхности рода g . В работе [16] доказано, что на каждой римановой поверхности X рода $g > 1$ существует бесконечно много проективных связностей с фуксовой монодромией.

Вещественные проективные связности для римановых поверхностей типа (g, n) также рассматривались Фальтингсом [15]. Как показано в работе [7] для компактных римановых поверхностей, каждой полуцелой измеримой ламинации Тёрстона μ отвечает риманова поверхность $Gr_\mu(X)$ рода g с вещественной проективной связностью.

3.2. Поверхности типа $(0, 4)$ и подход В. И. Смирнова. Классики связывали задачу об униформизации римановых поверхностей с дифференциальными уравнениями. В качестве основного примера рассматривался случай римановых поверхностей типа $(0, 4)$, и ставилась задача о нахождении такого акцессорного параметра в уравнении (4), чтобы его группа монодромии была фуксовой или клейновой (дискретной подгруппой $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$). Для специального случая вещественных особых точек Клейн [17] предложил подход, в котором используется осцилляционная теорема типа Штурма, а Хилб [18] доказал, что уравнение (4) имеет фуксову группу монодромии для бесконечного числа значений акцессорного параметра. Гильберт [19] свел эту задачу к исследованию некоторого интегрального уравнения.

Полностью задача о вещественной группе монодромии уравнения (4) с четырьмя вещественными особыми точками была решена в магистерской диссертации В. И. Смирнова [8], изданной в Петрограде в 1918 г. (ее основное содержание приведено в [9], [10]). Именно, рассмотрим уравнение (4) с особыми точками $z_1 = 0$, $z_2 = a$, $z_3 = 0$ и $z_4 = \infty$, где $0 < a < 1$. Записывая общее решение уравнений (5) в виде

$$c_1 = 1 + \frac{1 + 2\lambda}{a}, \quad c_2 = \frac{1 + 2\lambda}{a(a - 1)}, \quad c_3 = -\frac{a + 2\lambda}{a - 1},$$

где λ – аксессуарный параметр, и совершая замену зависимой переменной $y = \sqrt{z(z-a)(z-1)}u$, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{dy}{dz} \right) + (z + \lambda)y = 0, \quad p(z) = z(z-a)(z-1). \quad (10)$$

Обозначим через $(y_i^{(1)}, y_i^{(2)})$ стандартный базис пространства решений уравнения (10) в окрестности каждой из особых точек z_i , состоящий из нормированных голоморфных решений

$$y_i^{(1)}(z, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(z - z_i)^k, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$y_4^{(1)}(z, \lambda) = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{4k}}{z^k}$$

и решений

$$y_i^{(2)}(z, \lambda) = y_i^{(1)}(z, \lambda) \ln(z - z_i) + \tilde{y}_i(z, \lambda), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$y_4^{(2)}(z, \lambda) = y_4^{(1)}(z, \lambda) \ln \frac{1}{z} + \tilde{y}_4(z, \lambda),$$

где $\tilde{y}_i(z, \lambda)$ голоморфны в окрестности z_i . При вещественных λ степенные ряды $y_i^{(1,2)}(z, \lambda)$ и $\tilde{y}_i(z, \lambda)$ имеют вещественные коэффициенты.

Для определения вещественных значений λ , при которых группа монодромии уравнения (10) вещественна, классики использовали понятие *вещественного продолжения*. А именно (см. [8]), если в окрестности особой точки a при вещественных $z < a$ мы имеем

$$y(z) = c \ln(a - z) + f(z),$$

где $\ln 1 = 0$ и функция $f(z)$ голоморфна в окрестности a , то вещественное продолжение y в область $z > a$ определяется как

$$y(z) = c \ln(z - a) + f(z).$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 (Клейн, Гильберт). *Уравнение (10) имеет вещественную группу монодромии, если λ вещественно и выполняется одно из следующих условий:*

- 1) решение $y_0^{(1)}(z, \lambda)$ голоморфно в окрестности особой точки $z_2 = a$;
- 2) решение $y_2^{(1)}(z, \lambda)$ голоморфно в окрестности особой точки $z_3 = 1$;
- 3) при вещественном продолжении через $z = a$ решение $y_0^{(1)}(z, \lambda)$ голоморфно в окрестности особой точки $z_3 = 1$.

При этом в случае 1 отношение $\eta = \sqrt{-1} y_3^{(1)} / y_1^{(1)}$ линейно независимых решений уравнения (10) при обходе вокруг особых точек 0, a и 1 преобразуется при помощи вещественных дробно-линейных преобразований; в случае 2 аналогичную роль играет отношение $\eta = \sqrt{-1} y_2^{(1)} / y_4^{(1)}$, а в случае 3 – отношение $\eta = \sqrt{-1} y_1^{(1)} / y_2^{(1)}$ (подробнее см. [8]).

Условия 1–3 определяют следующие три спектральные задачи типа Штурма–Лиувилля для уравнения (10). Именно, требуется найти те значения λ , при которых

Рис. 1

Рис. 2

- 1) на отрезке $[0, a]$ существует решение, регулярное в точках 0 и a ;
- 2) на отрезке $[a, 1]$ существует решение, регулярное в точках a и 1 ;
- 3) существует решение, регулярное в точке 0 и такое, что при вещественном продолжении через точку a оно регулярно и в точке 1 .

Используя классический метод Штурма, В.И. Смирнов [8] доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 (В.И. Смирнов). *Каждая из задач Штурма-Лиувилля 1–3 имеет простой неограниченный дискретный спектр. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Спектральная задача 1 имеет бесконечно много собственных значений μ_k , $k \in \mathbb{N}$, сходящихся к ∞ и удовлетворяющих неравенствам*

$$-a < \mu_1 < \mu_2 < \dots$$

2. *Спектральная задача 2 имеет бесконечно много собственных значений μ_{-k} , $k \in \mathbb{N}$, сходящихся к $-\infty$ и удовлетворяющих неравенствам*

$$-a > \mu_{-1} > \mu_{-2} > \dots$$

3. *Спектральная задача 3 имеет бесконечно много собственных значений λ_k , $k \in \mathbb{Z}$, сходящихся к $\pm\infty$ и удовлетворяющих неравенствам*

$$\dots < \mu_{-2} < \lambda_{-1} < \mu_{-1} < \lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots$$

Случай $\lambda = \lambda_0$ отвечает фуксовой униформизации римановой поверхности $X = \mathbb{C} \setminus \{0, a, 1\}$, и отношение $\eta = \sqrt{-1} y_1^{(1)} / y_2^{(1)}$ взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость переменной z на внутренность кругового четырехугольника с нулевыми углами и сторонами, ортогональными $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Нормируя η при помощи вещественного дробно-линейного преобразования так, чтобы образы особых точек $0, a, 1$ и ∞ были конечны, получаем четырехугольник, изображенный на рис. 1 (ср. с рис. 9 в [17]). Аналитически продолжая $\eta(z)$ в нижнюю полуплоскость переменной z , получаем многозначную линейно-полиморфную функцию $\eta: X \rightarrow \mathbb{H}$ с фуксовой группой Γ такую, что $J = \eta^{-1}$ задает изоморфизм (3).

Соответствующее отношение η будет взаимно однозначной функцией на верхней полуплоскости переменной z и в случаях $\lambda = \mu_{\pm 1}$. Так, при $\lambda = \mu_1$ имеем $\eta(0) = \eta(a) = \infty$ и $\eta(1) = \eta(\infty) = 0$. Нормируя $\eta = \sqrt{-1} y_3^{(1)} / y_1^{(1)}$ так, чтобы образы

Рис. 3

Рис. 4

особых точек были конечны, получаем, что η взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость z на внутренность вырожденного кругового четырехугольника, изображенного на рис. 2. Соответствующая группа монодромии будет группой типа Шоттки.

При всех остальных значениях λ_k и μ_k соответствующее отображение η уже не взаимно однозначно в верхней полуплоскости переменной z . Так, при $\lambda = \lambda_1$ верхняя полуплоскость отображается на внутренность кругового кольца, изображенного на рис. 3 (ср. с рис. 10 в [17]). При этом функция η принимает по два раза значения из отмеченной темным цветом области, которая отвечает четырехугольнику на рис. 1. При $\lambda = \lambda_k$ этот четырехугольник наматывается на себя $2|k|$ раз.

Аналогичным образом при $\lambda = \mu_2$ верхняя полуплоскость переменной z отображается на внутренность кругового кольца, изображенного на рис. 4. При этом функция η принимает по два раза значения из отмеченной темным цветом области, которая отвечает вырожденному четырехугольнику на рис. 2. При $\lambda = \mu_k$ этот четырехугольник наматывается на себя $|k|$ раз.

Поучительно сравнить эти результаты В. И. Смирнова с классификацией Голдмана фуксовых и вещественных проективных связностей на римановых поверхностях, обобщенной на случай поверхностей типа (g, n) . Мы получаем, что фуксова серия $\lambda = \lambda_k$ отвечает целочисленным ламинациям в [7], а серия $\lambda = \mu_k$ – полуцелым ламинациям.

4. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ТИПА ЧЕРНЫХ ДЫР

Фуксова униформизация римановой поверхности X определяет решение уравнения Лиувилля – гладкую функцию φ на X , удовлетворяющую уравнению (8) и имеющую асимптотики (9) (см. п. 2.3). Функция φ определяется по отношению J^{-1} линейно независимых решений уравнения (4) по формуле (7). Корректность этой формулы обеспечивается условием вещественности группы монодромии Γ уравнения (4), а ее гладкость – условием, что Γ униформизует риманову поверхность X и ее образ при многозначном отображении J^{-1} есть верхняя полуплоскость $\mathbb{H}$.

Аналогичным образом с каждым уравнением (4) с вещественной группой монодромии можно связать решение уравнения Лиувилля. Положим

$$e^{\varphi(z)} = \frac{|\eta'(z)|^2}{(\operatorname{Im} \eta(z))^2}, \quad (11)$$

где η – отношение линейно независимых решений уравнения (4), преобразующееся при помощи вещественных дробно-линейных преобразований при обходе вокруг особых точек (в фуксовом случае $\eta = J^{-1}$). Функция φ корректно определена благодаря вещественности монодромии и имеет асимптотики (9). Последнее следует из теории фуксовых уравнений с одинаковыми показателями. Однако решение (11) уже не является гладким: образ X при многозначном отображении η имеет нетривиальное пересечение с вещественной осью и функция φ сингулярна на $\eta^{-1}(\mathbb{R})$.

Именно, из результатов [15] (см. § 6 в указанной работе) следует, что полный прообраз $\eta^{-1}(\mathbb{R})$ есть дизъюнктное объединение конечного числа простых замкнутых аналитических кривых на X . Пусть C – одна из таких кривых. Существует ветвь многозначной функции η , взаимно однозначно отображающая C на окружность, так что $C = \{z = \eta^{-1}(t), t \in [\alpha, \beta]\}$. Удобно ввести функцию Шварца S аналитического контура C по формуле

$$S = \bar{\eta}^{-1} \circ \eta,$$

где $\bar{\eta}^{-1}(z) = \overline{\eta^{-1}(\bar{z})}$. Функция Шварца определена в некоторой окрестности контура C и задает его уравнением $\bar{z} = S(z)$ (см. [20]). Несложно показать, что в терминах функции Шварца решение φ имеет те же сингулярности на C , что и функция

$$-\frac{4\overline{S'(z)}}{(z - \overline{S(z)})^2}. \quad (12)$$

Именно, при $z \rightarrow z_0 \in C$ вдоль любого не касательного к C направления

$$e^{\varphi(z)} = -\frac{4S'(z_0)}{(\bar{z} - \bar{z}_0 - S'(z_0)(z - z_0))^2}(1 + O(|z - z_0|)). \quad (13)$$

Отметим, что в силу условия $\bar{S}(S(z)) = z$ функция в правой части формулы (13) вещественна и положительна. Сингулярности типа (12), (13) на контуре C аналогичны сингулярности на $\mathbb{R}$ метрики Пуанкаре на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, отвечающей функции Шварца $S(z) = z$.

В результате мы приходим к следующей задаче. На римановой поверхности $X = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-3}, 0, 1\}$ требуется найти такие простые аналитические контуры $C_1, \dots, C_k$ и функцию φ , что на $X \setminus \bigcup_{j=1}^k C_j$ функция φ удовлетворяет уравнению Лиувилля (8), имеет асимптотики (9) в проколах z_i и сингулярности типа (12), (13) на контурах C_j . На каждой из компонент связности X $e^{\varphi(z)}|dz|^2$ задает полную метрику постоянной отрицательной кривизны -1 . Границу C_j можно интерпретировать как горизонт черной дыры, поэтому соответствующие решения уравнения Лиувилля мы называем решениями *типа черных дыр*. Из классификации Голдмана [7] вещественных проективных связностей следует существование семейства таких решений, параметризованных “целочисленной решеткой” целых и измеримых ламинаций Тёрстона и неявно задаваемых процедурой графтинга.

Из результатов диссертации В. И. Смирнова следует явное описание решений типа черных дыр для случая четырех вещественных проколов. Именно, из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Все решения уравнения Лиувилля типа черных дыр для случая четырех вещественных проколов $0, a, 1$ и ∞ описываются следующим образом.

1. Решения фуксового типа, отвечающие значениям акцессорного параметра $\lambda = \lambda_k$, k – целое число, и имеющие $2|k|$ контуров C_j . При $k > 0$ эти контуры обходят точки 0 и a , а при $k < 0$ – точки a и 1 .
2. Решения типа Шоттки, отвечающие значениям акцессорного параметра $\lambda = \mu_k$, $k \neq 0$ – целое число, и имеющие $2|k| - 1$ контуров C_j . При $k > 0$ эти контуры обходят точки 0 и a , а при $k < 0$ – точки a и 1 .

В общем случае удобно использовать подстановку $\chi(z) = e^{-\varphi(z)/2}$, приводящую уравнение Лиувилля (8) к виду

$$-\chi\chi_{z\bar{z}} + |\chi_z|^2 = \frac{1}{4}, \quad (14)$$

а асимптотики (9) – к виду

$$\chi(z) = \begin{cases} |z - z_i| \ln |z - z_i| (1 + o(1)), & z \rightarrow z_i, \quad i \neq n, \\ |z| \ln |z| (1 + o(1)), & z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (15)$$

Сингулярности типа (12) переходят в условие обращения в нуль на контуре C :

$$\chi(z) \sim \frac{z - \overline{S(z)}}{2\sqrt{-S'(z)}}, \quad (16)$$

так что при отражении Шварца $z^* = S(z)$ через контур C вещественная функция $\chi(z)$ меняет знак. Эллиптическое уравнение в частных производных (14) с асимптотиками (15) и условиями вырождения (16) на контурах C_j представляет собой краевую задачу со свободной границей. Для ее решения интересно использовать метод продолжения по параметру с использованием априорной оценки, примененный в [3] к уравнению Лиувилля (8) с асимптотиками (9).

В заключение отметим, что функция χ играет важную роль в теории уравнения Лиувилля. А именно, она представляется как билинейная форма от решений уравнения (4) их комплексно-сопряженных и удовлетворяет (4)

$$\chi_{zz} + \frac{1}{2}T_\varphi\chi = 0 \quad (17)$$

и комплексно-сопряженному уравнению. В квантовой теории Лиувилля поле $\chi = e^{-\varphi(z)/2}$ описывает вырожденный на уровне 2 вектор в модуле Верма алгебры Вира-соро. В случае решений типа черных дыр функция χ по-прежнему удовлетворяет уравнению (17). Было бы интересно выяснить, какую роль она играет в квантовой теории Лиувилля.

Благодарности. Автор благодарен П. Г. Зографу за полезные обсуждения работ [7], [15] и геометрическую интерпретацию результатов диссертации В. И. Смирнова. Приведенные результаты частично докладывались на конференциях “Perspectives, Open Problems & Applications of Quantum Liouville Theory” в Стони Бруке (США, март 2010 г.) и “Математика – XXI век. 70 лет ПОМИ” (Санкт-Петербург, сентябрь 2010 г.). Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда (NSF, гранты № DMS-0705263 и DMS-1005769).

Список литературы

- [1] F. Klein, *Math. Ann.*, **21**:2 (1883), 141–218.
- [2] H. Poincaré, *Acta Math.*, **4**:1 (1884), 201–312; А. Пуанкаре, “О группах линейных уравнений”, *Избранные труды*, т. 3: *Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре*, Наука, М., 1974, 145–234.
- [3] H. Poincaré, *J. Math. Pures Appl.*, **4** (1898), 157–230; А. Пуанкаре, *Избранные труды*, т. 3: *Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре*, **3**, Наука, М., 1974.
- [4] А. Н. Тюрин, *УМН*, **33**:6(204) (1978), 149–195.
- [5] П. Г. Зograf, Л. А. Тахтаджян, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:3 (1985), 67–68.
- [6] П. Г. Зograf, Л. А. Тахтаджян, *Матем. сб.*, **132(174)**:2 (1987), 147–166.
- [7] W. M. Goldman, *J. Diff. Geom.*, **25** (1987), 297–326.
- [8] В. И. Смирнов, *Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками*, Дис. ... магистра, Петроградский университет, Петроград, 1918; *Избранные труды: Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во СПбГУ, СПб., 1996, 9–211.
- [9] V. Smirnov, *C. R. Sci. Acad. Paris*, **171** (1920), 510–512; В. И. Смирнов, *Избранные труды: Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во СПбГУ, СПб., 1996, 212–214.
- [10] V. Smirnov, *Bull. Sci. Math.*, **45** (1921), 93–120; 126–135; В. И. Смирнов, *Избранные труды: Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во СПбГУ, СПб., 1996, 215–249.
- [11] D. Hejhal, *Acta Math.*, **135**:1 (1975), 1–55.
- [12] D. Hejhal, *Bull. AMS*, **84**:3 (1978), 339–376.
- [13] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, **71**, Springer, New York, 1992.
- [14] L. A. Takhtajan, “Topics in the quantum geometry of Riemann surfaces: two-dimensional quantum gravity”, *Quantum Groups and Their Applications in Physics* (Varenna, 1994), Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, **127**, eds. L. Castellani, J. Wess, IOS Press, Amsterdam, 1996, 541–579.
- [15] G. Faltings, *Compos. Math.*, **48**:2 (1983), 223–269.
- [16] H. Tanigawa, *J. Diff. Geom.*, **47**:3 (1997), 399–419.
- [17] F. Klein, *Math. Ann.*, **64**:2 (1907), 175–196.
- [18] E. Hilb, *Math. Ann.*, **66** (1909), 215–257.
- [19] D. Hilbert, *Grudzüge der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Chelsea, New York, 1953.
- [20] P. J. Davis, *The Schwarz function and its applications*, The Carus Mathematical Monographs, **17**, MAA, Buffalo, NY, 1974.

Поступила в редакцию 21.01.2014