Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Некрасов, А. А. Рослый, С. Л. Шаташвили, Координаты Дарбу, функционал Янга–Янга и калибровочная теория, *ТМФ*, 2014, том 181, номер 1, 86–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:08:02

© 2014 г.

Н. А. Некрасов*, А. А. Рослый^{†‡},
С. Л. Шаташвили^{§¶¶¶}

КООРДИНАТЫ ДАРБУ, ФУНКЦИОНАЛ ЯНГА–ЯНГА И КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ

Пространство модулей плоских SL_2 -связностей на римановой поверхности Σ , имеющей выколотые точки, с фиксированными классами сопряженности монодромий вокруг выколотых точек наделено системой голоморфных координат Дарбу, в которых производящая функция многообразия SL_2 -оперов отождествляется с универсальной частью эффективного твистованного суперпотенциала четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории типа Гайотто, подвергнутой двумерной Ω -деформации. Это позволяет дать определение функционалов Янга–Янга для квантовой системы Хитчина в терминах классической геометрии пространства модулей локальных систем для дуальной калибровочной группы и связать ее с инстантонными вычислениями в четырехмерных калибровочных теориях в случае ранга, равного единице.

Ключевые слова: калибровочные теории, суперсимметрия, интегрируемые системы Хитчина, переменные Дарбу, квантование.

DOI: 10.4213/tmf8648

*Посвящается Л. Д. Фаддееву
по случаю его восьмидесятилетия*

1. ВВЕДЕНИЕ

Точная связь между микроскопическим определением квантовой теории поля и ее поведением при низких энергиях является предметом интенсивного изучения. В случае четырехмерных и двумерных суперсимметричных калибровочных теорий эта

*Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook University, Stony Brook, NY, USA.
E-mail: nikitastring@gmail.com

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: rosly@itep.ru

[‡]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

[§]The Hamilton Mathematics Institute, Trinity College, Dublin, Ireland

[¶]School of Mathematics, Trinity College, Dublin, Ireland

^{¶¶}Louis Michel Chair, IHES, Bures-sur-Yvette, France

^{¶¶¶}Международный математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия

связь затрагивает некоторые неожиданные области математической физики, такие как теория классических и квантовых интегрируемых систем и, в частности, знаменитый анзац Бете.

1.1. Анзац Бете. Анзац Бете представляет собой полезную технику, позволяющую находить спектр в таких квантовых интегрируемых системах, как спиновые цепочки или системы многих тел, или даже $(1 + 1)$ -мерные квантовые теории поля (см. [1]).

Вообще говоря, анзац заключается в нахождении набора состояний $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, которые характеризуются или некоторой алгебраической структурой, или некоторыми функциональными уравнениями, или иным образом. Физический смысл параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ может варьироваться в зависимости от ситуации, но чаще всего они представляют собой квазиимпульсы квазисвободных компонент.

Условие того, что состояние $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ действительно принадлежит (гильбертову) пространству состояний модели и является общим состоянием всех коммутирующих гамильтонианов, приобретает вид системы N уравнений для квазиимпульсов $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, которая, что удивительно, имеет потенциал

$$\frac{\partial Y(\lambda)}{\partial \lambda_k} = 2\pi i n_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Функция $Y(\lambda)$ зачастую является аналитической и многозначной. Назовем ее функцией Янга–Янга, поскольку С. Н. Янг и С. П. Янг использовали ее при анализе нелинейной модели Шредингера [2] (также см. [3]).

Рассмотрим в качестве примера простейшую спиновую цепочку, а именно $SU(2)$ -магнетик Гейзенберга с L спиновыми узлами. Ее можно решить с помощью алгебраического анзаца Бете, при этом собственное состояние всех коммутирующих гамильтонианов реализуется в виде N “квазичастиц”:

$$B(\lambda_1)B(\lambda_2) \cdots B(\lambda_N)|\text{vac}\rangle, \quad (2)$$

где квазиимпульсы λ_k являются решениями уравнения (1) с функцией

$$Y(\lambda) = \sum_{i=1}^N L \varpi_{1/2}(\lambda_i) + \sum_{i < j}^N \varpi_1(\lambda_i - \lambda_j), \quad (3)$$

где $\varpi_s(\lambda)$ – некоторая специальная функция, явный вид которой известен:

$$\varpi_s(\lambda) = (\lambda + is) \ln(\lambda + is) - (\lambda - is) \ln(\lambda - is), \quad (4)$$

а $B(\lambda)$ – оператор рождения квазичастицы с квазиимпульсом λ (подробнее см. [4]). Собственные числа всех коммутирующих гамильтонианов можно записать с помощью решений уравнения (1). Кроме того, функция $Y(\lambda)$, ее производные по параметрам или ее гессииан входят в явные выражения для норм векторов Бете (2), корреляционных функций локальных операторов (см., например, работу [5] и приведенную там литературу). Таким образом, функция $Y(\lambda)$ играет центральную роль в компактном представлении решения квантовой системы.

До сих пор в мире квантовой интегрируемости универсальность уравнения (1) остается экспериментальным фактом. Вопрос о смысле функции $Y(\lambda)$ несколько

сбивает с толку (и поэтому долгое время он игнорировался). Почему спектр квантовой задачи описывается неким уравнением (1), похожим на классическое? Почему функция $Y(\lambda)$ выглядит как классическое действие некоторой механической системы?

Выяснение этих вопросов является целью данной работы. Мы покажем (в ограниченном классе интегрируемых систем), что квантовую интегрируемую систему действительно можно связать с классической механической моделью, т. е. с симплектическим многообразием и лагранжевым подмногообразием, и что функция $Y(\lambda)$ отождествляется с производящей функцией этого подмногообразия в соответствующих координатах Дарбу. Таким образом, мы дадим геометрическое определение функции Янга–Янга для большого класса квантовых интегрируемых систем.

1.2. Калибровочные теории и квантовая интегрируемость. Оказалось, что квантовые калибровочные теории дают способ понять соотношение между квантовой интегрируемостью и классической симплектической геометрией.

В работе [6] была обнаружена связь между квантовой интегрируемой системой, N -частичным сектором теории нелинейного уравнения Шредингера и топологически скрученной двумерной калибровочной теорией. Константа связи квантовой интегрируемой системы отображается в эквивариантный параметр, а именно в твистованную массу калибровочной теории, т. е. в объемную константу связи. Эта тема вновь возникла в работах [7], [8], где показано, что полученный в работе [6] результат можно интерпретировать как утверждение о том, что двумерные наблюдаемые [9] топологической калибровочной теории, рассматриваемые в работе [6], порождаются функцией Янга–Янга [2] системы N нерелятивистских частиц на окружности с парным потенциалом вида δ -функции (аналогично N -частичному сектору системы нелинейных уравнений Шредингера). Все это вместе с более ранней работой о связи между квантовой интегрируемой системой многих тел и спиновыми системами типа Калоджеро–Мозера–Сазерленда, гармоническим анализом и топологическими теориями поля в пространстве-времени различных размерностей [10]–[13] (где сила взаимодействия на стороне квантовой системы соответствует параметрам линейных дефектов на стороне калибровочной теории) дает веские основания считать универсальной связь между калибровочной теорией, теорией представлений и квантовыми интегрируемыми системами.

Во всех этих случаях спектр наблюдаемых калибровочной теории отображается в спектр квантовых гамильтонианов на стороне интегрируемой теории.

В результате точная форма соответствия между анзацем Бете и калибровочной теорией была представлена в работах [14]–[16]:

Суперсимметричные вакуумы калибровочных теорий, обладающих двумерной $\mathcal{N} = 2$ супер-пуанкаре-инвариантностью, обычными твистованными массами и суперпотенциалом, являются стационарными состояниями некоторой квантовой интегрируемой системы (общими собственными состояниями коммутирующих гамильтонианов). Коммутирующие гамильтонианы являются генераторами твистованных киральных колец калибровочной теории. Квазиимпульсы частиц Бете являются заданными координатами в квазиклассическом пространстве модулей вакуумов (предположение об универсальности масс и суперпотенциала означает, что это кулоновская ветвь). Функционал Янга–Янга, генерирующий уравнения Бете квантовой

системы, является эффективным твистованным суперпотенциалом калибровочной теории. Таким образом, уравнения Бете выделяют суперсимметричные вакуумы калибровочной теории.

Указанное соответствие было проверено для большого класса спиновых систем, включая спиновые цепочки XXX , XXZ , XYZ для всех групп спинов и примесей, и для некоторых квантовых алгебраических интегрируемых систем, таких как эллиптическая модель Калоджеро–Мозера, ее релятивистская версия и такие пределы, как периодическая цепочка Тоды.

Калибровочные теории с двумерной супер-пуанкаре-инвариантностью не обязательно являются двумерными. В самом деле, в работе [17] изучались четырехмерные теории с четырехмерной супер-пуанкаре-инвариантностью, подвергнутые Ω -деформации в двумерие, что приводит к квантовым интегрируемым системам с интегрируемыми системами Виттена–Зайберга в качестве классических пределов [18]–[21], которые описывают пространство модулей вакуумов исходной четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории. Ω -фон был введен в квантовую теорию поля в работе [22], идея которой основана на более ранних работах [23], [24]. Его статистическая сумма ($\mathcal{Z}$ -функция) играет в дальнейшем важную роль.

1.3. Калибровочные теории из шестимерия. В настоящей статье мы изучим некоторое ограниченное множество четырехмерных $\mathcal{N} = 2$ калибровочных теорий, которые можно сконструировать из шестимерной $(0, 2)$ -суперконформной теории (открытой в работах [25], [26]) путем компактифицирования ее с частичным твистом на римановой поверхности [27]–[29]. К этим теориям применима ADE-классификация, и мы будем далее использовать ADE-обозначения.

Полученную теорию можно анализировать несколькими способами. С одной стороны, полагая размер поверхности Σ пренебрежимо малым, получаем четырехмерную суперконформную теорию, обладающую $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией. Расширение $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии до суперконформной можно понять из суперконформной симметрии шестимерной $(0, 2)$ -теории.

В самом деле, рассмотрим сначала компактификацию шестимерной теории на риманову поверхность Σ конечного размера с метрикой g_2 . Пусть g_4 – метрика в четырехмерном пространстве-времени X^4 . Лагранжиан теории на X^4 зависит от g_2 .

Если бы исходная шестимерная теория была калибровочной теорией, то получилась бы четырехмерная теория с калибровочной константой связи $\mathbf{g}_4$, зависящей от симплектических, т. е. кэлеровых, модулей поверхности Σ , например $\mathbf{g}_4^{-2} = \mathbf{g}_6^{-2} \text{Area}_\Sigma$, где

$$\text{Area}_\Sigma = \int_\Sigma \sqrt{\det g_2}. \quad (5)$$

Шестимерная $(0, 2)$ -теория, однако, не является калибровочной, поэтому между константами связи в четырехмерии и геометрией поверхности Σ связь более тонкая. Прежде всего получится не один, а несколько калибровочных групповых факторов в зависимости от топологии поверхности Σ , а соответствующие константы связи останутся конечными даже при $\text{Area}_\Sigma \rightarrow 0$. Константы связи определяются комплексной структурой поверхности Σ , задаваемой конформным классом $[g_2]$ метрики g_2 .

Конформное преобразование четырехмерной метрики на X^4

$$g_4 \mapsto l^2 g_4 \quad (6)$$

поднимается до конформного преобразования шестимерной метрики на $\Sigma \times X^4$:

$$g_6 = g_2 \oplus g_4 \mapsto l^2 g_6 = l^2 g_2 \oplus l^2 g_4. \quad (7)$$

Если поверхность Σ наделена метрикой конечного размера, тогда новая шестимерная метрика в правой части формулы (7) порождает новую метрику на поверхности Σ . Однако в пределе исчезающей площади поверхности Σ разницей можно пренебречь. Следовательно, в этом пределе теория становится конформной в четырехмерном смысле.

Не так просто понять, что это за теория, в четырехмерных терминах; сложно описать, скажем, состав полей и лагранжиан.

Если поверхность Σ – двумерный тор, то, используя язык струнной дуальности, можно прийти к выводу, что эта теория представляет собой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса, калибровочная группа которой определяется типом исходной шестимерной суперконформной теории. В частности, для теории A_1 в шестимерии получим $SU(2)$ -теорию в четырехмерии. Если Σ – это риманова поверхность рода g , то, как показал Гайотто [28], получится $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(2)^{3g-3}$ и с $2g - 2$ гипермультиплетами, преобразующимися по 3-фундаментальным представлениям относительно некоторых троек групп $SU(2)$ из общего числа $3g - 3$ таких факторов. Точный выбор этих троек неоднозначен – он задается трехвалентным графом, описывающим максимальное вырождение комплексной структуры поверхности Σ . Так, в частности, комплексифицированные калибровочные константы связи соответствующих групп $SU(2)$ отождествляются с параметрами, описывающими обычным образом асимптотику комплексной структуры при перетягивании ручек на римановой поверхности. В работе [28] предложены более общие теории, соответствующие комплексным кривым рода g с n выколотыми точками и некоторыми локальными данными, предписывающими комплексное число ν_k выколотой точке z_k . В частности, знаменитая $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ -теория с $N_f = 4$ фундаментальными гипермультиплетами соответствует кривой рода 0, сфере с четырьмя выколотыми точками. Одномерное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \approx \mathbb{CP}^1$ комплексных структур на сфере с четырьмя выколотыми точками параметризует калибровочную константу связи калибровочной группы $SU(2)$. Замечательно, что уже в этой теории проявляется нетривиальная S-дуальность теории $\mathcal{N} = 2$. В пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ имеются три точки максимального вырождения. Калибровочную теорию в окрестности каждой точки можно отождествить с $SU(2)$ -теорией с четырьмя фундаментальными гипермультиплетами, однако связь между калибровочными константами связи и массами мультиплетов материи в трех соответствующих областях слабой связи нетривиальна – это не те же самые калибровочные группы и не те же самые мультиплеты материи, которые уже наблюдались в работе [30] на уровне кривых Виттена–Зайберга. В частности, триальность, перемешивающая представления глобальной группы симметрии $SO(8)$, отождествляется с модулярной группой пространства $\mathcal{M}_{0,4}$ (см. [28]).

1.4. Ω -фон. Любая $\mathcal{N} = 2$ четырехмерная суперсимметричная теория может быть подвергнута Ω -деформации. Деформация производится в три этапа.

1. Для данной четырехмерной теории T_4 находим шестимерную $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную калибровочную теорию T_6 , размерная редукция которой приводит к T_4 .

2. Компактифицируем теорию T_6 на многообразие X^6 , которое является $\mathbb{R}^4$ -векторным расслоением над 2-тором $\mathbb{T}^2$ площади r^2 с плоской $\text{Spin}(4) = SU(2)_+ \times SU(2)_-$ -связностью, голономии которой вокруг двух нестягиваемых циклов равны $(e^{(ir/2)\text{Re}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sigma_3}, e^{(ir/2)\text{Re}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_3})$ и $(e^{(ir/2)\text{Im}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sigma_3}, e^{(ir/2)\text{Im}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_3})$. Кроме того, вложим $SU(2)_+$ -часть плоской связности в группу R -симметрии $SU(2)$ шестимерной теории.

3. Рассмотрим предел $r \rightarrow 0$, сохраняя постоянными комплексные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Таким образом получим Ω -деформированную теорию на $\mathbb{R}^4$. Параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ впервые появились в работах [6], [31] как эквивариантные параметры в интегралах по инстантонному и D-бранному пространству модулей.

В присутствии мультиплета материи погружение $SU(2)_+$ в группу R -симметрий неоднозначно, поскольку $SU(2)_+$ можно также погрузить в группу глобальных симметрий. Другими словами, массы четырехмерных мультиплетов материи можно сдвинуть на величину, кратную $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Можно также сформулировать Ω -деформированные теории на более общих четырехмерных многообразиях X^4 . Для этого достаточно наличия $U(1)$ - или $U(1) \times U(1)$ -изометрии (вероятно, возможно также расширить это определение на многообразия с $U(1)$ -инвариантной конформной структурой, но здесь мы не будем это обсуждать). Идея состоит в использовании X^4 -расслоения над $\mathbb{T}^2$ на этапе 2 приведенной выше процедуры, твистованного элементами группы симметрий многообразия X^4 , которые стремятся к единичному при $r \rightarrow 0$.

Технически эта процедура сводится к замене присоединенного скаляра σ в $\mathcal{N} = 2$ четырехмерном векторном мультиплете оператором:

$$\sigma \mapsto \sigma + \varepsilon_1 \nabla_{\varphi_1} + \varepsilon_2 \nabla_{\varphi_2}, \quad (8)$$

где ∂_{φ_1} и ∂_{φ_2} – два векторных поля на X^4 , генерирующие $U(1) \times U(1)$ -действие.

В настоящей работе, так же как и в работе [17], нас будет интересовать частный случай Ω -деформации, когда $\varepsilon_2 = 0$. В этом случае четырехмерная $\mathcal{N} = 2$ супер-пуанкаре-инвариантность сводится к двумерной $\mathcal{N} = 2$ супер-пуанкаре-инвариантности. В духе работ [14], [16] параметр $\varepsilon_1 = \hbar$ отождествляется с постоянной Планка квантовой интегрируемой системы, полученной квантованием интегрируемой системы Виттена–Зайберга, соответствующей теории T_4 .

Указанное соответствие можно считать упрощенной версией соответствия между М-теорией и струнной теорией [32] в том смысле, что постоянная Планка одной теории переходит в геометрический параметр другой.

1.5. Двумерные плоские связности и многомерные калибровочные теории. Пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$ плоских связностей (или, что то же самое, локальных систем) с калибровочной группой G на римановой поверхности Σ рода g с конечным числом n выколотых точек, имеющей заданные классы сопряженности ν монодромий вокруг выколотых точек, часто встречается при изучении двумерных

и трехмерных калибровочных теорий, таких как теория Янга–Миллса в двумерии [33], [9] и теория Черна–Саймонса в трехмерии [34]. В таком контексте наиболее естественным является случай компактной группы G .

В попытках описать двумерную [35]–[38] или трехмерную [39] квантовую гравитацию с использованием формализма тетрад и спин-связности важны и некомпактные калибровочные группы, такие как $SL(2, \mathbb{R})$ или $SL(2, \mathbb{C})$.

Несмотря на некоторый прогресс [40], [41] в этом направлении, все еще отсутствуют удовлетворительное построение калибровочной теории квантовой гравитации [42].

В последнее время для изучения четырехмерных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий, полученных компактификацией шестимерной $(0, 2)$ -суперконформной теории типа A_1 на римановой поверхности Σ , повсеместно стали использоваться пространства модулей плоских связностей $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$ на римановой поверхности Σ , как с выколотыми точками, так и без них, с комплексными калибровочными группами, такими как $SL(2, \mathbb{C})$ или $PGL(2, \mathbb{C})$. В дальнейшем мы часто будем использовать более короткое обозначение $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\text{loc}}$ или $\mathcal{M}^{\text{loc}}$ вместо $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$.

Простейший способ понять роль пространства $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\text{loc}}$ – компактифицировать теорию на окружности $\mathbf{S}_{R_a}^1$ радиуса R_a . С одной стороны, результаты работы [43] показывают, что эффективным описанием результирующей теории является трехмерная $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная сигма-модель на многообразии M_{tot} , которое является тотальным пространством расслоения Виттена–Зайберга над пространством модулей вакуумов четырехмерной теории, другими словами, комплексным фазовым пространством интегрируемой системы Виттена–Зайберга. С другой стороны, принимая во внимание шестимерное $(0, 2)$ -происхождение четырехмерной теории, изменяя порядок компактификации на Σ и $\mathbf{S}_{R_a}^1$, мы приходим к картине, в которой пятимерная максимально суперсимметричная теория Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ (для общей A,D,E-теории типа $(0, 2)$ получим группу Ли типа A,D,E в качестве калибровочной группы) и пятимерной константой связи $\mathbf{g}_5^2 = R_a$ (так что инстантоны Янга–Миллса, которые являются солитонами $(4+1)$ -мерной теории, можно отождествить с модами Калуцы–Клейна шестимерной теории) компактифицируется далее с частичным твистом на поверхности Σ . Частичный твист превращает два из пяти присоединенных скаляров векторного мультиплетта в 1-форму со значениями в присоединенном расслоении на Σ .

В пределе исчезающе малого размера поверхности Σ приходим к трехмерной теории, которая, очевидно, представляет собой сигма-модель на пространстве модулей конфигураций с минимальной энергией. Последние являются комплексными связностями, $\mathcal{A} = A + i\phi$, которые плоски, $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0$, а также D-плоски, $D_A^* \phi = 0$, и которые рассматриваются по модулю калибровочных преобразований. Условие D-плоскости вместе с компактным калибровочным преобразованием можно использовать для обеспечения инвариантности относительно комплексных калибровочных преобразований. Таким образом, мы приходим к сигма-модели на пространстве модулей $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\text{loc}}$ комплексных плоских связностей на поверхности Σ , также известных как $G_{\mathbb{C}}$ -локальные системы. Кинетический член этой сигма-модели пропорционален $1/\mathbf{g}_5^2 = 1/R_a$. Как и в работе [43], мы приходим, таким образом, к выводу, что кэлеров класс метрики на $\mathcal{M}$ с точки зрения эффективного действия пропорционален $1/R_a$. Рассуждения, приводимые в работе [43], используют элек-

тромагнитную дуальность, что позволяет связать две рассмотренные выше точки зрения.

1.6. Гиперкэлэрова структура. Два приведенных выше описания эффективного таргет-пространства согласованы между собой. Они просто отвечают различным комплексным структурам на одном и том же многообразии. Таргет-пространство $\mathcal{N} = 4$ сигма-модели в трехмерии должно быть гиперкэлэровым многообразием. Для рассматриваемых нами теорий это многообразие является пространством модулей $\mathcal{M}_H$ решений уравнений Хитчина [44]

$$\begin{aligned} D_z \phi_{\bar{z}} &= 0, & D_{\bar{z}} \phi_z &= 0, \\ F_{z\bar{z}} + [\phi_z, \phi_{\bar{z}}] &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

которое и в самом деле является гиперкэлэровым (подробный обзор его свойств приведен в работе [45]). В комплексной структуре (ее обычно обозначают I), в которой компоненты $A_{\bar{z}}, \phi_z$ калибровочного поля и твистованные скаляры являются голоморфными, пространство $\mathcal{M}_H$ имеет структуру алгебраической интегрируемой системы [46], базой которой является пространство голоморфных дифференциалов степеней $d_1, d_2, \dots, d_r$, где $r = rk(G)$, $P_i(\phi_z) \in H^0(\Sigma, K_{\Sigma}^{d_i})$ – инвариантные многочлены степени d_i на $Lie(G)$, а слоен – якобиан (точнее, дополнение к некоторому дивизору в якобиане) спектральной кривой $\mathcal{C} \subset T^*\Sigma$, заданной уравнением (для $G = SU(N)$, для других групп Ли см. обзор [47])

$$\text{Det}(\phi_z - \lambda) = 0.$$

В комплексной структуре J , для которой голоморфными координатами являются компоненты

$$\mathcal{A}_z = A_z + i\phi_z, \quad \mathcal{A}_{\bar{z}} = A_{\bar{z}} + i\phi_{\bar{z}},$$

пространство $\mathcal{M}_H$ отождествляется (с точностью до обычных условий стабильности) с пространством модулей плоских комплексных $G_{\mathbb{C}}$ -связностей. И, наконец, $K = IJ$, а K -голоморфными координатами являются

$$A_z + \phi_z, \quad A_{\bar{z}} - \phi_{\bar{z}}.$$

Комплексная структура J выглядит естественной, если трехмерную теорию представлять себе происходящей из шестимерной $\mathcal{N} = 1$ калибровочной теории, компактифицированной на 3-многообразии $\Sigma \times \mathbf{S}_{r'}^1$ в пределе $r' \rightarrow \infty$.

Утверждение о том, что пространство $\mathcal{M}_H$ является гиперкэлэровым, означает существование целой 2-сферы комплексных структур,

$$\mathcal{I} = aI + bJ + cK, \quad \mathcal{I}^2 = -1,$$

для любых (a, b, c) таких, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, и 2-сферы соответствующих кэлэровых форм,

$$\omega_{\mathcal{I}} = a\omega_I + b\omega_J + c\omega_K, \quad (10)$$

где

$$\omega_I = \int_{\Sigma} \text{tr}(\delta A \wedge \delta A - \delta \phi \wedge \delta \phi), \quad (11)$$

$$\omega_J = \int_{\Sigma} \text{tr}(\delta A \wedge * \delta \phi), \quad (12)$$

$$\omega_K = \int_{\Sigma} \text{tr}(\delta A \wedge \delta \phi). \quad (13)$$

Для компактной поверхности Σ форма ω_I реализует нетривиальный класс когомологий для $\mathcal{M}_H$, тогда как ω_J и ω_K – когомологически тривиальны. Нормируем формы (10) так, чтобы ω_I реализовала целочисленный класс когомологий, сужение ω_I на подмногообразии Bun_G , где $\phi = 0$, является (с точностью до множителя, кратного $2\pi i$) кривизной канонической эрмитовой связности в детерминантном линейном расслоении L над Bun_G :

$$[\omega_I]|_{\text{Bun}_G} = c_1(L). \quad (14)$$

Если на римановой поверхности Σ имеется $n > 0$ выколотых точек, то все три симплектические формы ω_I , ω_J , ω_K на пространстве модулей решений уравнений Хитчина с источниками, вообще говоря, когомологически нетривиальны.

1.7. От четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ калибровочной теории к двумерной $\mathcal{N} = (4, 4)$ сигма-модели. Мы можем дополнительно компактифицировать теорию на окружность $\mathbf{S}^1_{R_b}$. С одной стороны, это приводит к двумерной $\mathcal{N} = (4, 4)$ сигма-модели с тем же самым таргет-пространством $\mathcal{M}_H$, кэлеров класс которой пропорционален R_b/R_a . Есть более общая конструкция, если начать с $(0, 2)$ -теории и компактифицировать ее на $E_\rho \times \Sigma$, где E_ρ – эллиптическая кривая с комплексным модулем ρ , получится двумерная сигма-модель на пространстве $\mathcal{M}_H$, снабженном комплексифицированным кэлеровым классом

$$[\varpi] = \rho[\omega_I]. \quad (15)$$

В двумерной $\mathcal{N} = 2$ сигма-модели можно рассмотреть такой топологический твист, который определяет A -модель, зависящую от симплектической структуры таргет-пространства, или такой, который определяет B -модель, зависящую от комплексной структуры таргет-пространства. $\mathcal{N} = (2, 2)$ -теория может быть твистована асимметричным способом, так что лево- и право-киральные фермионные 1-формы на мировом листе будут преобразовываться в $\bar{\partial}$ -производные бозонных полей на мировом листе, которые в таргет-пространстве голоморфны в двух различных комплексных структурах (I_+, I_-) (существуют также обобщения, использующие обобщенные комплексные структуры, но нам они не нужны; см. обсуждения и ссылки в работе [45]).

1.8. Ω -деформация как граничное условие. G -эквивариантные когомологии пространства Y со свободным G -действием изоморфны обычным когомологиям факторпространства Y/G . Как модуль над $H^*(BG)$ (которое является полиномиальным кольцом) это чистое кручение, и, следовательно, оно становится тривиальным после локализации.

Аналогично Ω -деформацию калибровочной теории в пространстве-времени X^4 со свободно действующей $U(1) \times U(1)$ -изометрией можно удалить переопределением полей и констант связи, как это объясняется в работе [48] для $X^4 = T^2 \times B^2$. С другой

стороны, как обсуждалось в п. 1.7, четырехмерная калибровочная теория, компактифицированная на T^2 , при низких энергиях сводится к сигма-модели на тотальном пространстве расслоения Виттена–Зайберга. Соотношение (15) при этом модифицируется, поскольку эффективный кэлоров параметр ρ и эффективный параметр комплексной структуры τ (асимптотическая калибровочная константа связи) смешиваются с параметрами Ω -деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Если группа $U(1) \times U(1)$ действует на четырехмерном многообразии X^4 с неподвижными точками, то преобразование, отображающее калибровочную теорию в сигма-модель, приближенно справедливо вне этих точек. Мировой лист $B^2 = X^4/T^2$ сигма-модели можно представлять себе как двумерное многообразие с углами, возможно некомпактное, и заменить эффект Ω -деформации, который невозможно убрать вблизи границы ∂B^2 , некоторыми граничными условиями, т.е. бранами в сигма-модели.

Как показано в работе [48], на гладкой связной компоненте границы ∂B^2 соответствующую брану можно интерпретировать как (A, B, A) -брану, которая в зависимости от дуальной точки зрения является или так называемой канонической коизотропной браной (cc -брана B^{cc} для краткости), или комплексной (для комплексной структуры J) лагранжевой браной (по отношению к ω_I и ω_K), известной как брана оперов B_{O_τ} в случае $SU(2)$ -пространства модулей Хитчина $\mathcal{M}_H$. Эта брана зависит от комплексной структуры τ римановой поверхности Σ , а топологическая теория поля, в которой она является БРСТ-инвариантной, от этого не зависит.

Компоненты на бесконечности $\partial B_\infty^2 = \overline{B}^2 \setminus B^2$ также появляются с некоторыми граничными условиями как в калибровочной теории, так и в эффективной сигма-модели. В работе [48] показано, что соответствующие браны B_γ^∞ также отвечают комплексным лагранжевым подмногообразиям средней размерности $\mathcal{L}_\gamma$ типа (A, B, A) , которые, в отличие от O_τ , определяются в топологических терминах (т.е. не зависящих от комплексной структуры на поверхности Σ), но могут зависеть от некоторых комбинаторных данных γ .

Далее мы будем обсуждать теории Гайотто типа A_1 . Для более подробного описания бран B^{cc} , B_{O_τ} , B_γ^∞ нам нужно обсудить геометрию пространства модулей плоских связностей.

1.9. Две двумерные теории. Предположим, что мы изучаем четырехмерную теорию на многообразии $X^4 = C^2 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}^1$, где C^2 топологически является диском с сигарной метрикой:

$$ds_{C^2}^2 = dr^2 + f(r) d\varphi_1^2, \quad (16)$$

где $f(r) \sim r^2$ при $r \rightarrow 0$ и $f(r) \sim R^2$ при $r \rightarrow \infty$ для некоторой константы R . Пусть φ_2 – угловая координата на втором сомножителе $\mathbf{S}^1$. Базой B^2 в этом случае является полуплоскость $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Предположим, что мы включаем Ω -деформацию, соответствующую изометрическому вращению C^2 , т.е. изометрии, генерируемой оператором $\partial/\partial\varphi_1$.

С одной стороны, мы можем связать эту теорию с сигма-моделью на мировом листе B^2 , как это сделано в работе [48]. Браной сигма-модели, соответствующей границе $r = 0$, является B^{cc} или ее Т-дуальная B_{O_τ} . Другая “граница” (при $r \rightarrow \infty$)

приводит к некоторому асимптотическому граничному условию, которое мы рассматриваем как брану $\mathcal{B}^\infty$, или $\mathcal{B}_\gamma^\infty$, если хотим указать тип γ граничных условий. Такую точку зрения мы назовем T_{rt} -теорией.

С другой стороны, можно посмотреть на эту теорию как на двумерную $\mathcal{N} = (2, 2)$ калибровочную теорию на мировом листе $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ с бесконечным числом полей, как в работе [17]. На таком двумерном языке Ω -деформация соответствует включению твистованной массы ε , соответствующей глобальной симметрии $U(1)$, которая является вращением диска C^2 . Назовем эту двумерную теорию T_{2t} -теорией.

Двумерную теорию при низких энергиях (в смысле теории на $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}^1$) можно описать сигма-моделью на комплексифицированной подалгебре Картана $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ калибровочной группы с эффективным твистованным суперпотенциалом $\mathcal{W}^{\text{eff}}(\sigma; \tau; m, \varepsilon)$. Здесь σ обозначает плоские координаты на $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$, τ – четырехмерные комплексифицированные калибровочные константы связи, которые отождествляются для A_1 -теорий Гайотто с комплексными модулями поверхности Σ при подходящей параметризации, m обозначает массы мультиплетов материи в четырехмерии, и, наконец, ε – параметр Ω -фона, который выступает в качестве двумерной твистованной массы. Этот суперпотенциал можно представить в виде суммы двух составляющих: вклад от неподвижной точки в C^2 и вклад границы на бесконечности:

$$\widetilde{\mathcal{W}}^{\text{eff}}(\sigma, \tau, m, \varepsilon, \gamma) = \varepsilon \left(\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}, \frac{m}{\varepsilon} \right) - \mathcal{W}_\infty \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}, \frac{m}{\varepsilon}, \gamma \right) \right). \quad (17)$$

Вклад неподвижной точки $-\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}(\sigma/\varepsilon; m/\varepsilon)$ – вычисляется по асимптотикам $\mathcal{Z}$ -функции следующим образом [17]:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}(\alpha, \nu) = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_2 \ln \mathcal{Z}(\alpha\varepsilon, \tau, \nu\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon_2). \quad (18)$$

Левая часть не зависит от ε , что следует из асимптотической конформной инвариантности рассматриваемой калибровочной теории.

Вклад от области на бесконечности $-\mathcal{W}_\infty(\alpha; \nu, \gamma)$ – не зависит от τ . Это видно из такого наблюдения [22], что Ω -деформированная калибровочная теория вдали от неподвижных точек изометрии, используемой в Ω -фоне, находится в режиме крайне слабой связи. Таким образом, ничего интересного в связи с внутренностью многообразия не ожидается. Однако, если разрезать сигару C^2 при некотором конечном значении r с целью получить инфракрасный регулятор, то по аналогии с анализом, проведенным в работах [49], [50], можно рассчитывать на некую эффективную трехмерную суперсимметричную калибровочную теорию на произведении окружности на бесконечности $\mathbf{S}_\infty^1$ и цилиндра $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}^1$. По сравнению со случаем, рассмотренным в указанных работах, у нас есть половина суперсимметрии, так что трехмерная теория имеет только четыре суперзаряда и после компактификации на $\mathbf{S}_\infty^1$ генерирует твистованный суперпотенциал вида, изученного в работах [14], [15]:

$$\mathcal{W}_\infty(\alpha; \nu, \gamma) \sim \sum_\ell \text{Li}_2(e^{\ell(\alpha, \nu)}), \quad (19)$$

где суммирование проводится по заряженным полям материи, а ℓ – линейная функция масс и вакуумных ожиданий скаляров калибровочного мультиплета. Существующие на $\mathbf{S}_\infty^1$ степени свободы зависят от некоторых комбинаторных данных γ ,

которые ниже мы представим в более явной форме. Но мы не будем пытаться более точно сопоставить граничную теорию с соответствующим суперпотенциалом. Вместо этого мы сосредоточимся на исследовании $\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}$.

1.10. Твистованный суперпотенциал как производящая функция. Наша основная гипотеза состоит в следующем:

Эффективный твистованный суперпотенциал теории на $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}^1$, полученный локализацией в неподвижной точке на C^2 , по существу, является разницей производящих функций лагранжеских подмногообразий $\mathcal{O}_\tau$ и $\mathcal{L}_\gamma$ в пространстве $\mathcal{M}^{\text{loc}}$, определенных в подходящей системе координат Дарбу на $\mathcal{M}^{\text{loc}}$. Суперсимметричные вакуумы T_{2t} -теории соответствуют точкам пересечения $v \in \mathcal{O}_\tau \cap \mathcal{L}_\gamma$, также являющимся вакуумами T_{4t} -теории, на которые наложены соответствующие D-бренные граничные условия.

Это утверждение можно считать улучшением результата Бейлинсона и Дринфельда [51], которые показали, что при голоморфном квантовании системы Хитчина для группы G спектр (в смысле коммутативной алгебры) твистованных дифференциальных операторов, например, абстрактных квантовых коммутирующих гамильтонианов, канонически отождествляется с $\mathcal{O}_\tau$ для дуальной группы ${}^L G$. В настоящей работе мы сосредоточимся на $G = PGL(2, \mathbb{C})$, ${}^L G = SL(2, \mathbb{C})$. Наше утверждение состоит в том, что в системе координат Дарбу (α, β) производящая функция $\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}(\alpha, \nu)$ многообразия оперов

$$\beta = \frac{\partial \mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}(\alpha, \nu)}{\partial \alpha}, \quad (20)$$

по существу, является функцией Янга–Янга квантовой системы Хитчина. Точнее, функция Янга–Янга $\mathcal{Y}(\alpha, \nu, \tau, \gamma)$ квантовой системы Хитчина зависит от комплексной структуры τ на поверхности Σ (так же как и интегрируемая система Хитчина) и от выбора “вещественного слоя”, который определяет пространство состояний $\mathcal{H}_\gamma$. Мы утверждаем, что

$$\mathcal{Y}(\alpha, \nu, \tau; \gamma) = \mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}(\alpha, \nu) - \mathcal{W}_\gamma(\alpha, \nu), \quad (21)$$

другими словами, с точностью до не зависящего от τ вклада, твистованный суперпотенциал $\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}(\alpha, \nu)$, полученный с помощью четырехмерных инстантонных вычислений (18), является функцией Янга–Янга. В самом деле, координаты (α, β) определены с точностью до $2\pi i\mathbb{Z}$, так что уравнение Бете

$$\frac{\partial \mathcal{Y}(\alpha, \nu, \tau, \gamma)}{\partial \alpha_k} = 2\pi i n_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}, \quad (22)$$

определяет спектр

$$E_k(\vec{n}) = \frac{\partial \mathcal{Y}(\alpha, \nu, \tau, \gamma)}{\partial \tau_k} \quad (23)$$

квантовой системы Хитчина.

Поясним смысл уравнения (23). Классические гамильтонианы системы Хитчина типа A_1 представляют собой квадратичные дифференциалы с полюсами второго порядка в выколотых точках с предписанной главной сингулярностью. Точнее, для

данного базиса $\mu_{(k)\bar{z}}^z$, $k = 1, \dots, 3g - 3 + n$, дифференциалов Бельтрами, соответствующих вариациям комплексной структуры на поверхности Σ с выколотыми точками

$$\mu_{(k)\bar{z}}^z \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tau_k}, \quad (24)$$

получим

$$H_k = \int_{\Sigma} \mu_{(k)\bar{z}}^z \operatorname{Tr} \phi_z^2. \quad (25)$$

После деформационного квантования, гамильтонианы H_k становятся элементами некоммутативного кольца (чтобы действительно обнаружить некоммутативные алгебры, следует говорить о пучке D -модулей, поскольку глобально определенные объекты образуют коммутативную алгебру [51]), спектр которого мы хотим определить. Нужно указать пространство состояний, в котором представлены как некоммутативная алгебра, так и ее коммутативная подалгебра квантовых интегралов движения. Это делается (косвенным образом) с помощью выбора лагранжева подмногообразия $\mathcal{L}_{\gamma}$. В данный момент трудно сделать такое построение явным, поскольку оно использует Т-дуальность вдоль слоев расслоения Хитчина. Более подробно этот материал изложен в работах [52], [48]. Формула (23) на самом деле имеет смысл даже без указания пространства состояний. Она отражает каноническое отождествление [51] спектра коммутативной алгебры квантованных гамильтонианов Хитчина (твистованные дифференциальные операторы на Bun_G) с многообразием оперов. В самом деле, $\mathcal{O}_{\tau}$ – лагранжево подмногообразие в $\mathcal{M}^{\operatorname{loc}}$. Когда мы инфинитезимально изменяем комплексную структуру τ , соответствующее изменение лагранжева подмногообразия описывается замкнутой 1-формой, заданной на $\mathcal{O}_{\tau}$, т.е. голоморфной функцией, поскольку множество оперов является односвязным. Эту функцию можно рассчитать локально, используя уравнение Гамильтона–Якоби, что приводит к выражению (23) в “статической калибровке”, в которой можно увидеть деформацию $\mathcal{O}_{\tau}$ при фиксированном α – “лагранжевой части данных монодромии”.

Закончим несколькими комментариями. В контексте квантовых интегрируемых систем функция Янга–Янга определяется как потенциал уравнений Бете, который определен с точностью до константы, которая может быть функцией параметров этой системы, таких как в нашем случае параметры комплексной структуры τ . Эту неоднозначность можно частично устранить требованием, чтобы производные функции Янга–Янга по параметрам τ_k соответствовали подходящим образом нормированным операторам Φ_k , образующим базис в пространстве квантовых интегралов движения.

Собственное значение $E_k(\vec{n})$ в формуле (23) посчитано на решении уравнения (22) и зависит от дискретных параметров $\vec{n}$. Очевидно, что неоднозначность, о которой говорилось выше, не влияет на разности уровней $E_k(\vec{n}) - E_k(\vec{n}')$.

Подчеркнем, что оба уравнения (22) и (23) имеют смысл при любом выборе координат Дарбу на $\mathcal{M}^{\operatorname{loc}}$, поскольку они выражают в координатах два геометрических факта: 1) собственные состояния квантовой системы соответствуют точкам пересечения v двух лагранжевых подмногообразий в пространстве $\mathcal{M}^{\operatorname{loc}}$; 2) собственные значения квантовых гамильтонианов являются функциями на многообразии оперов, генерирующими его деформации, которые отвечают вариациям комплексной структуры на поверхности Σ , вычисленным в точках пересечения v . Выбранный для

записи этих уравнений способ использует представления о соответствии между анзацем Бете и калибровочной теорией [14]–[16], изложенные в работе [17] для случая двумерного Ω -фона. Другое, тесно связанное соответствие открыто в работе [53], где показано, что на общем Ω -фоне $\mathcal{Z}$ -функция задает конформный блок некоторой двумерной конформной теории поля, это удалось выяснить для большого класса калибровочных теорий. Двумерный Ω -фон переходит (со стороны конформной теории) в классический предел соответствия, изложенного в работе [53], что очевидно из определений (18), (21) и выражений (22), (23). Таким образом, должна существовать возможность такого понимания уравнения (23), которое предполагает, что E_k можно выразить через некий потенциал в любой координатной системе Дарбу, как это следует из объяснения, приведенного в работе [48] в конформной теории поля без привлечения результатов работы [53]. Это действительно было сделано в работе [54] для поверхности нулевого рода с выколотыми точками. Изложенное, таким образом, исключительно на языке конформной теории поля соотношение (23) напоминает другое соотношение в классической теории Лиувилля (для конкретных значений параметра ν), известное из работы [55], в нем только надо заменить $\mathcal{U}$ на голоморфную часть классического действия Лиувилля. Указанные связи с работой [54], а также с другими упомянутыми выше статьями по конформной теории поля должны иметь далеко идущие последствия.

В этом смысле соотношения (22), (23) не определяют функцию Янга–Янга $\mathcal{U}(\alpha, \tau, \nu, \gamma)$. Однако, если обе координаты α и β фиксированы, функция Янга–Янга определяется лагранжевыми подмногообразиями $\mathcal{O}_\tau$ и $\mathcal{L}_\gamma$, и утверждение о том, что зависящий от τ вклад совпадает с твистованным суперпотенциалом локализованной четырехмерной калибровочной теории (18), становится совсем нетривиальным. Это утверждение не имело бы места, если выбрать вместо наших координат (α, β) , например, координаты Фока–Гончарова [56], которые с большим успехом используются в работе [29].

2. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ ПЛОСКИХ СВЯЗНОСТЕЙ

Напомним, что мы попеременно используем равноправные обозначения $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$, $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{loc}}$ и $\mathcal{M}^{\text{loc}}$.

2.1. Модули плоской связности: явное описание. Пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$ плоских связностей – это пространство классов эквивалентности гомоморфизмов фундаментальной группы поверхности рода g с n выколотыми точками в калибровочную группу G , при условии, что класс сопряженности $[g_k]$ образа простой петли g_k , окружающей k -ю выколотую точку, оказывается в конкретном классе сопряженности в группе G , который мы обозначим через ν_k . В случае $G = SL(2, \mathbb{C})$ будем считать ν_k комплексным числом по модулю действия аффинной группы Вейля, которое меняет знак параметра ν_k и смещает его на целое число. Инвариантом является след $m_k \in \mathbb{C}$ матрицы монодромии g_k вокруг выколотой точки z_k :

$$m_k = 2 \cos 2\pi \nu_k = \text{tr } g_k. \quad (26)$$

Точнее, следует изучать пространство модулей плоских G -связностей на поверхности Σ с удаленными n маленькими дисками. Это пространство модулей очень легко

Рис. 1. Генераторы для $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$.

отождествить с пространством $(2g + n)$ -наборов элементов из G , $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_g, \mathbf{b}_g; \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n)$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{g}_n \mathbf{g}_{n-1} \cdots \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_1 \prod_{l=1}^g \mathbf{a}_l \mathbf{b}_l \mathbf{a}_l^{-1} \mathbf{b}_l^{-1} = 1, \quad (27)$$

рассматриваемых с точностью до одновременного сопряжения

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_g, \mathbf{b}_g; \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n) \sim \\ &\sim (h^{-1} \mathbf{a}_1 h, h^{-1} \mathbf{b}_1 h, \dots, h^{-1} \mathbf{a}_g h, h^{-1} \mathbf{b}_g h; h^{-1} \mathbf{g}_1 h, \dots, h^{-1} \mathbf{g}_n h) \end{aligned} \quad (28)$$

для любого $h \in G$, с фиксированными классами сопряженности, которые в случае $G = SL(2, \mathbb{C})$ имеют вид $\text{tr } \mathbf{g}_k = 2 \cos 2\pi \nu_k$.

Заметим, что это отождествление зависит от выбора генераторов фундаментальной группы дополнения $\Sigma \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ такого, как, например, на рис. 1. Зафиксировав такой выбор и набор чисел $(\nu_1, \dots, \nu_n)$, мы можем считать пространство функций на $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$ кольцом, порожденным следами матриц монодромий вокруг нестягиваемых петель. Это можно считать определением $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$ как аффинного многообразия.

Действуя по-другому, как в геометрической теории инвариантов, надо было бы выбрать подмножество стабильных точек. Этот выбор зависит от набора n вещественных чисел $r_1, \dots, r_n$. Чтобы правильно провести эту процедуру, нужно использовать уравнения Хитчина [44] с дельта-образными источниками (см., например, [12], [57]–[61]). В дальнейшем мы не будем это обсуждать.

2.2. Симплектическая форма. Пространство модулей плоских связностей на компактной римановой поверхности является симплектическим многообразием [33] с симплектической формой, представимой в пространстве всех связностей в виде

$$\Omega = \int_{\Sigma} \text{Tr } \delta A \wedge \delta A. \quad (29)$$

Рис. 2. Пересекающиеся петли γ_1, γ_2 и простые петли $\gamma_{x,1,2}^\pm$.

При изучении модулей плоских связностей на поверхности с границами можно использовать пуассоново описание. Кроме того, при конечномерном описании пространства модулей таким, как, например, в соотношении (27), пуассонову структуру на пространстве модулей можно получить из пуассоновой структуры на пространстве граф-связностей [62]–[64]. Иначе, можно использовать формализм работы [56] для описания симплектической формы и некоторый набор координат Дарбу (отличающихся от координат (α, β) , которые мы введем ниже), связанных с триангуляциями поверхности Σ отмеченными точками (этот формализм работает, если есть хотя бы одна выколотая точка). (Другие подходы см. в работах [65]–[68].)

Используя любой из указанных выше подходов или даже основную формулу (29), которая определяет структуру Пуассона в пространстве всех связностей, получим, что скобка Пуассона петель Вильсона в фундаментальном представлении задается “скейн-соотношениями” [66], [67]:

$$\begin{aligned} \left\{ \text{tr } P \exp \oint_{\gamma_1} \mathcal{A}, \text{tr } P \exp \oint_{\gamma_2} \mathcal{A} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_1 \cap \gamma_2} \left(\text{tr } P \exp \oint_{\gamma_{x,1,2}^+} \mathcal{A} - \text{tr } P \exp \oint_{\gamma_{x,1,2}^-} \mathcal{A} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где петли $\gamma_{x,1,2}^\pm$ получаются путем удаления малой окрестности точки пересечения x и замещения ее двумя дугами с образованием одной петли, как на рис. 2.

2.2.1. Случай сферы с четырьмя выколотыми точками. Сначала изучим случай $g = 0$, $n = 4$ более подробно. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$. Комплексная размерность пространства модулей $\mathcal{M}_{0,4;\nu}$ равна 2:

$$\mathcal{M}_{0,4;\nu} = \left\{ (g_1, g_2, g_3) \in G^{\times 3} \left| \begin{array}{l} \text{tr } g_i = m_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \text{tr}(g_3 g_2 g_1) = m_4 \end{array} \right. \right\} / G, \quad (31)$$

где G действует как одновременное сопряжение $(g_1, g_2, g_3) \mapsto (h^{-1} g_1 h, h^{-1} g_2 h, h^{-1} g_3 h)$. Образующие координатного кольца на $\mathcal{M}_{0,4;\nu}$ можно взять в виде

$$A = m_{12} = \text{tr}(g_1 g_2), \quad B = m_{23} = \text{tr}(g_2 g_3), \quad C = m_{13} = \text{tr}(g_1 g_3) \quad (32)$$

Рис. 3. Петли A и B . Рис. 4. Петли C^+ и C^- .

с одним полиномиальным соотношением (которое легко проверить)

$$W_{0,4}(A, B, C) = 0, \\ W_{0,4} = ABC + A^2 + B^2 + C^2 - 4 - A(m_3m_4 + m_1m_2) - B(m_1m_4 + m_2m_3) - \\ - C(m_1m_3 + m_2m_4) + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_1m_2m_3m_4. \quad (33)$$

Применение правила (30) к петлям, нарисованным вокруг пар точек z_1, z_2 и z_2, z_3 соответственно, как на рис. 3, приводит к разнице двух петель,

$$\{A, B\} = C^+ - C^-,$$

изображенной на рис. 4, которую можно выразить через A, B и C следующим образом:

$$C^+ = \text{tr}(g_2^{-1}g_1g_2g_3) = -C - AB + m_1m_3 + m_2m_4, \quad C^- = C, \quad (34)$$

а также в виде производной функции $W_{0,4}$:

$$\{A, B\} = \frac{\partial W_{0,4}}{\partial C}. \quad (35)$$

При выводе (34) использовалось следующее тождество для $SL(2)$ -матриц:

$$\text{tr } g \text{ tr } h = \text{tr}(gh) + \text{tr}(gh^{-1}), \quad (36)$$

которое также можно выразить графически: для любого $x \in \gamma_1 \cap \gamma_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} P \exp \oint_{\gamma_1} \mathcal{A} \times \operatorname{tr} P \exp \oint_{\gamma_2} \mathcal{A} &= \\ &= \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} = \\ &= \operatorname{tr} P \exp \oint_{\gamma_{x12}^+} \mathcal{A} + \operatorname{tr} P \exp \oint_{\gamma_{x12}^-} \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Величины A, B, C можно запараметризовать с помощью координат Дарбу (α, β) на $\mathcal{M}_{0,4;\nu}$, т. е. $\{\alpha, \beta\} = 1$,

$$\begin{aligned} A &= e^\alpha + e^{-\alpha}, \\ B(A^2 - 4) + 2(m_2 m_3 + m_1 m_4) - A(m_1 m_3 + m_2 m_4) &= \\ &= (e^\beta + e^{-\beta}) \sqrt{c_{12}(A) c_{34}(A)}, \\ (2C + AB - m_1 m_3 - m_2 m_4)(e^\alpha - e^{-\alpha}) &= \\ &= (e^\beta - e^{-\beta}) \sqrt{c_{12}(A) c_{34}(A)}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$c_{ij}(A) = A^2 + m_i^2 + m_j^2 - A m_i m_j - 4.$$

2.2.2. *Случай тора с одной выколотой точкой.* Теперь рассмотрим случай $g = 1$, $n = 1$. Пространство модулей имеет вид

$$\mathcal{M}_{1,1;\nu} = \{(g, h) \in G^{\times 2} \mid \operatorname{tr}(ghg^{-1}h^{-1}) = m\} / G. \quad (38)$$

На нем можно ввести координаты

$$A = \operatorname{tr} g, \quad B = \operatorname{tr} h, \quad C = \operatorname{tr} gh, \quad (39)$$

удовлетворяющие соотношению

$$\begin{aligned} W_{1,1}(A, B, C) &= 0, \\ W_{1,1} &= A^2 + B^2 + C^2 - ABC - m - 2, \end{aligned} \quad (40)$$

а скобку Пуассона, например, для A и B можно легко вычислить:

$$\{A, B\} = C - \frac{1}{2}AB. \quad (41)$$

Теперь локальные координаты (α, β) на $\mathcal{M}_{1,1;\nu}$, определенные соотношениями

$$\begin{aligned} A &= e^\alpha + e^{-\alpha}, \\ B &= (e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}) \sqrt{\frac{A^2 - m - 2}{A^2 - 4}}, \\ C &= (e^{\alpha+\beta/2} + e^{-\alpha-\beta/2}) \sqrt{\frac{A^2 - m - 2}{A^2 - 4}}, \end{aligned} \quad (42)$$

являются координатами Дарбу для скобки (41). Кстати, координаты (α, β) в формулах (42) являются координатой и импульсом для релятивистской системы двух тел Калоджеро–Мозера с константой связи ν – так называемой системы Руджинарса–Шнайдера, гамильтонианом которой является B (см. [11]).

2.2.3. Действия группы кос и модулярной группы. Набор генераторов $A, B, C, \dots$ кольца полиномиальных функций на M^{loc} зависит от выбора генераторов фундаментальной группы поверхности Σ (с выколотыми точками), как и координаты (α, β) , заданные формулами (37), (42). Например, в случае поверхности первого рода монодромии (g, h) определены по отношению к некоторому выбору циклов A и B . Также хорош выбор, например, (g, hg^n) при любом $n \in \mathbb{Z}$. Соответствующие координаты (α, β) преобразуются в $(\alpha, \beta \pm 2n\alpha)$. Существуют аналогичные формулы в случае поверхности нулевого рода. Мы обсудим их ниже.

3. КООРДИНАТЫ ДАРБУ

В этом разделе мы опишем систему координат в пространстве модулей $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$ плоских связностей $SL_2(\mathbb{C})$ на римановой поверхности с выколотыми точками и с фиксированными классами сопряженности монодромий вокруг выколотых точек.

3.1. Координатные карты, отвечающие разрезанию на штаны. Покроем пространство $\mathcal{M}_{g,n;\nu}$ координатными картами $\mathcal{U}_\Gamma$, которые занумерованы точками $\Gamma \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ в модулярном стеке Делиня–Мамфорда стабильных кривых рода g с n выколотыми точками, отвечающих максимально вырожденным римановым поверхностям. Эти точки находятся во взаимно однозначном соответствии с трехвалентными графами Γ с $b_1(\Gamma) = g$ и с n хвостами. У таких графов есть $3g - 3 + n$ внутренних ребер (ребро называется внутренним, если ни одна из его конечных точек не принадлежит хвосту), $2g - 2 + n$ внутренних (т. е. трехвалентных) вершин. Такой набор данных эквивалентен разрезанию поверхности Σ на штаны.

Свяжем с каждым внутренним ребром e пару комплексных чисел (α_e, β_e) с некоторыми дискретными отождествлениями. Ребро e отвечает простой петле γ_e на Σ , которая стягивается при вырождении комплексной структуры, соответствующей Γ . Голономия вокруг этой петли определяет α_e (с точностью до очевидной неопределенности):

$$\text{tr } P \exp \oint_{\gamma_e} \mathcal{A} = e^{\alpha_e} + e^{-\alpha_e}. \quad (43)$$

Правило расчета дуальных координат β_e следующее. Возможны две ситуации: две конечные точки ребра e различны – в этом случае назовем e *ребром рода 0* (рис. 5), или две конечные точки совпадают – в этом случае назовем e *ребром рода 1* (рис. 6). Каждая из двух конечных точек ребра e рода 0 имеет два других исходящих ребра, некоторые из них могут быть хвостами, некоторые из них могут совпадать (см. рис. 5). Разрезая вдоль простых петель на поверхности Σ , отвечающих ребрам, исходящим из двух конечных точек ребра e , получим сферу с четырьмя дырами, которая отрезана от Σ . Пронумеруем эти дыры так, чтобы две дыры на одном конце имели номера 1 и 2, а две другие – 3 и 4. Плоская связность на поверхности Σ ограничивается на плоскую связность на сфере с четырьмя дырами и задает инвариантные функции A, B, C , как в работе [32]. Тогда α и β , введенные по формулам (37), совпадают с α_e и β_e , соответствующими ребру e . Можно было бы неудачно пометить два ребра, исходящие из одного конца ребра e . Это привело бы к замене β_e на $\beta_e \pm \alpha_e$.

Для ребра рода 1 ситуация похожая, за исключением того, что есть только одна простая петля, которую можно разрезать. Это выделяет из поверхности Σ тор

Рис. 5. Ребра рода 0.

Рис. 6. Ребра рода 1.

с одной дырой. Ограничение плоской связности на этот тор задает инвариантные функции A, B и C , как в работе [39]. Используя теперь формулы (42), определим пару (α_e, β_e) для локального ребра рода 1.

3.1.1. Немного геометрии. Дадим обзор некоторых стандартных фактов о геометрии симплектических поверхностей, комплексификации евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского, а также о пространствах многоугольников.

Построим комплексную версию сферической и гиперболической геометрии многоугольников в $M^3 = \mathbf{S}^3$ или $M^3 = \mathbf{H}^3$. Оказывается, что координаты Дарбу α и β из предыдущего обсуждения можно использовать для описания геометрии четырехугольников в $M^3_C \approx G$. Обоснованием достаточно сложного анализа простой геометрии является тот факт, что обобщение координат Дарбу на случай $n > 4$ оказалось пригодным для описания n -угольников в группе G .

Рассмотрим группу G как аффинную гиперповерхность в четырехмерном комплексном векторном пространстве $V = \mathbb{C}^4 = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ комплексных (2×2) -матриц.

Рис. 7. Тетраэдр.

Наделим V комплексной метрикой:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(\text{tr}(XY) - \text{tr } X \text{ tr } Y), \quad (44)$$

которая, очевидно, инвариантна относительно действия группы $G \times G$:

$$X \mapsto (g_L, g_R) \cdot X = g_L X g_R^{-1}. \quad (45)$$

Группа G реализуется в виде гиперповерхности:

$$\langle g, g \rangle = 1 \Leftrightarrow g \in G. \quad (46)$$

Метрика (44) индуцирует комплексную метрику на G :

$$ds_G^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(dg^2) - \frac{1}{2}(\text{tr}(dg^2))^2 = -\frac{1}{2} \text{tr}(g^{-1} dg)^2, \quad (47)$$

где использовано тождество, справедливое в группе $G \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$:

$$g + g^{-1} = \text{tr } g \cdot 1. \quad (48)$$

Форма объема $dg_{11} dg_{12} dg_{21} dg_{22}$ на V индуцирует форму объема

$$\text{vol}_G = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(g^{-1} dg)^3$$

на G , которая нормализуется так, чтобы ее период на компактном 3-цикле $\mathbf{S}^3 \subset G$ был равен единице.

Для данных четырех элементов $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$, подчиняющихся условию $g_4 g_3 g_2 g_1 = 1$, построим комплексифицированный аналог гиперболического тетраэдра Δ (см. рис. 7). Его вершинами являются точки $(v_1 = 1, v_2 = g_1, v_3 = g_2 g_1, v_4 = g_3 g_2 g_1)$. Введем матрицу Грама для Δ :

$$C = \|c_{ij}\|_{i,j=1,\dots,4}, \quad c_{ij} = c_{ji} = \langle v_i, v_j \rangle. \quad (49)$$

Предположим, что эта матрица невырождена, $\text{Det } \mathcal{C} \neq 0$. Это означает, что векторы $v_1, \dots, v_4$ линейно независимы. В частности, поскольку $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ для любого i , получим $c_{ij} \neq \pm 1$ для любого $i \neq j$. Введем (гиперболический) угол α_{ij} по формуле $\text{ch } \alpha_{ij} = c_{ij}$.

Конечно, выбор α_{ij} при заданных c_{ij} неоднозначен даже с точностью до сдвига $2\pi i\mathbb{Z}$. Чтобы угол α_{ij} был единственным элементом в $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$, следует, наряду с c_{ij} , фиксировать $s_{ij} = \text{sh } \alpha_{ij}$. Ребро e_{ij} , соединяющее вершины v_i и v_j , является пересечением двумерной комплексной плоскости $E_{ij} = \text{Span}(v_i, v_j) \subset V$ и G :

$$e_{ij} = E_{ij} \cap G = \{t_1 v_i + t_2 v_j \mid t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 c_{ij} = 1, t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (50)$$

Можно отождествить e_{ij} с копией $\mathbb{C}^\times$, используя явную параметризацию: для $z \in \mathbb{C}^\times$ имеем

$$t_1 = \frac{e^{2\alpha_{ij}} - z^2}{z(e^{2\alpha_{ij}} - 1)}, \quad t_2 = \frac{e^{\alpha_{ij}}(z^2 - 1)}{z(e^{2\alpha_{ij}} - 1)}. \quad (51)$$

Метрика (47) ограничивается на e_{ij} следующим образом:

$$ds_{e_{ij}}^2 = -\left(\frac{dz}{z}\right)^2. \quad (52)$$

Таким образом, комплексная метрика (52) на e_{ij} представляет собой квадрат $(1, 0)$ -дифференциала $ds = i dz/z$. “Длина” ребра l_{ij} является периодом на ds вдоль 1-цепочки, соединяющей вершины v_i и v_j , которая представляет собой траекторию $\mathcal{C}_{ij}$ по координате z , соединяющую точки 1 и $e^{\alpha_{ij}}$:

$$\int_{\mathcal{C}_{ij}} ds = \alpha_{ij} \bmod (2\pi i\mathbb{Z}). \quad (53)$$

Грань f_{ijk} тетраэдра с вершинами v_i, v_j, v_k является пересечением трехмерного комплексного векторного пространства $F_{ijk} = \text{Span}(v_i, v_j, v_k) \subset V$ и G :

$$f_{ijk} = F_{ijk} \cap G = \{t_1 v_i + t_2 v_j + t_3 v_k \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}, t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2t_1 t_2 c_{ij} + 2t_1 t_3 c_{ik} + 2t_2 t_3 c_{jk} = 1\}. \quad (54)$$

Многообразие f_{ijk} диффеоморфно $T^*\mathbf{S}^2$. Для двух данных граней f_{ijk} и f_{jkl} с общим ребром l_{jk} введем угол β_{il} между ними как угол между плоскостями F_{ijk} и F_{jkl} , который определяется как угол между нормальными n_{ijk} и n_{jkl} при выбранной ориентации граней f_{ijk} и f_{jkl} . Поясним, что это такое.

Нормаль n к трехмерному векторному подпространству $F \subset V$ определим как одномерную комплексную прямую в V , $n \subset V$, ортогональную к F в смысле метрики (44): $\langle f, n \rangle = 0$ для любого $f \in F$. Существуют два вектора единичной нормы на n , которые отличаются знаком. Выбор одного из этих двух векторов единичной нормы означает выбор ориентации F в V . Обозначим вектор единичной нормы на n той же самой буквой n .

При фиксированной ориентации угол определяется по формуле

$$\text{ch } \beta_{il} = \langle n_{ijk}, n_{jkl} \rangle. \quad (55)$$

Изменение коориентации одной из двух плоскостей меняет угол β на $\pi i - \beta$. Это еще одна неоднозначность в дополнение к неоднозначности $\beta \mapsto -\beta$ и $\beta \mapsto \beta + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теперь сделаем следующее важное замечание (ср. с работой [69]): Пусть ${}^L\mathcal{C}$ – матрица гиперболических косинусов двугранных углов β_{ij} :

$${}^L\mathcal{C} = \|\operatorname{ch} \beta_{ij}\|_{i,j=1}^4, \quad (56)$$

тогда

$${}^L\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}_d^\vee}} \mathcal{C}^\vee \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}_d^\vee}}, \quad (57)$$

где $\mathcal{C}^\vee = \operatorname{Det}(\mathcal{C}) \mathcal{C}^{-1}$ – матрица миноров матрицы $\mathcal{C}$, а $\mathcal{C}_d^\vee$ – ее диагональная часть, например

$$\operatorname{ch} \beta_{ij} = \frac{\mathcal{C}_{ij}^\vee}{\sqrt{\mathcal{C}_{ii}^\vee \mathcal{C}_{jj}^\vee}}. \quad (58)$$

Неоднозначность в определении углов β , вносимая коориентацией, согласуется с неоднозначностью квадратного корня в выражении (58). Чтобы проиллюстрировать формулу (58), заметим, что векторы

$$v_i^\vee = \sum_{j=1}^4 \mathcal{C}_{ij}^\vee v_j \quad (59)$$

подчиняются условиям

$$\langle v_i^\vee, v_k \rangle = \operatorname{Det}(\mathcal{C}) \delta_{ik} \quad (60)$$

и

$$\langle v_i^\vee, v_j^\vee \rangle = \operatorname{Det}(\mathcal{C}) \mathcal{C}_{ij}^\vee. \quad (61)$$

Поэтому можно выбрать векторы нормали в виде

$$n_{ijk} = \varepsilon_{ijkl} \frac{v_l^\vee}{\sqrt{\operatorname{Det}(\mathcal{C}) \mathcal{C}_{ll}^\vee}}, \quad (62)$$

откуда сразу следует формула (58).

Матрицу ${}^L\mathcal{C}$ можно интерпретировать как матрицу Грама дуального тетраэдра

$${}^L\Delta \subset {}^L G = PGL(2, \mathbb{C}),$$

вершины которого являются нормальными к граням Δ с точностью до выбора ориентации.

Теперь вернемся к изучению пространства модулей $\mathcal{M}_{0,4;\vec{\nu}}$. С каждой точкой конечного покрытия пространства $\mathcal{M}_{0,4;\nu}$ мы свяжем тетраэдр (возможно, вырожденный) в G , с точностью до действия группы изометрий $G \times G$ метрики (44). Вершины тетраэдра выберем следующим образом:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (1, g_1, g_2 g_1, g_3 g_2 g_1). \quad (63)$$

 Рис. 8. Точки вырождения в $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$.

Можно легко посчитать соответствующую матрицу Грама,

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & m_1 & A & m_4 \\ m_1 & 2 & m_2 & B \\ A & m_2 & 2 & m_3 \\ m_4 & B & m_3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

что дает

$$\begin{aligned} -4C_{22}^\vee &= c_{34}(A), & -4C_{44}^\vee &= c_{12}(A), \\ 8C_{24}^\vee &= B(A^2 - 4) - A(m_1m_3 + m_2m_4) + 2(m_2m_3 + m_1m_4). \end{aligned} \quad (65)$$

3.1.2. Координаты Дарбу в пространстве $\mathcal{M}_{0,4;\nu}$. Теперь мы готовы ввести определение наших координат в случае сферы с четырьмя выколотыми точками. Существуют три точки максимального вырождения комплексной структуры, которые соответствуют каналам s , t и u древесных диаграмм рассеяния. Эти вырождения сталкивают точки $1-2, 3-4$, точки $1-4, 2-3$ и точки $1-3, 2-4$ соответственно (см. рис. 8). Покроем пространство модулей плоских связностей тремя координатными картами. На каждой карте $\mathcal{U}_i$ имеются координаты (α_i, β_i) , $i = s, t, u$. Связь координат (α_s, β_s) и (α_t, β_t) плоской связности на сфере, имеющей четыре выколотых точки, с основными голономиями $g_{1,2,3}$ изображена на рис. 9. Координаты (α_u, β_u) получаются с помощью действия модулярной группы

$$(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_2, g_2g_1g_2^{-1}, g_3), \quad (66)$$

которое отображает тетраэдр с вершинами $(1, g_1, g_2g_1, g_3g_2g_1)$ в тетраэдр с вершинами $(1, g_2, g_2g_1, g_3g_2g_1)$.

3.1.3. Координаты Дарбу для $\mathcal{M}_{0,n;\nu}$. Эти координаты определяются аналогично, им можно придать геометрическую интерпретацию через геометрию многоугольника с вершинами $(1, g_1, g_2g_1, \dots, g_{n-1}g_{n-2} \dots g_2g_1)$, разрезанного $n-3$ диагоналями на $n-2$ (комплексифицированных гиперболических или сферических) треугольников. Координата α_i , $i = 1, \dots, n-3$, представляет собой гиперболическую длину диагонали d_i , а координата β_i – двугранный угол между двумя смежными треугольниками с общим ребром d_i (см. рис. 10 для случая $n = 7$).

Рис. 9. Координаты (α_s, β_s) и (α_t, β_t) .

Рис. 10. От древовидного графа к многоугольнику, триангулированному диагоналями.

3.1.4. *Преобразования координат.* Рассмотрим преобразования координат, склеивающие наши системы координат на перекрытиях $\mathcal{U}_\Gamma \cap \mathcal{U}_{\Gamma'}$. Достаточно обсудить такие перекрытия, на которых два графа Γ и Γ' отличаются только одним ребром рода 0 или только одним ребром рода 1. В первом случае основным преобразованием будет $(\alpha_s, \beta_s) \mapsto (\alpha_t, \beta_t)$ для пространства $\mathcal{M}_{0,4;\nu}$. Напомним, что канонические преобразования, т. е. преобразования, сохраняющие симплектическую форму, порождаются так называемой производящей функцией $\mathcal{S}_{0,4}(\alpha_s, \alpha_t; \vec{\nu})$ такой, что

$$\beta_s = \frac{\partial \mathcal{S}_{0,4}}{\partial \alpha_s}, \quad \beta_t = \frac{\partial \mathcal{S}_{0,4}}{\partial \alpha_t}. \quad (67)$$

Используя формулы работы [70], легко получить, что $\mathcal{S}_{0,4}(\alpha_s, \alpha_t, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ является гиперболическим объемом тетраэдра ${}^L\Delta$, дуального тетраэдру Δ (рис. 9)

с длинной ребер $\alpha_s, \alpha_t, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, где $\mu_k = 2\pi i\nu_k$. Явную формулу можно вывести, используя результаты работы [69] (см. также [70]–[73]). Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \alpha_s + \mu_1 + \mu_2, & \mathcal{V}_2 &= \alpha_s + \mu_3 + \mu_4, \\ \mathcal{V}_3 &= \alpha_t + \mu_1 + \mu_4, & \mathcal{V}_4 &= \alpha_t + \mu_2 + \mu_3, \\ \mathcal{H}_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4, & \mathcal{H}_2 &= \alpha_s + \alpha_t + \mu_1 + \mu_3, \\ \mathcal{H}_3 &= \alpha_s + \alpha_t + \mu_2 + \mu_4, & \mathcal{H}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$S_{0,4}(\alpha_s, \alpha_t, \vec{\nu}) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^4 [\text{Li}_2(w_+ e^{\mathcal{V}_a}) - \text{Li}_2(w_- e^{\mathcal{V}_a}) - \text{Li}_2(w_+ e^{\mathcal{H}_a}) + \text{Li}_2(w_- e^{\mathcal{H}_a})], \quad (68)$$

где $w_{\pm}$ – два различных корня (квадратные по w) уравнения

$$\prod_{a=1}^4 (1 - w e^{\mathcal{V}_a}) = \prod_{a=1}^4 (1 - w e^{\mathcal{H}_a}). \quad (69)$$

Аналогичный формализм применим и к ребру рода 1, так что мы его не приводим.

3.1.5. Гамильтоновы потоки и изгиб. Фиксируем Γ и рассмотрим гамильтоновы потоки, порождаемые коммутирующими относительно скобки Пуассона функциями $A_e = e^{\alpha_e} + e^{-\alpha_e}$, для всех ребер e . Эти потоки порождают комплексифицированную интегрируемую систему. Ее вещественные слои включают в себя твисты Фенхеля–Нильсена в пространстве Тейхмюллера и потоки Голдмана [68] в пространстве модулей $SU(2)$ -плоских связностей.

Поток, порожденный α_e , в наших координатах действует очень просто: β_e смещается, а $\alpha_{e'}$ и $\beta_{e'}$ остаются без изменения при $e' \neq e$. Любопытно проследить действие этого потока на данные монодромии плоской связности $\mathcal{A}$. Проведем это для случая $g = 0, n = 4$.

Итак, возьмем α в качестве гамильтониана и попытаемся найти порожденный им гамильтонов поток $\mathcal{U}_t$. Конечно, в координатах (α, β) это тривиально: $\mathcal{U}_t: (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta + t)$. Определим влияние этого преобразования на плоскую связность $\mathcal{A}$, которую мы запараметризовали калибровочным классом эквивалентности набора (g_1, g_2, g_3, g_4) с условием $g_4 g_3 g_2 g_1 = 1$. Мы утверждаем, что выполняется соотношение

$$\mathcal{U}_t: (g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto (g_1, g_2, e^{-tJ} g_3 e^{tJ}, e^{-tJ} g_4 e^{tJ}), \quad (70)$$

где введен нормированный элемент алгебры Ли J , бесследовая (2×2) -матрица с собственными числами $\pm 1/2$, $\text{tr } J = 0$, $\text{tr } J^2 = 1/2$, такая, что

$$g_2 g_1 = e^{2\alpha J}. \quad (71)$$

Действительно, пусть

$$B_t = \text{tr}(g_2 e^{-tJ} g_3 e^{tJ}). \quad (72)$$

Используя тождество для SL_2 -матриц

$$e^{2t\alpha J} = \frac{\text{sh}[(1-t)\alpha]}{\text{sh } \alpha} + \frac{\text{sh } t\alpha}{\text{sh } \alpha} e^{2\alpha J},$$

можно легко посчитать:

$$B_t(A^2 - 4) + 2(m_2m_3 + m_1m_4) - A(m_1m_3 + m_2m_4) = 2 \operatorname{ch}(\beta + t) \sqrt{c_{12}(A)c_{34}(A)},$$

что доказывает соотношение (70).

В общем случае при $g = 0$ гамильтонов поток, порожденный координатой α_e , отвечающей ребру e , и соответствующая диагональ d_e (как на рис. 10) имеют очень простую геометрическую интерпретацию (по модулю комплексификации): гиперболический n -угольник просто сгибается вдоль диагонали d_e . Угол изгиба, соответствующий U_t , равен t . Это комплексифицированная версия построений, проведенных в работах [66], [74]–[76].

4. БРАНА ОПЕРОВ

В этом разделе мы кратко исследуем так называемую брану оперов в сигма-модели с таргет-пространством $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{loc}}$. Это D-брана $\mathcal{B}_{\mathcal{O}_\tau}$ типа (A, B, A) , которая соответствует J -комплексному Ω_J -лагранжеву подмногообразию $\mathcal{O}_\tau \subset \mathcal{M}_\Sigma^{\text{loc}}$, описанному в работе [77]. Действительно, пространство $\mathcal{M}^{\text{loc}}$ локально расслаивается на многообразия SL_2 -оперов для различных комплексных структур на Σ , что проявляется в локальном отождествлении пространства модулей плоских SL_2 -связностей с пространством модулей проективных структур [78] (см. также [38], [79]).

Грубо говоря, плоская связность $\mathcal{A} = \mathcal{A}_z dz + \mathcal{A}_{\bar{z}} d\bar{z}$ является G -опером, если калибровочный класс эквивалентности для $\bar{A} = \bar{A}_z d\bar{z}$ задает на Σ некоторое конкретное голоморфное G -расслоение, определяемое комплексной структурой на поверхности Σ . Для $G = SL_2(\mathbb{C})$ это расслоение такое, что соответствующее векторное расслоение ранга 2 является (единственным с точностью до изоморфизма) нетривиальным расширением расслоения $K_\Sigma^{-1/2}$ с помощью $K_\Sigma^{1/2}$.

SL_2 -опер локально является (мероморфным) дифференциальным оператором второго порядка $\mathcal{D} = -\partial^2 + T(z)$, действующим на $(-1/2)$ -дифференциалы.

Если для удобства фиксировать некоторую опорную комплексную структуру на поверхности Σ с локальными координатами $(w, \bar{w})$ и описать общую комплексную структуру с помощью дифференциала Бельтрами $\mu = \mu_w^{\bar{w}} d\bar{w} \partial_w$, тогда

$$A_{\bar{w}} - \mu A_w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \partial \mu & 0 \\ -\frac{1}{2} \partial^2 \mu & \frac{1}{2} \partial \mu \end{pmatrix}, \quad A_w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{T} & 0 \end{pmatrix}, \quad (73)$$

где $\tilde{T}$ удовлетворяет следующему условию совместности:

$$(\bar{\partial} - \mu \partial - 2\partial \mu) \tilde{T} = -\frac{1}{2} \partial^3 \mu. \quad (74)$$

Вообще говоря, понятие G -опера было введено для римановой поверхности с выколотыми точками, где в операх могут возникать некоторые полюсы [77]. В настоящей работе мы изучаем только случай регулярных особенностей. Это означает, что T может иметь полюс не более второго порядка в любой выколотой точке.

В случае $G = SL_2(\mathbb{C})$ пространство оперов для переменной комплексной структуры поверхности Σ , является открытым подмножеством в пространстве модулей плоских G -связностей [78].

4.1. SL_2 -оперы на поверхности нулевого рода. В случае поверхности нулевого рода с n отмеченными точками SL_2 -опер можно отождествить с дифференциальным оператором второго порядка (проективная связность) вида

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= -\partial_z^2 + T(z), \\ T(z) &= \sum_{a=1}^n \frac{\Delta_a}{(z - x_a)^2} + \frac{\epsilon_a}{z - x_a}, \end{aligned} \quad (75)$$

где вспомогательные параметры ϵ_a подчиняются условиям

$$\sum_{a=1}^n \epsilon_a = 0, \quad \sum_{a=1}^n (x_a \epsilon_a + \Delta_a) = 0, \quad \sum_{a=1}^n (x_a^2 \epsilon_a + 2x_a \Delta_a) = 0, \quad (76)$$

обеспечивающим несингулярность выражения (75) при $z = \infty$. В действительности открытое множество в пространстве всех SL_2 -плоских связностей на сфере с n выколотыми точками можно запараметризовать пространством n -наборов $(x_a, \epsilon_a)_{a=1}^n$, подчиняющихся условиям (76) по модулю диагонального PGL_2 -действия

$$(x_a, \epsilon_a)_{a=1}^n \mapsto \left(\frac{Ax_a + B}{Cx_a + D}, \epsilon_a (Cx_a + D)^2 + 2C(Cx_a + D)\Delta_a \right)_{a=1}^n.$$

Опер (75) задает точку в $\mathcal{M}_{0,n;\nu}$, если

$$\Delta_a = \nu_a(\nu_a - 1), \quad a = 1, \dots, n. \quad (77)$$

В этом случае соответствие (24), (25) $\partial_{\tau_k} \leftrightarrow H_k$ между вариациями комплексных модулей поверхности Σ и функциями на многообразии оперов $\mathcal{O}_\tau$ обеспечивается 1-формой

$$\delta = \sum_a \epsilon_a dx_a. \quad (78)$$

Если глобальная координата z на сфере фиксирована, например, требованием, чтобы три из n выколотых точек были $0, 1, \infty$, то 1-форма δ становится хорошо определенной в касательном пространстве к $\mathcal{M}_{0,n}$.

4.2. SL_2 -оперы на поверхности рода 1. Мы можем также вполне явно описать пространство оперов на эллиптической кривой E_τ с регулярными особенностями в точках $x_1, \dots, x_n \in E_\tau$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= -\partial_z^2 + T(z), \\ T(z) &= u + \sum_{a=1}^n \Delta_a \wp(z - x_a) + \epsilon_a \zeta(z - x_a), \end{aligned} \quad (79)$$

где $\sum_a \epsilon_a = 0$, u – постоянная, а также использованы функции Вейерштрасса ζ и $\wp = \zeta'$. Соответствие $\partial_{\tau_k} \leftrightarrow H_k$ теперь задается 1-формой

$$\delta = \sum_a \epsilon_a dx_a + u d\tau. \quad (80)$$

4.3. Оперы на вырожденных кривых. Для практических целей полезно изучить регулярные оперы на гладких кривых с выколотыми точками, комплексная структура которых приближается к структуре максимально вырожденной стабильной кривой. Как обсуждалось выше, такое максимальное вырождение можно закодировать трехвалентным графом Γ с n хвостами и g петлями. Каждая внутренняя вершина отвечает сфере с тремя дырками, каждое внутреннее ребро отвечает двойной точке (перетянутая ручка). Комплексная структура, близкая к максимально вырожденной, соответствующей графу Γ , параметризуется присвоением внутренним ребрам комплексных чисел $q_e, |q_e| \ll 1$.

Опер $\mathcal{D}$ на поверхности Σ , близкой к Γ , можно аппроксимировать следующими данными: гипергеометрическим опером в каждой трехвалентной вершине

$$T(z_v) = \frac{\Delta_1}{z_v^2} + \frac{\Delta_2}{(z_v - 1)^2} + \frac{\Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}{z_v(z_v - 1)}, \quad (81)$$

где z_v – координата на сфере с тремя выколотыми точками, соответствующая вершине v , и склеиванием локальных координат поперек ребер

$$z_{v_1(e)} z_{v_2(e)} = q_e, \quad (82)$$

при этом предполагается, что двойная точка на двух сферах $v_1(e)$ и $v_2(e)$, соответствующая e , находится в точках $z = 0$ каждой компоненты. Пусть e_1, e_2, e_3 – три исходящие ребра для данной внутренней вершины v . Пусть они отвечают точкам $z_v = 0, z_v = 1, z_v = \infty$ соответственно. Тогда

$$\Delta_k = \eta_k(\eta_k - 1), \quad (83)$$

где $\eta_k = (\alpha_{e_k}/2\pi i) + \delta_k$, если e_k – внутреннее ребро, и $\eta_k = \nu_i$, если e_k – i -й хвост, $\delta_{1,3} = 1/2, \delta_2 = 0$. Такой сдвиг происходит из-за того, что $\mathcal{D}$ действует на $(-1/2)$ -дифференциалы $\Psi_v = \psi(z_v) dz_v^{-1/2}$.

4.4. Сравнение с четырехмерной калибровочной теорией. В пертурбативном пределе, когда риманова поверхность Σ приближается к одной из максимально вырожденных комплексных структур $\tau \rightarrow \tau_*$, функция $\mathcal{Z}$ упрощается, и выражение (18) можно вычислить довольно явно [80]:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}(\alpha, \nu) = \sum_e \left(\frac{\tau_e}{2} \alpha_e^2 + \Upsilon(2\alpha_e) \right) - \sum_v \Upsilon \left(\sum_{e \ni v} \pm \alpha_e \right), \quad (84)$$

где Υ – спектральная функция, производная которой дает логарифм Γ -функции:

$$\begin{aligned} \Upsilon'(x) &= \ln \left(\frac{\Gamma(x + \varepsilon)}{\Gamma(-x + \varepsilon)} \right), \\ \Upsilon(x) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\mu^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{t^s}{1 - e^{-t\varepsilon}} e^{-tx}. \end{aligned} \quad (85)$$

Чтобы сравнить этот результат калибровочной теории с производящей функцией многообразия оперов, соответствующей нашей системе координат Дарбу (α, β) , аппроксимируем оперы на почти вырожденной кривой совокупностью гипергеометрических оперов на сферах с тремя дырками, соответствующих внутренним вершинам

v графа вырождения Γ , вставим матрицы перехода

$$\begin{pmatrix} q_e^{\alpha_e} & 0 \\ 0 & q_e^{-\alpha_e} \end{pmatrix} \quad (86)$$

в двойные точки, соответствующие ребрам e , и используем стандартные матрицы перехода для решений гипергеометрического уравнения, чтобы рассчитать матрицы монодромии g_1, g_2, g_3, g_4 для каждого ребра нулевого рода и матрицы g, h для каждого ребра первого рода.

Можно также включить $e^{2\pi i \tau_e}$ -поправки согласно обычной квантово-механической теории возмущений и проверить согласие с инстантонными вычислениями со стороны калибровочной теории. Мы сделали такие проверки при малом числе инстантонов для двух основных случаев: для теории $SU(2)$ $N_f = 4$ (которая соответствует $\mathcal{M}_{0,4}$) и для теории $SU(2)$ $\mathcal{N} = 2^*$ (которая соответствует $\mathcal{M}_{1,1}$).

4.5. Топологическая брана. Изучение разделения переменных, предложенное Скляниным [81] для квантовой системы Годена, которая является, по существу, системой Хитчина нулевого рода, предполагает следующее определение этой второй браны. Предположим, что параметры ν_k общие и не полуцелые. Связь разделения переменных с геометрической программой Ленглендса и связанными с ней проблемами можно найти в работе [82].

Определим подмногообразие $\mathcal{L}_\gamma$ для любой пары $\gamma = (\Gamma, \text{or})$, состоящей из графа вырождения Γ и выбора ориентации or . Для ориентированного ребра e очевидным образом введем вершину-источник $s(e)$ и вершину-цель $t(e)$.

Дадим определение подмногообразия $\mathcal{L}_\gamma$. Для любого внутреннего ребра e нулевого рода потребуем, чтобы величина α_e равнялась сумме величин $\pm\alpha_e$ или $\pm\nu_k$ (знак зависит от ориентации), соответствующих двум другим ребрам, входящих в $s(e)$:

$$\alpha_e = \sum_{e', t(e')=s(e)} \eta_{e'} - \sum_{e', s(e')=s(e)} \eta_{e'},$$

где, как и раньше, $\eta_e = \alpha_e \pm \delta_e$, если e – внутреннее ребро, и $\eta_e = \nu_k$, если e – k -й хвост.

Многообразие $\mathcal{L}_\gamma$ в координатной карте $\mathcal{U}_{\Gamma'}$ описывается производящей функцией, которая является суммой дилогарифмов, согласно формуле (68).

Приведенные рассуждения следует сопоставить с результатами работы [82], где с помощью тривиальных операторов монодромии решена задача Годена на собственные значения в случае полуцелых ν_k . На языке нашей статьи это означает, что вторая брана соответствует унипотентной монодромии плоских связностей.

5. ПЕРСПЕКТИВЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе мы ввели систему голоморфных координат Дарбу (α, β) в пространстве модулей $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{loc}}$ плоских $SL_2(\mathbb{C})$ -связностей на римановой поверхности с выколотыми точками и фиксированными классами сопряженности монодромий вокруг выколотых точек. Основное утверждение относительно введенной координатной системы состоит в отождествлении производящей функции многообразия $\mathcal{O}_\tau$ SL_2 -оперов с эффективным твистованным суперпотенциалом четырехмерной теории A_1 , соответствующей поверхности Σ , подвергнутой двумерной Ω -деформации.

Используя нашу систему координат, мы также представили функцию Янга–Янга квантовой системы Хитчина в виде разности производящих функций многообразия оперов $\mathcal{O}_\tau$ и второго лагранжева подмножества $\mathcal{L}_\gamma$, которое определяет пространство состояний квантовой системы Хитчина. Предложен способ построения $\mathcal{L}_\gamma$ в случае поверхности нулевого рода. Как объясняется в работах [14]–[16], функция Янга–Янга, о которой говорится в настоящей работе, отличается от функции Янга–Янга конечномерной модели Годена или спиновых цепочек, которую можно вывести, взяв предел критического уровня в представлении свободного поля конформных блоков алгебры токов [83], [84], как это сделано в работах [85]–[87].

Производящая функция $\mathcal{W}_{\mathcal{O}_\tau}$ имеет также и другие применения. Например, ее можно отождествить с классическим конформным блоком теории Лиувилля [88], благодаря чему становится естественной связь с четырехмерной калибровочной теорией поля согласно предположению, выдвинутому в работе [53]. Она также обуславливает “голоморфную часть” классического действия Лиувилля, что обсуждается в работах [35], [36], [38], [55], [89].

Поскольку многообразие оперов детально изучено для любых групп Ли G , необходимо провести обобщение координат Дарбу на случай общей группы G . Это позволит нам рассчитать эффективный твистованный суперпотенциал экзотических теорий, не имеющих лагранжева описания (общие $(0, 2)$ -теории типа A, D, E , компактифицированные на римановой поверхности и подвергнутые Ω -деформации).

Чтобы охарактеризовать конформные блоки конформных теорий Лиувилля и Тоды, используя соотношения, полученные в работе [53], нужно обратиться к общей Ω -деформации, в которой обе величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ являются ненулевыми. Утверждалось, что это позволило бы эффективно проквантовать алгебры голоморфных функций на $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{loc}}(G)$ и $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{loc}}({}^L G)$ с параметрами деформационного квантования $\hbar = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ и $1/\hbar = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ соответственно. Тогда $\mathcal{Z}$ -функция будет вектором в представлении пространства $\mathcal{A}_G^{\hbar} \times \mathcal{A}_{{}^L G}^{1/\hbar}$, который квазиклассически соответствует $\mathcal{O}_\tau$. Нахождение этого вектора представляется чрезвычайно важной проблемой. Последние обсуждения проблем такого рода можно найти в работах [40], [90], [54], [48].

Упомянем еще некоторые вопросы. Наше построение координат Дарбу (α, β) и описание многообразия оперов $\mathcal{O}_\tau$ должны иметь интересный квазиклассический предел, соответствующий пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ Ω -фона. В этом пределе должна обнаружиться геометрия Виттена–Зайберга системы Хитчина. Наши построения должны также содержать аналог предела больших масс и слабой связи калибровочной теории (как, например, в работе [91]), ведущего асимптотически свободной калибровочной теории. Мы полагаем, что расширение наших координат Дарбу на случай пространства модулей плоских связностей с нерегулярными особенностями будет играть важную роль как в анализе четырехмерной калибровочной теории, так и в распространении дуальности Ленглендса на случай дикого ветвления [92], а также в приложениях к интегрируемым системам [93].

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. Фоку, Е. Френкелю, А. Герасимову, Ю. Неретину, Ф. Смирнову за полезные обсуждения. Н. А. Некрасов также благодарит Д. Каледина и А. Лосева за обсуждения. Работа Н. А. Некрасова частично поддержана РФФИ (грант № 12-02-00594_а), работа А. А. Рослого частично поддержана РФФИ (грант № 12-02-00594_а) и Правительством РФ

(грант № 11.G34.31.0023), работа С. Л. Шаташвили поддержана SFI (грант 08/RFP/MTN1546) и ESF-грантом ITGP. Часть работы сделана во время визита А. А. Рослого в IHES летом 2010 г.

Основная концепция о производящих функциях многообразия оперов сообщалась одним из авторов на конференции в Центре Саймонса (Simons Center) “Perspectives, Open Problems and Applications of Quantum Liouville Theory” (Simons Centre, Stony Brook, NY, USA, 29 марта – 2 апреля 2010 г.). Результаты этой работы также сообщались на различных семинарах и конференциях, в частности “Symmetry, Duality, and Cinema” (Institute Henri Poincaré, Paris, France, 17 июня 2010 г.); “Advances in String Theory, Wall Crossing, and Quaternion-Kähler Geometry” (Institute Henri Poincaré, Paris, France, 30 августа – 3 сентября 2010 г.); Cargèse Summer School “String Theory: Formal Developments and Applications” (Cargèse, France, 21 июня – 3 июля 2010 г.); IAS (Princeton) (29 октября 2010 г.); “From Sigma Models to Four-dimensional QFT” (DESY, Hamburg, Germany, 29 ноября – 3 декабря 2010 г.); 15th Midrasa Mathematicae “Derived Categories of Algebro-Geometric Origin and Integrable systems” (Hebrew University of Jerusalem IAS, Israel, 19–24 декабря 2010 г.). Авторы благодарят всех организаторов и аудиторию за плодотворную атмосферу и стимулирующие вопросы.

Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, *The Bethe Ansatz*, Sonderforschungsbereich 288, Berlin, 1993.
- [2] C. N. Yang, C. P. Yang, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 1115–1122.
- [3] C. N. Yang, C. P. Yang, *Phys. Rev.*, **150**:1 (1966), 321–327.
- [4] Е. К. Склинин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220.
- [5] M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304018, 31 pp., arXiv: 0811.0439.
- [6] G. W. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.*, **209**:1 (2000), 97–121, arXiv: hep-th/9712241.
- [7] A. A. Gerasimov, S. L. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.*, **277**:2 (2008), 323–367, arXiv: hep-th/0609024.
- [8] A. A. Gerasimov, S. L. Shatashvili, “Two-dimensional gauge theories and quantum integrable systems”, *From Hodge Theory to Integrability and TQFT: tt*-geometry*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **78**, eds. R. Y. Donagi, R. Wendland, AMS, Providence, RI, 2008, 239–262, arXiv: 0711.1472.
- [9] E. Witten, *J. Geom. Phys.*, **9**:4 (1992), 303–368, arXiv: hep-th/9204083.
- [10] А. С. Горский, Н. Некрасов, *ТМФ*, **100**:1 (1994), 97–103.
- [11] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **436**:3 (1995), 582–608, arXiv: hep-th/9401017.
- [12] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Elliptic Calogero–Moser system from two dimensional current algebra*, arXiv: hep-th/9401021.
- [13] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **414**:1–2 (1994), 213–238, arXiv: hep-th/9304047.
- [14] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **192–193** (2009), 91–112, arXiv: 0901.4744.
- [15] N. Nekrasov, S. Shatashvili, *AIP Conf. Proc.*, **1134** (2009), 154–169.
- [16] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **177** (2009), 105–119, arXiv: 0901.4748.
- [17] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, “Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories”, *XVth International Congress on Mathematical Physics* (Prague, Czech Republic, 3–8 August, 2009), ed. P. Exner, World Sci., Singapore, 2010, 265–289, arXiv: 0908.4052.

- [18] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474, arXiv: hep-th/9505035.
- [19] E. Martinec, N. Warner, *Nucl. Phys. B*, **459**:1 (1996), 97–112, arXiv: hep-th/9509161.
- [20] R. Donagi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334, arXiv: hep-th/9510101.
- [21] R. Y. Donagi, *Seiberg–Witten integrable systems*, arXiv: alg-geom/9705010.
- [22] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2004), 831–864, arXiv: hep-th/0206161.
- [23] A. Losev, N. Nekrasov, S. L. Shatashvili, “Testing Seiberg–Witten solution”, *Strings, Branes and Dualities* (Cargèse France, May 26–June 14, 1997), eds. L. Baulieu, P. Di Francesco, M. Douglas, V. Kazakov, M. Picco, P. Windey, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 359–372, arXiv: hep-th/9801061.
- [24] A. Losev, N. Nekrasov, S. L. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611, arXiv: hep-th/9711108.
- [25] E. Witten, “Some comments on string dynamics”, *Proceedings of Strings ’95: Future Perspectives in String Theory* (USC, Los Angeles, March 13–18, 1995), eds. I. Bars, P. Bowknegt, J. Minahan, D. Nemeshansky, K. Pilch, H. Saleur, N. Warner, World Sci., Singapore, 1996, 501–523, arXiv: hep-th/9507121.
- [26] A. Strominger, *Phys. Lett. B*, **383**:1 (1996), 44–47, arXiv: hep-th/9512059.
- [27] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **500**:1 (1997), 3–42, arXiv: hep-th/9703166.
- [28] D. Gaiotto, *$N = 2$ dualities*, arXiv: 0904.2715.
- [29] D. Gaiotto, G. W. Moore, A. Neitzke, *Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation*, arXiv: 0907.3987.
- [30] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **431**:1 (1994), 484–550, arXiv: hep-th/9408099.
- [31] G. W. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.*, **209**:1 (2000), 77–95, arXiv: hep-th/9803265.
- [32] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **443**:1 (1995), 85–126, arXiv: hep-th/9503124.
- [33] M. Atiyah, R. Bott, *Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A*, **308**:1505 (1982), 523–615.
- [34] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399.
- [35] A. M. Polyakov, *Modern Phys. Lett. A*, **2**:11 (1987), 893–898.
- [36] A. Alekseev, S. L. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **323**:3 (1989), 719–733.
- [37] E. Verlinde, H. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **348**:3 (1991), 457–489.
- [38] H. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **337**:3 (1990), 652–680.
- [39] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **311**:1 (1988), 46–78.
- [40] B. Б. Фок, Л. О. Чехов, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 511–528.
- [41] L. O. Chekhov, V. V. Fock, *Czech. J. Phys.*, **50**:11 (2000), 1201–1208.
- [42] E. Witten, *Three-dimensional gravity revisited*, arXiv: 0706.3359.
- [43] N. Seiberg, E. Witten, “Gauge dynamics and compactification to three dimensions”, *The Mathematical Beauty of Physics* (Saclay, France, 5–7 June, 1996), Advanced Series in Mathematical Physics, **24**, eds. J. M. Drouffe, J. B. Zuber, World Sci., Singapore, 1997, 333–366, arXiv: hep-th/9607163.
- [44] N. J. Hitchin, *Proc. London Math. Soc.* (3), **55**:1 (1987), 59–126.
- [45] A. Kapustin, E. Witten, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:1 (2007), 1–236, arXiv: hep-th/0604151.
- [46] N. Hitchin, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 91–114.
- [47] R. Donagi, “Spectral covers”, *Current Topics in Complex Algebraic Geometry* (Berkeley, CA, 1992/93), Mathematical Sciences Research Institute Publications, **28**, eds. H. Clemens, J. Kollár, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 65–86, arXiv: alg-geom/9505009.
- [48] N. Nekrasov, E. Witten, *JHEP*, **09** (2010), 092, 82 pp., arXiv: 1002.0888.
- [49] D. Gaiotto, E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **13**:3, 721–896, arXiv: 0807.3720.

- [50] D. Gaiotto, E. Witten, *Supersymmetric boundary conditions in $N = 4$ super Yang–Mills theory*, arXiv:0804.2902.
- [51] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin’s integrable system and Hecke eigen-sheaves*, not published.
- [52] S. Gukov, E. Witten, *Branes and quantization*, arXiv:0809.0305.
- [53] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv:0906.3219.
- [54] J. Teschner, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **15**:2 (2011), 471–564, arXiv:1005.2846v2.
- [55] П. Г. Зорграф, Л. А. Тахтаджян, *Матем. сб.*, **132(174)**:2 (1987), 147–166.
- [56] V. Fock, A. Goncharov, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No.*, **103**:1 (2006), 1–211.
- [57] N. Nekrasov, *Commun. Math. Phys.*, **180**:3 (1996), 587–603, arXiv:hep-th/9503157.
- [58] R. Donagi, E. Markman, “Spectral covers, algebraically completely integrable hamiltonian systems, and moduli of bundles”, *Integrable Systems and Quantum Groups* (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, 1996, 1–119, arXiv:alg-geom/9507017.
- [59] A. Kapustin, S. Sethi, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:3 (1998), 571–591, arXiv:hep-th/9804027.
- [60] E. Markman, *Compositio Math.*, **93**:3 (1994), 255–290.
- [61] A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov, *Commun. Math. Phys.*, **222**:2 (2001), 299–318, arXiv:hep-th/9901089.
- [62] V. V. Fock, A. A. Rosly, *Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and r -matrix*, preprint ITEP-72-92, 1992; *AMS Transl. Ser. 2*, **191** (1999), 67–86, arXiv:math/9802054.
- [63] V. V. Fock, A. A. Rosly, *ТМФ*, **95**:2 (1993), 228–238.
- [64] V. V. Fock, A. A. Rosly, *Internat. J. Modern Phys. B*, **11**:26–27 (1997), 3195–3206.
- [65] W. M. Goldman, *Adv. Math.*, **54**:2 (1984), 200–225.
- [66] W. M. Goldman, *Invent. Math.*, **85** (1986), 263–302.
- [67] V. G. Turaev, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **24**:6 (1991), 635–704.
- [68] A. N. Tyurin, *Quantization, Classical and Quantum Field Theory and Theta Functions*, CRM Monograph Series, **21**, AMS, Providence, RI, 2003.
- [69] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, *УМН*, **60**:2(362) (2005), 159–160.
- [70] L. Schläfli, *Theorie der vielfachen Kontinuität*, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, **1**, Birkhäuser, Basel, 1950.
- [71] N. I. Lobatschefskij, “Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale”, *Deutsche Übersetzung von H. Liebmann*, Teubner, Leipzig, 1904.
- [72] Yu. Cho, H. Kim, *Discrete Comput. Geom.*, **22**:3 (1999), 347–366.
- [73] J. Milnor, “The Schläfli differential equality”, *Collected Papers*, v. I: *Geometry*, Publish or Perish, Houston, TX, 1994, 281–295.
- [74] M. Kapovich, J. J. Millson, T. Treloar, *The symplectic geometry of polygons in hyperbolic 3-space*, arXiv:math/9907143.
- [75] A. A. Klyachko, “Spatial polygons and stable configurations of points in the projective line”, *Algebraic Geometry and Its Applications* (Yaroslavl, 1992), Aspects of Mathematics, **25**, Vieweg, Braunschweig, 1994, 67–84.
- [76] P. Foth, *J. Geom. Phys.*, **58**:7 (2007), 825–832, arXiv:math/0703525.
- [77] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Opers*, arXiv:math.AG/0501398.
- [78] A. Bilal, I. Kogan, V. Fock, *On the origin of W -algebras*, Preprint CERN-TH.5965/90.
- [79] A. Gerasimov, A. Levin, A. Marshakov, *Nucl. Phys. B*, **360**:2 (1991), 537–558.
- [80] N. Nekrasov, V. Pestun, *Seiberg–Witten geometry of four dimensional $N = 2$ quiver gauge theories*, arXiv:1211.2240.

- [81] Е. К. Склянин, Зап. научн. сем. ЛОМН, **164**, 1987, 151–169.
- [82] E. Frenkel, “Affine algebras, langlands duality, and Bethe ansatz”, *XIth International Congress on Mathematical Physics* (Paris, France, 18–23 July, 1994), ed. D. Iagolnitzer, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, 606–642, arXiv: q-alg/9506003.
- [83] A. Gerasimov, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, S. L. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:13 (1990), 2495–2589.
- [84] V. Schechtman, A. Varchenko, *Integral Representations of N -point Conformal Correlators in the WZW Model*, Preprint MPI/89-51, Max-Planck Institut, Bonn, 1989.
- [85] B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, *Commun. Math. Phys.*, **166**:1 (1994), 27–62, arXiv: hep-th/9402022.
- [86] N. Reshetikhin, A. Varchenko, “Quasiclassical asymptotics of solutions to the KZ equations”, *Geometry, Topology, and Physics*, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, 293–322, arXiv: hep-th/9402126.
- [87] G. Felder, A. Varchenko, *Compositio Math.*, **107**:2 (1997), 143–175, arXiv: hep-th/9511120.
- [88] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605, arXiv: hep-th/9506136.
- [89] E. Aldrovandi, L. A. Takhtajan, *Commun. Math. Phys.*, **227**:2 (2002), 303–348, arXiv: math/0006147.
- [90] L. F. Alday, D. Gaiotto, S. Gukov, Y. Tachikawa, H. Verlinde, *JHEP*, **01** (2010), 113, 50 pp., arXiv: 0909.0945.
- [91] D. Gaiotto, *Asymptotically free $N = 2$ theories and irregular conformal blocks*, arXiv: 0908.0307.
- [92] E. Witten, *Anal. Appl. (Singap.)*, **6**:4 (2008), 429–501, arXiv: 0710.0631.
- [93] B. Feigin, E. Frenkel, V. Toledano-Laredo, *Adv. Math.*, **223**:3 (2010), 873–948, arXiv: math/0612798.

Поступила в редакцию 1.02.2014