Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Рахматуллаев, Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли, *ТМФ*, 2014, том 180, номер 3, 307–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:26:29

© 2014 г.

М. М. Рахматуллаев*

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучается модель Поттса с q состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Для ферромагнитной модели Поттса выделены множества подгрупп индекса 2 группового представления дерева Кэли, при которых всякая слабо периодическая мера Гиббса является трансляционно-инвариантной. Для антиферромагнитной модели Поттса при $k \geq 2$ и $q \geq 2$ показана неединственность слабо периодической меры Гиббса, не являющейся трансляционно-инвариантной.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Поттса, слабо периодическая мера Гиббса.

DOI: 10.4213/tmf8647

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли вводится стандартным образом (см. [1]–[4]). В работе [5] изучена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ существуют три трансляционно-инвариантных меры Гиббса и несчетное число мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными. В работе [6] обобщены результаты работы [5] для модели Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка.

В работе [7] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [8] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса.

В работе [9] найдены все трансляционно-инвариантные меры Гиббса и, в частности, показано, что при достаточно низких температурах их количество равно $2^q - 1$. Доказано, что существуют $[q/2]$ критических температур, и дано точное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для каждой промежуточной температуры.

*Институт математики, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

В работе [10] вводится слабо периодическая мера Гиббса и для модели Изинга найдены некоторые такие меры, а в работе [11] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния и слабо периодические меры Гиббса. Полученные в работе [11] слабо периодические меры Гиббса также являются трансляционно-инвариантными.

Настоящая работа посвящена слабо периодическим (не трансляционно-инвариантным) мерам Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. Работа имеет следующую структуру: в разделе 2 вводятся основные определения и известные факты; в разделе 3 приведены результаты, полученные для слабо периодических мер Гиббса; доказательства всех результатов приведены в разделе 4.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли $\mathfrak{Z}^k$ порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\mathfrak{Z}^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин $\mathfrak{Z}^k$, L – его множество ребер, i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины*, и вводится обозначение $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такой, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ введем обозначения

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \\ V_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n &= \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно.

Мы рассмотрим модель, где спинные переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$, и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$, множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (2)$$

где $J \in \mathbb{R}$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x}\right\}, \quad (3)$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура, Z_n^{-1} – нормировочный множитель,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

$\{h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q,x}) \in \mathbb{R}^q, x \in V\}$ – совокупность векторов.

Говорят, что вероятностное распределение (3) согласованное, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ имеет место равенство

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}). \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной гиббсовской мерой, соответствующей гамильтониану (2) и векторнозначной функции h_x , $x \in V$.

Следующее утверждение [7] описывает условие на h_x , обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 1. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, в (3) является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее соотношение:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (5)$$

где $F: h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ определяется как

$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right),$$

и $\theta = e^{J\beta}$, $S(x)$ – множество прямых потомков точки x .

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор-группа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^* -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для любых $x \in G_k$, $y \in G_k^*$.

G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^* -слабо периодической, если $h_x = h_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_{\downarrow} \in H_j$ для любых $x \in G_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мера μ называется G_k^* -периодической (слабо периодической), если она соответствует G_k^* -периодической (слабо периодической) совокупности векторов h .

3. СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Цель этого раздела – описать слабо периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса.

Пусть q произвольно, т. е. $\sigma: V \rightarrow \Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$. В настоящей работе мы рассматриваем $q \geq 2$. Для $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ рассмотрим

$$H_A = \left\{ x \in G_k \mid \sum_{j \in A} w_j(x) \text{ четно} \right\},$$

где $w_j(x)$ – число a_j в слове x , $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ – фактор-группа. Для простоты обозначим $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$. H_A -слабо периодические совокупности векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1} \mid x \in G_k\}$ имеют следующий вид:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, \quad x \in H_0, \\ h_2, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, \quad x \in H_1, \\ h_3, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, \quad x \in H_0, \\ h_4, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, \quad x \in H_1. \end{cases}$$

Здесь $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iq-1})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда в силу (5) имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= (k - |A|)F(h_1, \theta) + |A|F(h_2, \theta), \\ h_2 &= (|A| - 1)F(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_4, \theta), \\ h_3 &= (|A| - 1)F(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_1, \theta), \\ h_4 &= (k - |A|)F(h_4, \theta) + |A|F(h_3, \theta). \end{aligned} \tag{6}$$

Введем следующие обозначения: $e^{h_{ij}} = z_{ij}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, q-1$. Тогда последнюю систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} z_{1j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|}, \\ z_{2j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_{3j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_{4j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|}, \end{aligned} \tag{7}$$

Введем обозначение

$$I = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \mid z_1 = z_2 = \dots = z_{q-1}\}. \tag{8}$$

Пусть $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, \dots, z_{iq-1}) \in I$, для всех $i = 1, 2, 3, 4$ положим $z_i = z_{i1} = \dots = z_{iq-1}$. Тогда система уравнений (7) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_1 + 1}{(q - 1)z_1 + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_2 + 1}{(q - 1)z_2 + \theta} \right)^{|A|}, \\ z_2 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_3 + 1}{(q - 1)z_3 + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_4 + 1}{(q - 1)z_4 + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_3 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_2 + 1}{(q - 1)z_2 + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_1 + 1}{(q - 1)z_1 + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_4 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_4 + 1}{(q - 1)z_4 + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_3 + 1}{(q - 1)z_3 + \theta} \right)^{|A|}. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем обозначение

$$f(z) = \frac{(\theta + q - 2)z + 1}{(q - 1)z + \theta}.$$

Рассмотрим отображение $W: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, определенное в следующем виде:

$$\begin{aligned} z'_1 &= (f(z_1))^{k-|A|} (f(z_2))^{|A|}, \\ z'_2 &= (f(z_3))^{|A|-1} (f(z_4))^{k+1-|A|}, \\ z'_3 &= (f(z_2))^{|A|-1} (f(z_1))^{k+1-|A|}, \\ z'_4 &= (f(z_4))^{k-|A|} (f(z_3))^{|A|}. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (9) эквивалентна системе уравнений $\mathbf{z} = W(\mathbf{z})$.

ЛЕММА 1. А. При $0 < \theta < 1$ функция $f(z)$ строго убывает, а при $1 < \theta$ строго возрастает.

Б. Отображение W имеет инвариантные множества следующих видов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 \mid z_1 = z_2 = z_3 = z_4\}, \\ I_2 &= \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 \mid z_1 = z_4, z_2 = z_3\}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. А. Если $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ является решением системы (9) при $\theta > 1$ и $|A| > k/2$, то либо $\mathbf{z} \in I_1$, либо $\mathbf{z} \in I_2$.

Б. Если $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ является решением системы (9) при $\theta < 1$, то либо $\mathbf{z} \in I_1$, либо координаты $\mathbf{z}$ будут разными, т.е. $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$.

ТЕОРЕМА 2. Для модели Поттса все H_A -слабо периодические меры Гиббса на I_1 , I_2 являются трансляционно-инвариантными.

Из утверждения 1 и теоремы 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Для модели Поттса при $\theta > 1$ и $|A| > k/2$ все H_A -слабо периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следствие 1 справедливо только при $\theta > 1$. Теорема 2 справедлива при всех $\theta > 0$.

Рис. 1. Графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = x$ при $k = 7$, $q = 3$ и $\theta = 0.001$.

Рассмотрим случай $0 < \theta < 1$ на множествах, отличных от инвариантных множеств I_1 , I_2 . Предположим $|A| = k$, тогда система уравнений (9) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= (f(z_2))^k, \\ z_2 &= (f(z_3))^{k-1}(f(z_4)), \\ z_3 &= (f(z_2))^{k-1}(f(z_1)), \\ z_4 &= (f(z_3))^k. \end{aligned} \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 3. При $|A| = k$ и $k \geq 6$ существуют критические значения θ_1 , θ_2 такие, что:

- 1) при $4k/(k+1+\sqrt{k^2-6k+1}) \leq q < 4k/(k+1-\sqrt{k^2-6k+1})$ и $0 < \theta < \theta_2$ существуют не менее трех слабо периодических мер Гиббса;
- 2) при $4k/(k+1+\sqrt{k^2-6k+1}) \leq q < 4k/(k+1-\sqrt{k^2-6k+1})$ и $\theta \geq \theta_2$ существует не менее одной слабо периодической меры Гиббса;
- 3) при $q \leq 4k/(k+1+\sqrt{k^2-6k+1})$ и $\theta_1 < \theta < \theta_2$ существуют не менее трех слабо периодических мер Гиббса;
- 4) при $q \leq 4k/(k+1+\sqrt{k^2-6k+1})$ и $\theta \leq \theta_1$ или $\theta \geq \theta_2$ существует не менее одной слабо периодической меры Гиббса, где

$$\theta_1 = \frac{4k - kq - q - q\sqrt{k^2 - 6k + 1}}{4k}, \quad \theta_2 = \frac{4k - kq - q + q\sqrt{k^2 - 6k + 1}}{4k}. \quad (12)$$

При $k = 7$, $q = 3$, $\theta = 0.001$ графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = x$ изображены на рис. 1, где функция $y = \varphi(x)$ определена в (16).

Рис. 2. График функции $\varphi(x) - x$ при $k = 8$, $q = 3$ и $\theta = 0.017$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 3 одна из слабо периодических мер является трансляционно-инвариантной. Все остальные меры являются H_A -слабо периодическими.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Новые меры Гиббса, описанные в теореме 3, дают возможность описать континуум множества непериодических гиббсовских мер, отличных от ранее известных.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $k = 6$ в условиях теоремы 3 число q может принимать только значения $q \leq 3$, т.е. $q = 2$ и $q = 3$. Но при больших значениях k число q может принимать довольно много значений. Это следует из соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4k}{k+1 - \sqrt{k^2 - 6k + 1}} - \frac{4k}{k+1 + \sqrt{k^2 - 6k + 1}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k^2 - 6k + 1} = \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При некоторых $\theta \in (0, 1)$ появляются новые H_A -слабо периодические меры Гиббса, отличные от мер из теоремы 3. Например, при $k = 8$, $q = 3$, $t = 0.017$ из рис. 2 видно, что существуют семь H_A -слабо периодических мер Гиббса, одна из которых является трансляционно-инвариантной.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если вместо множества (8) рассмотреть множество

$$I_m = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{q-1} \mid z_1 = z_2 = \dots = z_m \neq 1, z_{m+1} = \dots = z_{q-1} = 1\}, \quad m = 1, 2, \dots, q-2,$$

то, аналогично рассуждая, можно получить новые слабо-периодические меры Гиббса, которые не являются трансляционно-инвариантными.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. А. Легко проверить, что производная функции $f(z)$ по переменной z

$$f'(z) = \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)}{((q - 1)z + \theta)^2}$$

строго положительна при $\theta > 1$ и строго отрицательна при $0 < \theta < 1$.

Б. Инвариантность множества I_1 очевидна. Докажем инвариантность I_2 . Пусть $\mathbf{z}^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) \in I_2$, т. е. $z_1^* = z_4^*$, $z_2^* = z_3^*$. Отсюда и из (10) имеем

$$\begin{aligned} z'_1 &= (f(z_1^*))^{k-|A|} (f(z_2^*))^{|A|}, \\ z'_2 &= (f(z_2^*))^{|A|-1} (f(z_1^*))^{k+1-|A|}, \\ z'_3 &= (f(z_2^*))^{|A|-1} (f(z_1^*))^{k+1-|A|}, \\ z'_4 &= (f(z_1^*))^{k-|A|} (f(z_2^*))^{|A|}, \end{aligned}$$

т. е. $z'_1 = z'_4$, $z'_2 = z'_3$, а это значит, что $\mathbf{z}' = W(\mathbf{z}^*) \in I_2$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. А. Из системы уравнений $\mathbf{z} = W(\mathbf{z})$ получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{f(z_1)}{f(z_4)} \right)^{k-|A|} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_3)} \right)^{|A|-1} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_4)} \right), \quad (a_1)$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \left(\frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right), \quad (a_2)$$

$$\frac{z_1}{z_4} = \left(\frac{f(z_1)}{f(z_4)} \right)^{k-|A|} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_3)} \right)^{|A|}, \quad (a_3)$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \left(\frac{f(z_3)}{f(z_2)} \right)^{|A|-1} \left(\frac{f(z_4)}{f(z_1)} \right)^{k-|A|+1}, \quad (a_4)$$

$$\frac{z_2}{z_4} = \left(\frac{f(z_4)}{f(z_3)} \right), \quad (a_5)$$

$$\frac{z_3}{z_4} = \left(\frac{f(z_1)}{f(z_4)} \right)^{k-|A|} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_3)} \right)^{|A|-1} \left(\frac{f(z_1)}{f(z_3)} \right) \quad (a_6)$$

и предположим, что решение системы уравнений $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ при $\theta > 1$ не принадлежит множествам I_1 и I_2 . Тогда для координат этого решения выполняется одно из следующих условий:

$$(l_1) \quad z_1 > z_2 > z_3 > z_4;$$

$$(l_3) \quad z_1 > z_3 > z_2 > z_4;$$

$$(l_5) \quad z_1 > z_4 > z_3 > z_2;$$

$$(l_7) \quad z_2 > z_1 > z_3 > z_4;$$

$$(l_9) \quad z_2 > z_3 > z_4 > z_1;$$

$$(l_{11}) \quad z_2 > z_4 > z_3 > z_1;$$

$$(l_{13}) \quad z_3 > z_1 > z_2 > z_4;$$

$$(l_2) \quad z_1 > z_2 > z_4 > z_3;$$

$$(l_4) \quad z_1 > z_3 > z_4 > z_2;$$

$$(l_6) \quad z_1 > z_4 > z_2 > z_3;$$

$$(l_8) \quad z_2 > z_1 > z_4 > z_3;$$

$$(l_{10}) \quad z_2 > z_3 > z_1 > z_4;$$

$$(l_{12}) \quad z_4 > z_3 > z_1 > z_2;$$

$$(l_{14}) \quad z_4 > z_3 > z_2 > z_1;$$

$$\begin{array}{ll}
(l_{15}) & z_3 > z_2 > z_4 > z_1; \\
(l_{17}) & z_3 > z_4 > z_2 > z_1; \\
(l_{19}) & z_4 > z_1 > z_3 > z_2; \\
(l_{21}) & z_4 > z_2 > z_3 > z_1; \\
(l_{23}) & z_2 > z_4 > z_1 > z_3; \\
(l_{25}) & z_1 = z_2, \quad z_3 \neq z_4; \\
(l_{27}) & z_1 = z_4, \quad z_2 \neq z_3; \\
(l_{29}) & z_2 = z_4, \quad z_1 \neq z_3; \\
(l_{31}) & z_1 = z_2, \quad z_1 \neq z_4, \quad z_3 = z_4; \\
(l_{33}) & z_1 = z_4, \quad z_1 \neq z_2, \quad z_2 = z_3. \\
(l_{16}) & z_3 > z_2 > z_1 > z_4; \\
(l_{18}) & z_3 > z_4 > z_1 > z_2; \\
(l_{20}) & z_4 > z_1 > z_2 > z_3; \\
(l_{22}) & z_4 > z_2 > z_1 > z_3; \\
(l_{24}) & z_3 > z_1 > z_4 > z_2; \\
(l_{26}) & z_1 = z_3, \quad z_2 \neq z_4; \\
(l_{28}) & z_2 = z_3, \quad z_1 \neq z_4; \\
(l_{30}) & z_3 = z_4, \quad z_1 \neq z_2; \\
(l_{32}) & z_1 = z_3, \quad z_1 \neq z_4, \quad z_2 = z_4;
\end{array}$$

Если координаты решения $\mathbf{z}$ удовлетворяют условию (l_1) , то $z_1/z_3 > 1$, и в силу леммы 1 при $\theta > 1$ получим $f(z_2)/f(z_1) < 1$. Это противоречит равенству (a_2) , следовательно, координаты $\mathbf{z}$ не могут удовлетворять условию (l_1) .

Если $\mathbf{z}$ удовлетворяют условию (l_2) , то $z_1/z_3 > 1$. Согласно лемме 1 при $\theta > 1$ функция $f(z)$ строго возрастающая, и, следовательно, получим $f(z_2)/f(z_1) < 1$. Это противоречит равенству (a_2) .

Аналогично рассуждая, можно получить, что координаты решения системы уравнений $\mathbf{z} = W(\mathbf{z})$ при $\theta > 1$ не удовлетворяют условиям (l_i) , $i = 3, \dots, 22$. Условия (l_{23}) и (l_{24}) не выполняются при $\theta > 1$ и $|A| > k/2$. Докажем это для условия (l_{23}) . Пусть решение $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ удовлетворяет (l_{23}) , тогда левая часть равенства (a_3) меньше единицы. Легко проверить, что правая часть при $\theta > 1$ и $|A| > k/2$ будет больше единицы.

Если решение $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ удовлетворяет условию (l_{25}) , то из (a_2) вытекает, что $z_1 = z_3$, из (a_1) получим $z_1 = z_4$, следовательно, $z_3 = z_4$. Это противоречит (l_{25}) . Если координаты $\mathbf{z}$ удовлетворяют (l_{26}) , то из (a_2) следует, что $z_1 = z_2$, а из (a_4) вытекает, что $z_1 = z_4$, следовательно, $z_2 = z_4$, а это противоречит (l_{26}) . Также можно доказать, что координаты $\mathbf{z}$ не удовлетворяют условиям (l_i) , $i = 27, \dots, 33$.

Б. Согласно лемме 1 при $\theta < 1$ функция $f(z)$ строго убывает, но и в этом случае решения $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ системы (9) не удовлетворяют условиям (l_i) для $i = 25, \dots, 33$, следовательно, либо $\mathbf{z} \in I_1$, либо $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$. Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для инвариантного множества I_1 доказательство очевидно. Приведем доказательство для инвариантного множества I_2 . Система уравнений (9) на I_2 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
z_1 &= (f(z_1))^{k-|A|} (f(z_2))^{|A|}, \\
z_2 &= (f(z_2))^{|A|-1} (f(z_1))^{k+1-|A|}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Первое уравнение системы (13) делим на второе и получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \Rightarrow z_1 f(z_1) = z_2 f(z_2). \tag{14}$$

Легко проверить, что функция $\phi(z) = z f(z)$ строго возрастает (см. [11]). Отсюда следует, что соотношение (14) верно тогда и только тогда, когда $z_1 = z_2$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Первое и четвертое уравнения в (11) подставим соответственно в третье и второе уравнения из той же системы. В полученной системе уравнений третье уравнение подставим во второе и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= (f(z_2))^k, \\ z_2 &= (f((f(z_2))^{k-1} f((f(z_2))^k)))^{k-1} f((f((f(z_2))^{k-1} f((f(z_2))^k)))^k), \\ z_3 &= (f(z_2))^{k-1} f((f(z_2))^k), \\ z_4 &= (f(z_3))^k. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = (f((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)))^{k-1} f((f((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)))^k). \quad (16)$$

Заметим, что второе уравнение системы (15) имеет вид $\varphi(x) = x$. Известно, что при $0 < \theta < 1$ для модели Поттса существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса, которая соответствует решению $x = 1$ уравнения $\varphi(x) - x = 0$. Если доказать, что при $0 < \theta < 1$ функции $y = \varphi(x)$ и $y = x$ пересекаются не менее трех раз, то тем самым теорема 3 будет доказана. Действительно, легко проверить, что функция $f(x)$ ограниченная, отсюда следует, что и $\varphi(x)$ – тоже ограниченная функция. Ясно, что

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Рассмотрим производную функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (f((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)))^{k-2} f'((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)) (f(x))^{k-2} f'(x) \times \\ &\times [kf((f(x))^k) - f((f(x))^k) + kf'((f(x))^k)(f(x))^k] \times \\ &\times \{kf((f((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)))^k) - f((f((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)))^k) + \\ &+ kf'((f((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)))^k)(f((f(x))^{k-1} f((f(x))^k)))^k\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{\theta - 1}{q - 1 + \theta},$$

имеем

$$\varphi'(1) = \frac{(\theta - 1)^2(kq - 2k + 2k\theta - q + 1 - \theta)^2}{(q - 1 + \theta)^4}. \quad (17)$$

При $\varphi'(1) > 1$ функции $y = \varphi(x)$ и $y = x$ пересекаются как минимум трижды. Поэтому будем решать следующее неравенство:

$$\varphi'(1) > 1. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получим

$$\frac{4k(k-1)(\theta + (q-2)/2)(\theta - (k-1+q)/(k-1))(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)}{(q-1+\theta)^4} > 0,$$

где θ_1, θ_2 определены в (12).

Ясно, что если $k < 5$, то θ_1, θ_2 являются комплексными, а если $k = 5$, то $\theta_1 = \theta_2$ и неравенство (18) имеет решение

$$\left(-\infty, -\frac{q-2}{2}\right) \cup \left(\frac{k-1+q}{k-1}, +\infty\right),$$

но функция θ должна принадлежать интервалу $(0, 1)$.

Теперь рассмотрим $k \geq 6$. Предположим, что θ_1, θ_2 одновременно отрицательные, тогда равенство (18) верно только при $\theta > 1$, так как θ всегда положительна. Если $\theta_1 \leq 0, 0 < \theta_2 < 1$, т. е.

$$\frac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}} \leq q < \frac{4k}{k+1-\sqrt{k^2-6k+1}}$$

и $0 < \theta < \theta_2$, то неравенство (18) имеет решение $\theta \in (0, \theta_2)$, это доказывает п. 1 теоремы 3.

При $\theta = \theta_2$ прямая $y = x$ будет касательной к функции $y = \varphi(x)$, а при $\theta > \theta_2$ из ограниченности этой функции следует, что они пересекаются не менее чем в одной точке. Это доказывает п. 2 теоремы 3. Теперь докажем п. 3 теоремы 3.

Пусть $0 \leq \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$, тогда выполняется неравенство

$$q \leq \frac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}.$$

В этом случае неравенство (18) имеет решение $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

Доказательство п. 4 аналогично доказательству п. 2.

Теорема 3 доказана.

Благодарности. Автор глубоко признателен профессору У. А. Розикову за постановку задачи и полезные советы по работе.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, М., Мир, 1992.
- [2] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, *Докл. АН РУз*, **6–7** (1992), 4–7.
- [7] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [8] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.
- [9] C. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, *Description of the translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree*, arXiv:1310.6220.
- [10] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **160**:3 (2009), 507–516.
- [11] М. М. Рахматуллаев, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 477–493.